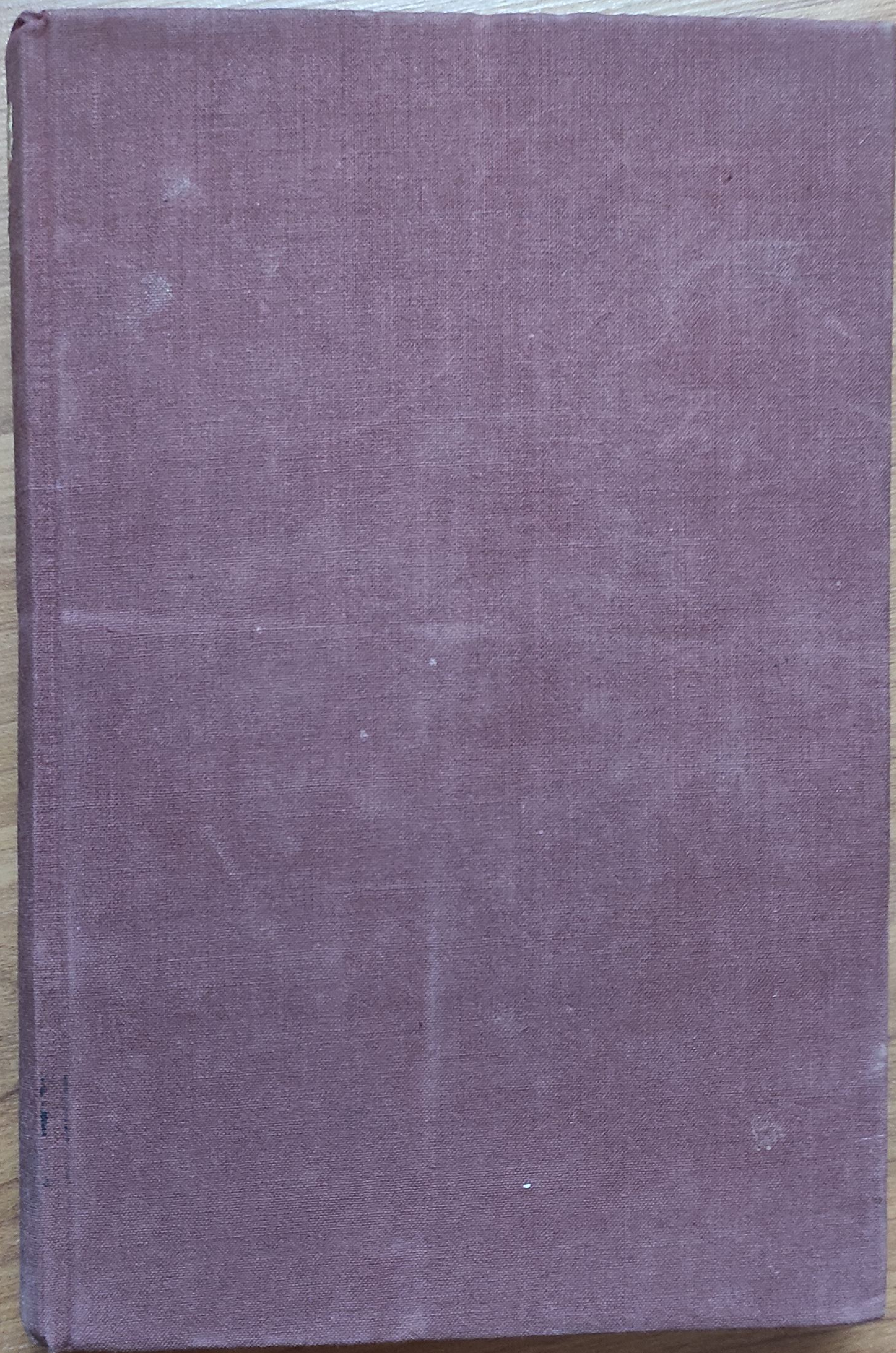


CURS
DE
MECANICĂ
RAȚIONALĂ

PREDAT LA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE A UNIVERSITĂȚII DIN CLUJ

DE

Generalul ST. BURILEANU
DOCTOR ÎN MATEMATICI DELA PARIS

Cu 3 Note de D-nii profesori
D. POMPEIU — C. POPOVICI — V. VÂLCOVICI
dela Facultatea de Științe a Universității din București

VOLUMUL II
DINAMICA

BUCUREȘTI
ATELIERELE GRAFICE SOCEC & Co., S. A. R.
1944

P R E F A Ț A

Prezenta lucrare formează volumul al doilea al cursului de Mecanică rațională, pe care l-am predat la Facultatea de Științe a Universității din Cluj. L-am intitulat: **Dinamica**, *dar cititorul va vedea că el coprinde și tot ce se referă la echilibrul solidelor și sistemelor materiale, cu alte cuvinte coprinde și întreaga* **Statică**.

Ca și pentru volumul de **Cinematică**, *am căutat să dau redactării Dinamicei cât mai multă preciziune și claritate, pentru ca tinerii cititori, cărora mă adresez, să aibe satisfacția de a înțelege tot ce vor citi, fără greutate și fără opriri care să le consume timpul în mod inutil. Dacă voi fi izbutit, aceasta va fi spre cea mai mare mulțumire a mea, căci numai pentru a fi folositor tineretului am luat osteneala de a scrie aceste cărți.*

Ultima parte a volumului de față tratează despre **Mișcarea proectilului în jurul centrului său de greutate.** *Aceasta ca aplicațiune la un caz concret a teoriei mișcării unui solid în jurul unui punct fix, desvoltată într'un capitol anterior.*

Despre mișcarea proectilului în jurul centrului său de greutate, pe timpul când proectilul se mișcă în aer, s'a

scris mult în Franța, Germania și Italia. Cu deosebire de interesant în această privință este **Mémorial de l'Artillerie Française,** *tome VI, 3-e fascicule, din 1927, consacrat în întregime numai acestui subiect, pe care îl tratează pe rând și independent unul de altul, mai mulți autori specialiști* [1]*).*

Primele și cele mai importante lucrări asupra teoriei mișcării proectilului în jurul centrului său de greutate sunt însă acelea datorite lui **M. de Sparre,** *la care se referă toți autorii din urmă. Dela 1875 când era Locotenent de Artilerie și până în 1924, M. de Sparre, printr'o serie de Memorii apărute atât în Mémorial de l'Artillerie de Marine cât și în diferite Buletine ale Societăților savante, a desvoltat în adevăr această teorie așa cum nu făcuse nimeni înaintea sa, ajungând să lămurească mișcarea axului proectilului și să determine influența asupra acestei mișcări a numeroase cauze de perturbări inițiale sau de defecte de construcție a proectilului.*

Lucrările lui M. de Sparre, cu care am luat contact personal încă din anul 1899, îmi sunt familiare și le-am citat necontenit în cartea mea de **Balistică Exterioară,** *din acel an. Studiul asupra mișcării proectilului în jurul centrului său de greutate, din volumul de față, se bazează atât pe lucrările lui M. de Sparre publicate până în 1924, cât și pe alte lucrări din ultimul timp printre care acelea ale Profesorului* **Esclangon** *și ale Lt.-Colonelului* **Dufrénois,** *Profesor la Școala Superioară technică a Artileriei dela Paris. Cum nimeni dela noi din țară n'a tratat această grea chestiune înaintea mea, nădăjduesc că prin lucrarea ce prezint, în forma precisă și clară pe care i-am dat-o, voi aduce un real serviciu tineretului, punându-l în curent cu una din cele mai interesante aplicațiuni ale teoriilor de Mecanică rațională, chiar în coprinsul unui Curs de această specialitate.*

---

[1]) *Charbonnier, Esclangon, Burzio, Sugot, Cranz și Schmundt.*

In coprinsul cărţii mă ocup de altfel incidental şi de alte câteva chestiuni importante de artilerie, cum sunt acelea privind particularităţile curbei balistice, deviaţia proectilelor din cauza învârtirii pământului şi percuţiile tunurilor la trageri, care au raport cu construcţia afetelor şi a frânelor de tunuri, reamintind proectul meu pentru construcţia afetului destinat ţevilor de tunuri de 150 m/m scoase din forturile cetăţii Bucureşti, precum şi calculele mele referitoare la construcţia frânei de tragere a tunului antiaerian de 57 m/m cu tragere repede, care poartă numele meu.

Am profitat în sfârşit de această ocazie, pentru a da publicităţii rezultatele obţinute la tragerea de experienţă din 23. IV. 1940 cu un proectil de 75 m/m tip Francez din serviciul armatei noastre, căruia adăogându-i peste ogivă o coafă de un profil special calculat de mine, i s'a putut mări bătaia cu 22%, ceea ce părea de necrezut.

Am stabilit astfel, împotriva celor susţinute de mulţi eminenţi balisticieni [1]*, că:* **Bătaia unui proectil depinde foarte mult de profilul ogivei sale, care trebue studiat cu îngrijire.**

Şi la această concluzie am ajuns nu în anul 1940 când a avut loc tragerea de experienţă dela poligonul Sudiţi, dar încă din **anul 1931** *căci atunci am cerut eu Ministerului de Război, printr'un raport cu data de 26 Ianuarie, ca să aprobe executarea coafelor mele, potrivit desenurilor ce am înaintat şi experimentarea lor la trageri, raport care se termina prin următoarea frază categorică: „Acesta fiind rezultatul general al studiului meu, am onoarea a vă propune să binevoiţi a-mi da posibilitatea să verific prin trageri rezultatele la care m'au condus studiile teoretice,* **în credinţa pe care o am că voi izbuti a mări toate bătăile proectilelor noastre cu cel puţin 20%**".

Şi experienţa a confirmat teoria.

---

[1] *Cranz* şi Balistica sa Exterioară, Revista Artileriei, Oct. 1939.

Inchei această prefață mulțumind călduros d-lor:

D. Pompeiu, *Profesor Universitar și membru al Academiei Române;*

C. Popovici, *Profesor Universitar și Directorul Observatorului Astronomic din București;*

V. Vâlcovici, *Profesorul cursului de Mecanică la Facultatea de Științe din București și Directorul Institutului Aerodinamic;*

care au binevoit a onora cartea mea cu câte una din lucrările d-lor personale, pe care le public la sfârșit, sub formă de Note.

General ST. BURILEANU

DINAMICA

DIVIZIUNE:

PARTEA I. Mişcarea şi echilibrul unui punct material.

PARTEA II. Echilibrul sistemelor materiale.

PARTEA III. Mişcarea sistemelor materiale.

PARTEA IV. Mişcarea solidelor invariabile.

PARTEA V. Mişcarea proectilului în jurul centrului său de greutate.

PARTEA I.

MIŞCAREA ŞI ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL.

I. INTRODUCERE.

I. PRINCIPII FUNDAMENTALE.

1. **Axe fixe.** Cinematica studiază, după cum s'a văzut, mişcarea sistemelor geometrice. Teoremele ei au caracterul adevărurilor absolute şi sistemele de axe la care se raportează mişcările pot fi alese în mod arbitrar.

Dinamica se ocupă cu mişcarea sistemelor materiale, a căror molecule iau numele de puncte materiale. Aşa dar, punctul material este o porţiune de materie de dimensiuni neglijabile, şi ca atare, poziţia lui faţă de un sistem de axe cordonate se raportează întocmai ca şi aceea a unui punct geometric.

Cum în natură materiile prezintă o varietate infinită, punctele materiale vor fi şi ele diferite, după sistemul sau corpul din care fac parte.

Dinamica se bazează pe câteva principii fundamentale, deduse din observarea mişcării corpurilor din natură, unele faţă de altele, însă aceste principii nu sunt riguros adevărate decât în mişcările absolute raportate la sistemul de axe având ca origină centrul de greutate al sistemului solar şi axele îndreptate spre 3 stele fixe ale boltei cereşti. Centrul de greutate al sistemului solar coincide de altfel, în mod aproximativ, cu centrul soarelui. Sistemul de axe astfel definit, este considerat ca un *sistem absolut fix*, pentru orice mişcare din interiorul sistemului solar, asupra căruia, stelele, din cauza enormei depărtări la care se găsesc, se admite că nu au nici o influenţă sensibilă.

2. Principii fundamentale. ***Principiul I-iu: Un punct material, care ar exista singur în spaţiu, n'ar putea dobândi nici-o accelerație.***

Principiul acesta cunoscut sub numele de *„principiul inerției"*, mai poate fi enunţat şi astfel: Un punct material izolat, nu-şi poate modifica singur starea lui de repaus, sau mărimea, direcţia şi sensul vitezei de care ar fi animat, aşa că faţă de sistemul fix de axe, mişcarea lui n'ar putea fi decât nulă sau rectilină şi uniformă.

Principiul al II-a: Două puncte materiale izolate, animate de viteze oarecare, determină, unul asupra celuilalt, accelerațiuni îndreptate pe dreapta care le unește și de sensuri contrarii.

Acest principiu trebueşte înţeles astfel: Orice punct material A, exercită o influenţă asupra mişcării unui alt punct material B şi invers, influenţă care se traduce prin dobândirea acceleraţiilor w_A şi w_B îndreptate pe dreapta AB, în sensuri contrarii.

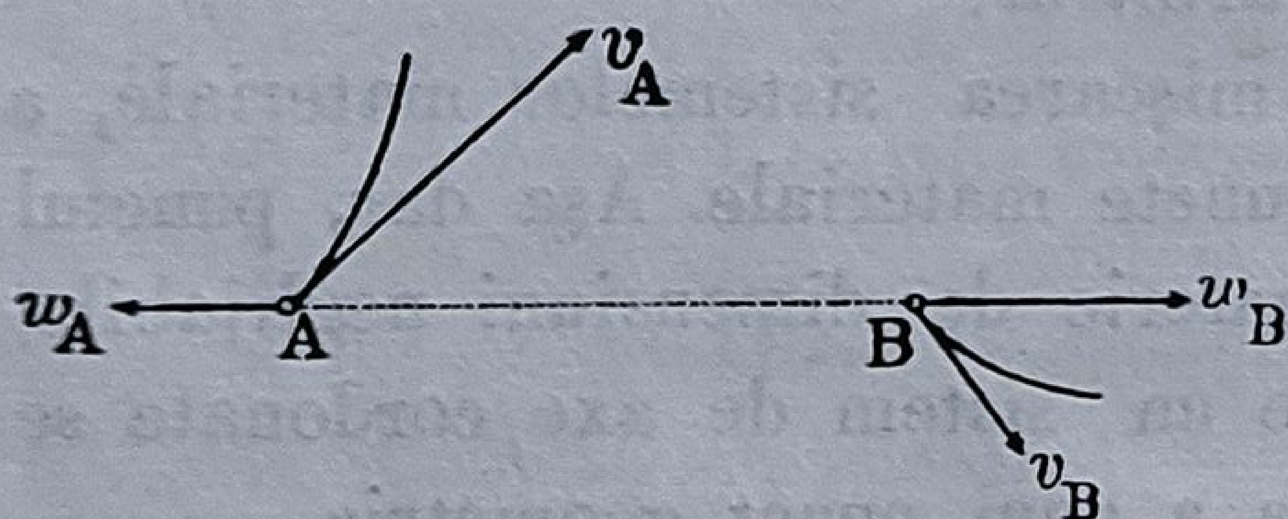


Fig. 1

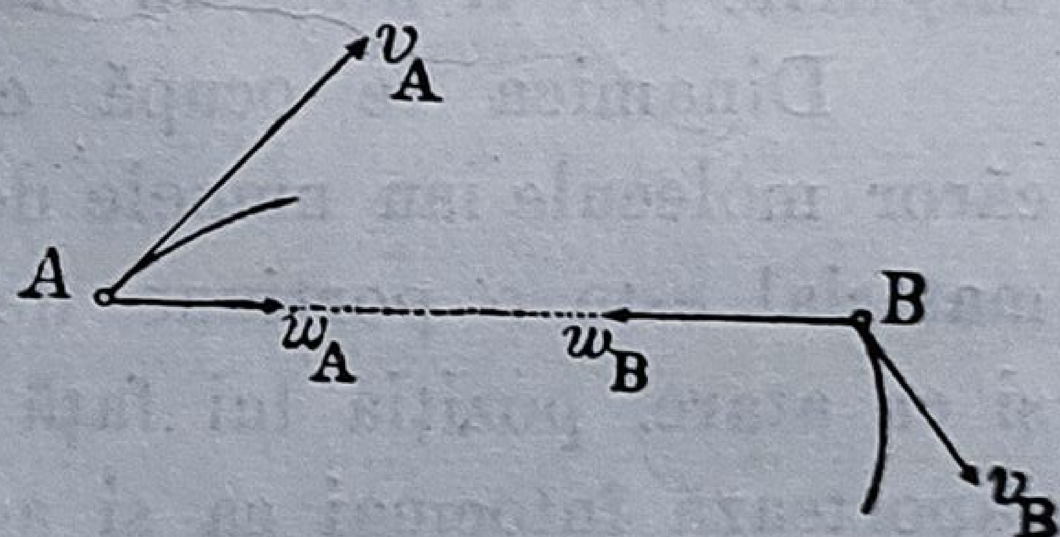


Fig. 2

Principiul al III-a: Raportul valorilor numerice ale accelerațiilor, ce determină două puncte materiale unul asupra celuilalt, este constant.

Acceleraţiile pe care două puncte materiale A şi B le determină unul asupra celuilalt pot fi datorite atracţiunei universale, electrizării punctelor A şi B, presiunei mutuale a acestor puncte, etc.

Principiul trebue înţeles în sensul că oricare ar fi condiţiile fizice care produc acceleraţia, raportul $\frac{w_B}{w_A}$ pentru cele două puncte considerate A şi B, rămâne întotdeauna acelaşi, cu toate că acceleraţiile w_B şi w_A pot varia odată cu condiţiile fizice ce le dau naştere.

Aşa dar $\frac{w_B}{w_A}$ = const., sau ceea ce este tot una : $\frac{w_B}{w_A} = \frac{m_A}{m_B}$ în care m_A va reprezenta un număr ales în mod arbitrar, iar m_B un număr determinat, depinzând numai de natura punctelor A şi B.

Dacă punem în prezenţa punctului A, nu punctul B, ci un alt punct material C, vom avea deasemenea, oricare ar fi valorile acceleraţiilor: $\frac{w_C}{w_A}, = \frac{m_A}{m_C}$ în care m_A va fi numărul ales la început, iar m_C un număr caracterizând natura cuplului de puncte A şi C.

Pentru alte puncte D, E, F, etc., puse în prezenţa lui A se vor obţine alţi numitori $m_D, m_E, \ldots m_K, \ldots$ aşa că în general vom putea scrie $\frac{w_K}{w_A} = \frac{m_A}{m_K}$, în care m_A va fi cel dintâi număr, iar m_K numărul corespunzător indicelui K din şirul: $m_A, m_B, m_C, \ldots m_K, \ldots$

Complectarea principiului al III-a: Raportul acceleraţiilor pe care două puncte P ***şi*** Q ***le determină unul asupra celuilalt, este egal cu raportul dintre acceleraţia punctului*** P ***şi aceia a unui alt punct oarecare, spre exemplu punctul*** A, ***puse în prezenţă, divizat prin raportul dintre acceleraţia punctului*** Q ***şi acceleraţia aceluiaşi punct*** A.

Aceasta revine a zice că raportul acceleraţiilor w_P şi w_Q este egal cu câtul dintre rapoartele $\frac{m_A}{m_P}$ şi $\frac{m_A}{m_Q}$, adică avem $\frac{w_P}{w_Q} = \frac{m_Q}{m_P}$.

Ca urmare imediată, tabloul numerilor

$$m_A, m_B, m_C, \ldots m_K, \ldots$$

ne permite de a calcula raportul acceleraţiilor a două puncte materiale oarecare. Acest raport este egal cu inversul raportului numerilor m care corespund în tablou punctelor considerate.

Putem remarca analogia dintre proprietăţile acestui tablou şi acelea ale tabloului echivalenţilor chimici.

Definiţiune. Numerii $m_A, m_B, m_C, \ldots$ se numesc *massele* punctelor A, B, C, ... Valoarea uneia dintre ele, spre exemplu

m_A, poate fi aleasă în mod arbitrar, însă această valoare odată aleasă, toate celelalte devin bine determinate.

Principiul al IV-a: Intr'un sistem constituit din mai multe puncte materiale, accelerația unuia dintre ele, M, se obține făcând suma geometrică a accelerațiilor ce ar determina asupra lui M. fiecare în parte din celelalte puncte, potrivit principiului al II-a.

Observațiune. Principiile de mai sus nu sunt riguros adevărate decât în mişcările absolute raportate la sistemul de axe fixe despre care am vorbit. In Astronomie, acest sistem se impune dela sine, însă pentru mişcările de pe pământ, se ia ca sistem de referință un sistem de axe invariabil legat pământului. Procedând astfel, neglijăm efectul deplasării centrului pământesc cum şi efectul rotației terestre, însă eroarea care rezultă este în marea majoritate a cazurilor neglijabilă, după cum vom dovedi mai târziu.

3. Introducerea noțiunii de forță. Cuvântul de *forță* nu intră în principiile de mai sus şi am putea să ne lipsim de el. Este totuşi avantajos, din punct de vedere al prescurtărilor, de a face convențiunea următoare:

Când un punct M de massă *m*, pus în prezența unuia sau mai multor puncte materiale, dobândeşte din acest fapt o accelerație *w*, vom zice că M se găseşte supus din partea celorlalte puncte materiale la o forță, reprezentată printr'un vector MF având ca origină punctul M, ca direcție şi sens direcția şi sensul vectorului M*w* al accelerației şi ca mărime, sau *intensitate*, produsul *mw* al massei punctului cu mărimea accelerației.



Fig. 3

Aşa dar $F = mw$ în mărime, direcție şi sens.

Noțiunea de forță intervine deci ca o noțiune derivată, iar nu ca o noțiune primă.

4. Compunerea forţelor. Principiul al IV-a ne dă imediat regula compunerii forţelor. Un punct M_1 lucrând singur asupra lui M îi dă acestuia o acceleraţie w_1; el produce deci asupra lui M o forţă definită prin egalitatea

$$F_1 = mw_1 .$$

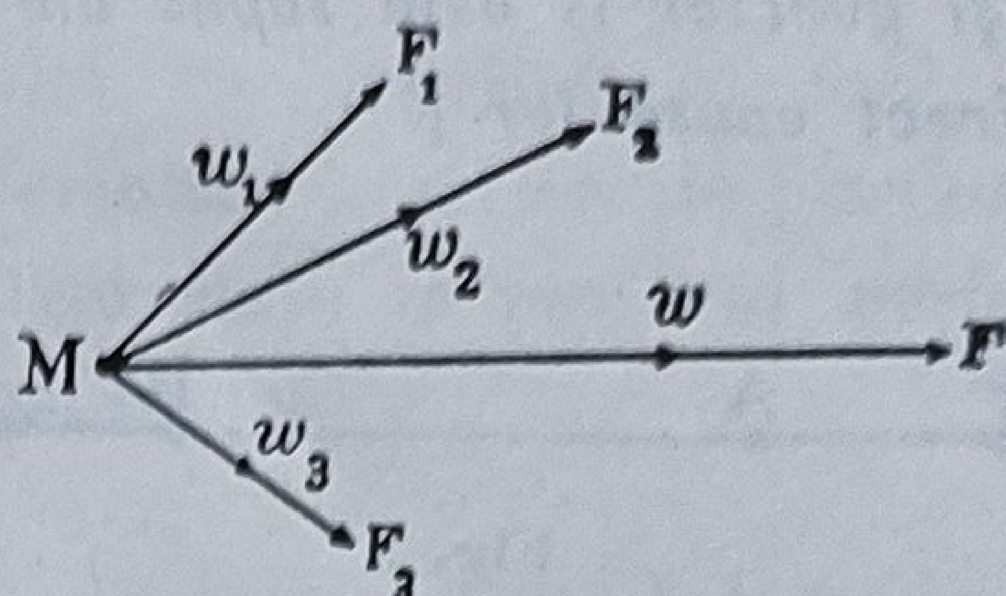


Fig. 4

Un alt punct M_2 lucrând singur, produce asupra lui M, în aceleaşi condiţii de poziţie şi de viteză, o forţă $F_2 = mw_2$ şi aşa mai departe, până la $F_n = mw_n$ datorită acţiunii punctului M_n.

Când toate punctele $M_1, M_2, \ldots M_n$, lucrează deodată asupra lui M, în aceiaşi stare a acestui punct, ca poziţie şi viteză, ele îi dau, potrivit principiului al IV-a, o acceleraţie

$$(w) = (w_1) + (w_2) + \ldots + (w_n)$$

din care rezultă, prin înmulţire cu m,

$$(mw) = (mw_1) + (mw_2) + \ldots + (mw_n) .$$

Această egalitate arată, că dacă punem $F = mw$, forţa F este suma geometrică a forţelor

$$F_1 = mw_1 , \quad F_2 = mw_2 , \quad \ldots \quad F_n = mw_n .$$

Forţa F este zisă *rezultantă*. Putem, după cum se vede, să aplicăm compunerii şi descompunerii forţelor care lucrează asupra unui acelaşi punct, tot ceea ce ştim asupra compunerii şi descompunerii vectoarelor concurente.

5. Principiul egalităţii între acţiune şi reacţiune. Principiile fundamentale ale Dinamicei, sunt datorite în esenţa lor lui *Galileu* şi lui *Newton*, care au introdus însă în enunţarea lor noţiunea de forţă ca o noţiune primă. Forma sub care le-am prezentat noi, datează numai de vre-o câţiva ani şi a fost inspirată de lucrările lui *Kirchhof* şi *Mach*.

Newton a enunţat, sub numele de ***principiul egalităţii între acţiune şi reacţiune***, legea următoare:

„Dacă un punct A este solicitat de o forţă F, datorită prezenţei unui alt punct B, această forţă este îndreptată pe dreapta AB şi punctul B este supus din partea lui A la o forţă F′ egală şi direct opusă lui F“.

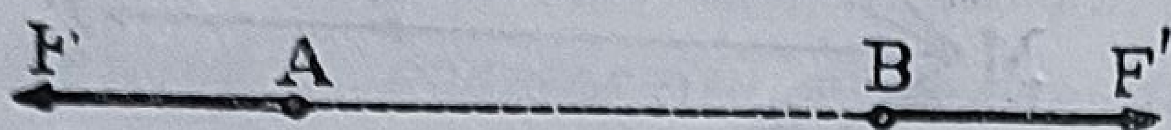


Fig. 5



Fig. 6

Newton a exprimat acest fapt zicând că *reacţiunea este egală şi direct opusă acţiunei.* Principiul lui *Newton* este însă coprins, în mod implicit, în principiile fundamentale de mai sus.

Fie în adevăr două puncte materiale A şi B de masse m şi m', care lucrează unul asupra celuilalt. Potrivit principiilor fundamentale, acceleraţiile w şi w' ale acestor puncte sunt îndreptate pe AB în sensuri contrarii şi verifică egalitatea

$$\frac{w}{w'} = \frac{m'}{m} \qquad \text{sau } mw = m'w'.$$

Forţele $F = mw$ şi $F' = m'w'$, aplicate în punctele A şi B, sunt deci îndreptate pe AB, de sensuri contrarii şi de aceiaşi intensitate. Ori, aceasta este tocmai legea lui *Newton.*

Principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii se aplică imediat şi la acţiunile mutuale a două sisteme de puncte S şi S', sub forma următoare:

Dacă punctele sistemului S *exercită asupra acelora din sistemul* S′ *anumite forţe, invers, punctele sistemului* S′ *exercită asupra acelora din* S *acţiuni reprezentate prin forţe egale şi direct opuse celor dintâi.*

Astfel când un cal trage o trăsură, acţiunile şleaurilor asupra trăsurei sunt în tot momentul egale şi direct opuse acelora ale trăsurei asupra şleaurilor. Când învârtim o piatră ţinută în mână, acţiunea mânii asupra pietrii este egală şi direct opusă reacţiunii pietrii asupra mânii. Forţa cu care pământul atrage luna, este egală şi direct opusă aceleia cu care luna atrage pământul, etc.

Notă. Fie sub forma modernă, fie sub forma ce le-a dat Galileu şi Newton, principiile fundamentale ale Dinamicei nu pot fi verificate cu preciziune matematică prin experienţă. Cea mai admirabilă probă a adevărului ce exprimă, o oferă însă calculele de *Mecanică cerească*, referitoare la mişcările planetelor din sistemul solar, care conduc la rezultate în cea mai perfectă concordanţă cu observările astronomice.

6. **Asupra deviaţiunei.** Fie M un punct material de massă m, animat în momentul t de viteza v şi w acceleraţia pe care o dă lui M un sistem de puncte materiale. Forţa corespunzătoare acestei acceleraţii este $F = mw$.

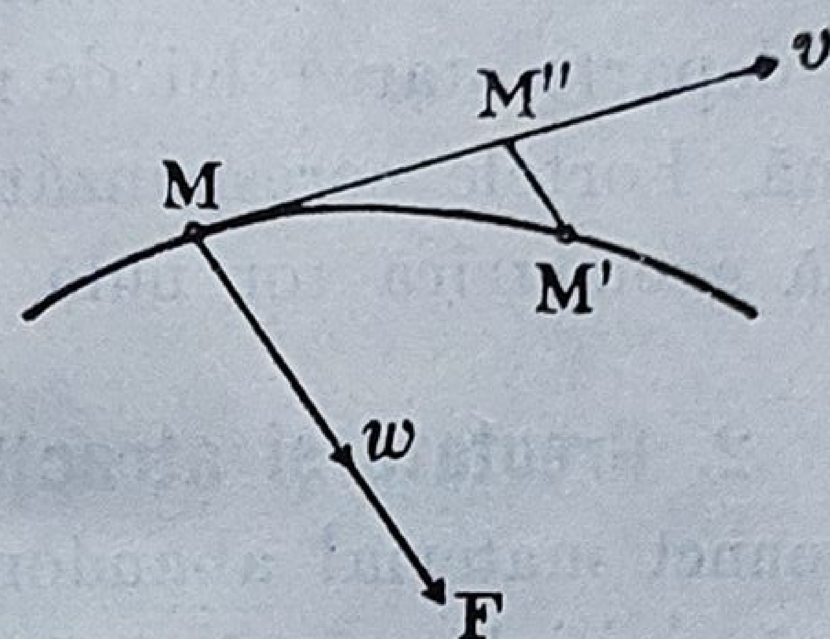


Fig. 7

Fie M′ poziţia lui M după timpul dt. Se ştie că dacă luăm $M M'' = v.dt$ atunci valoarea principală a segmentului M″M′, zisă *deviaţiune*, are ca expresie $M''M' = \frac{1}{2} w\, dt^2$ direcţia deviaţiunei fiind aceea a acceleraţiei w. [1])

Ori aceasta este expresia spaţiului pe care l-ar parcurge punctul M în timpul dt, plecând din repaus, dacă acceleraţia w, şi deci forţa F, ar rămâne constantă în acest interval de timp. Pe de altă parte, lungimea $MM'' = vdt$, reprezintă spaţiul pe care l-ar parcurge punctul M dacă ar exista singur în spaţiu.

Putem deci zice că *efectul forţei* F *considerată ca constantă în timpul* dt, *este acela de a deplasa punctul* M, *din mişcarea sa rectilină şi uniformă de pe tangentă, de cantitatea* M″M′ *egală cu deviaţiunea.*

Inţelegem acum, motivul denumirei de deviaţiune ce s'a dat segmentului M″ M′.

Notă. Să observăm că deviaţiunea fiind egală cu $\frac{1}{2} w\, dt^2$ este un infinit mic de ordinul al doilea, pe când deplasarea elementară MM″ de pe tangentă este un infinit mic de ordinul întâi. In

---

[1]) *Cinematica*, pag. 61.

intervalul de timp dt, efectul forţei asupra deplasării punctului este prin urmare mult mai mic decât acela datorit vitezei din punctul M.

II. DETERMINAREA VALORII NUMERICE A MASSELOR ŞI A FORŢELOR. DESPRE OMOGENITATE ŞI SIMILITUDINE MECANICĂ.

1. **Echilibru.** Să presupunem că un punct material M este supus influenţii unui sistem de mai multe alte puncte materiale, care îi comunică astfel de acceleraţii încât suma geometrică a acestora este nulă. In asemenea condiţii punctul îşi va păstra mai departe starea lui de repaus sau de mişcare rectilină şi uniformă. Forţele corespunzătoare acceleraţiilor vor avea şi ele o sumă geometrică tot nulă şi se va zice că ele îşi fac echilibru.

2. **Greutate şi atracţiune terestră.** Experienţa dovedeşte că un punct material abandonat în vid, dela înălţimi mici şi fără viteză iniţială, ia în căderea lui, faţă de pământ, o mişcare rectilină, uniform variată. Direcţia căderii ne dă ceea ce numim verticala locului. Dacă însemnăm prin m massa punctului şi prin g valoarea acceleraţiei, forţa care produce mişcarea este $p=mg$ şi i se dă numele de *greutate*.

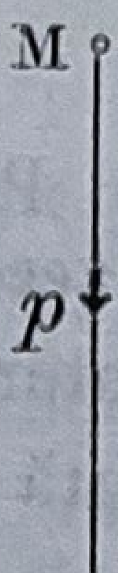


Fig. 8

Dacă punctul, în loc de a fi lăsat să cadă, este ţinut de un fir vertical, el stă în repaus relativ. Mişcarea lui se găseşte împedecată de tracţiunea firului, care potrivit principiului acţiunii şi reacţiunii este egală cu forţa care în căderea liberă dă punctului acceleraţia g. *Greutatea este deci o forţă egală şi direct opusă acestei tracţiuni.*

In presupunerea că pământul ar sta nemişcat, punctul material susţinut de fir ar fi în echilibru sub acţiunea tracţiunii firului şi a *atracţiunii terestre* datorită substanţii pământului. Această atracţiune ar fi deci egală cu greutatea punctului.

Mişcarea pământului dă însă punctului o mişcare ce nefiind rectilină şi uniformă se execută cu o acceleraţie care nu este nulă. In consecinţă, cele două forţe care lucrează asupra punctului, adică tracţiunea firului şi atracţiunea terestră, nu-şi fac echilibru, aşa că în realitate *greutatea diferă de atracţiune*. Diferenţa este însă foarte mică şi poate fi neglijată. Vom vedea în adevăr mai târziu că un punct material, căzând în vid dela o mică înălţime, ia în raport cu pământul aceiaşi mişcare ca şi cum pământul ar sta nemişcat şi punctul ar fi solicitat de greutatea sa.

Greutatea este o forţă susceptibilă de măsurătoare şi aceasta prin măsurarea alungirei pe care o ia un fir spiral sub acţiunea ei.

3. **Cele trei unităţi fundamentale.** In Geometrie se întrebuinţează o singură unitate fundamentală, *unitatea de lungime*, din care derivă unităţile de suprafaţă şi de volum.

In Cinematică, ne servim de două unităţi fundamentale: *unitatea de lungime* şi *unitatea de timp*, din care se deduc unităţile întrebuinţate pentru măsurarea vitezelor şi acceleraţiilor.

In sfârşit în Dinamică, pe lângă *unitatea de lungime* şi *unitatea de timp*, avem nevoe de o a treia care poate fi ori *unitatea de massă*, ori *unitatea de forţă*. Deci două sisteme diferite de unităţi. In cel dintâi, unitatea de forţă derivă din unitatea de massă, pe când în cel de al doilea unitatea de massă derivă din unitatea aleasă pentru forţă.

Primul sistem. ***Unitate de massă.*** In acest sistem se precizează mai întâi valoarea numerică a masselor. Acestea se pot determina cu o balanţă, graţie faptului dovedit de experienţă că într'un acelaşi loc al pământului, toate punctele materiale execută căderea lor cu aceiaşi acceleraţie şi au deci massele proporţionale greutăţilor, potrivit formulei $p = mg$ în care g este acelaşi ori care ar fi punctul sau corpul material considerat.

Faptul în chestiune nu poate fi stabilit prin aplicaţia

principiilor fundamentale, căci nici unul din aceste principii nu conduce la el. De altfel, nu constatăm noi, spre exemplu, că ferul care este mai uşor decât platina este mai puternic atras de un magnet, cu alte cuvinte că acceleraţia pe care o dă acţiunea magnetului asupra ferului este mai mare decât aceea pe care o dă aceiaşi acţiune asupra platinei, deşi platina este mai grea?

Tot astfel, atracţia pământului ar putea da ferului o acceleraţie diferită decât aceia pe care o dă platinei. După cum am spus însă, experienţa dovedeşte că formula $p = mg$ se aplică, într'un acelaşi loc, tuturor punctelor materiale, ori care ar fi massele lor, luând pentru g aceiaşi valoare. In particular la Bucureşti, *valoarea lui g este egală cu 9,805* metri pe secundă. Ea variază cu latitudinea locului şi cu altitudinea. La Paris $g = 9,808$.

Massele fiind proporţionale greutăţilor, se vor compara între ele ca şi greutăţile. Unitatea de massă poate fi aleasă în mod arbitrar. In sistemul zis C. G. S, în care unitatea de lungime este centimetrul şi unitatea de timp secunda sexagesimală, se ia ca unitate de massă, massa unui c. m. c. de apă distilată, la temperatura de $+4$ grade Celsius, când densitatea apei este maximă. Această unitate este zisă *gram-massă*. Un corp material care pe o balanţă ţine în echilibru m centimetri cubi de apă, va avea massa egală cu m.

Dacă în formula generală $F = mw$, facem $m = 1$ şi $w = 1$, valoarea lui F devine egală cu 1. Deci în sistemul C. G. S. unitatea de forţă zisă *dină*, este forţa care lucrând asupra unui c. m. c. de apă îi dă o acceleraţie egală cu 1 centimetru linear.

Greutatea unui c. m. c. de apă corespunde la ceeace numim *gram*. Rezultă, că la Bucureşti, greutatea de un gram este egală cu 980,5 dine, căci această greutate comunică massei de 1 cm^3 de apă o acceleraţie egală cu 9,805 metri, adică 980,5 centimetri.

Al doilea sistem. Unitate de forţă. In aplicaţiunile Mecanicei, cel mai utilizat dintre sisteme este sistemul zis M. K. S. în care unitatea de lungime este metrul, unitatea de timp secunda, iar unitatea de forţă kilogramul, adică greutatea, într'o

localitate, măsurată cu un resort spiral a unui decimetru cub de apă distilată, la temperatura + 4° Celsius.

Acest sistem nu are invariabilitatea celui precedent deoarece greutatea unui d. m. c. de apă variază cu latitudinea localității unde se face măsurătoarea. Astfel dacă suspendăm unui resort spiral vertical un decimetru cub de apă la Paris, resortul se întinde ceva mai mult decât s'ar întinde la Bucureşti sub acţiunea aceleiaşi cantităţi de apă. Se înţelege dar, că pentru o ţară oarecare, unitatea de forţă va fi prin convenţiune greutatea unui d. m. c. de apă determinată într'o regiune centrală a ţării sau în capitala ei, căci nu se determină valoarea lui g în toate punctele ţării.

In sistemul M.K.S. massa unui corp este $m = \frac{p}{g}$. Dacă facem $p = g$ avem $m = 1$. Deci unitatea de massă este massa unui corp a cărui greutate într'o localitate este exprimată prin acelaşi număr ca acceleraţia datorită greutăţii în aceea localitate. La Bucureşti, g fiind egal cu 9,805 metri, unitatea de massă este massa unui corp de greutate egală cu 9,805 kilograme, adică massa a 9,805 decimetri cubi de apă.

Notă. Din cele ce precedă rezultă că greutăţile, utilizate în comerţ la măsurătorile cu balanţa, nu sunt greutăţi propriu zise, ci masse. Un litru de apă echilibrează în toate punctele globului pământesc aceiaşi greutate de 1 kg. de fer ce-i corespunde.

4. **Măsurarea forţelor.** Forţele se măsoară cu dinamometrul adică cu un resort spiral, legând una din extremităţile resortului de un stâlp sau de o grindă fixă şi făcând să acţioneze forţa la cealaltă extremitate a resortului. Dacă gradăm întinderea resortului pentru greutăţi de 1, de 2 kg., etc. se înţelege că un asemenea resort ne va da în kg. intensitatea oricărei forţe [1]).

Un dinamometru gradat la Paris, dă aceiaşi indicaţie şi la Bucureşti, pentru aceiaşi forţă, însă nu şi pentru greutatea aceleiaşi masse, spre ex. pentru greutatea massei de 1 d. m. c.

---

[1]) In mod dinamic, forţa F care acţionează un punct de massă m având ca expresie $F = m w$, se determină măsurându-se acceleraţia w.

de apă. Rezultă, că dacă voim să evaluăm forţele în kilogramele care corespund unei localităţi, trebue să gradăm dinamometrul potrivit kilogramului ce corespunde localităţii.

Dacă măsurăm cu un dinamometru intensitatea forţei F care acţionează un punct material şi o substituim în relaţiunea $F = mw$, atunci această relaţiune fundamentală a Dinamicei nu mai reprezintă o simplă identitate ci o egalitate între o valoare măsurată experimental şi productul mw.

Să presupunem că cunoaştem valorile lui F pe tot timpul mişcării unui punct şi să însemnăm prin X, Y şi Z proecţiile sale pe 3 axe cordonate. Cum forţa F are aceiaşi direcţie şi acelaşi sens ca acceleraţia w, egalitatea $F = mw$ ne dă în proecţiune pe axe:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

care vor fi ecuaţiile mişcării punctului.

5. **Despre omogenitate.** Mărimile ce se întâlnesc în Mecanică se exprimă numeric, în funcţie de unităţile fundamentale de lungime, de timp şi de massă, prin expresiuni monoame de forma $L^\alpha T^\beta M^\gamma$ în care L, T şi M reprezintă respectiv o lungime, un timp şi o massă, măsurate cu ajutorul unităţilor alese, iar α, β şi γ sunt exponenţi numerici independenţi de alegerea unităţilor. Aceşti exponenţi se numesc *dimensiuni* ale mărimei considerate.

Iată dimensiunile mărimilor ce am întâlnit până acum:

Lungime L
Suprafaţă . . . . L^2
Volum . . . . L^3
Timp . . . . T
Viteză: $V = \frac{L}{T}$ . . . . LT^{-1}
Acceleraţie : $w = \frac{V}{T}$ . . . . . . LT^{-2}
Massă . . . . M
Forţă: $F = Mw$ . . . . $LT^{-2}M$
Momentul unei forţe: F.L . . . $L^2T^{-2}M$

Raportul a două mărimi de aceiaşi natură nu are dimensiuni, acesta fiind un număr. Astfel un unghiu θ, fiind raportul a două lungimi, nu are nici o dimensiune. In consecinţă, dimensiunile vitezei unghiulare şi ale vitezei areolare sunt:

Viteză unghiulară $\omega = \frac{\theta}{T}$ . . . . T^{-1}

Viteza areolară $v = r^2\omega$ . . . $L^2\ T^{-1}$

Dacă luăm o unitate de lungime de p ori mai mică, o unitate de timp de q ori mai mică şi o unitate de massă de r ori mai mică, o expresiune de forma $L^\alpha . T^\beta . M^\gamma$ va deveni $(Lp)^\alpha . (Tq)^\beta . (Mr)^\gamma$ adică $(L^\alpha . T^\beta . M^\gamma).(p^\alpha . q^\beta . r^\gamma)$.

Ori, ecuaţiile de Mecanică trebue să subsiste ori care ar fi sistemul de unităţi fundamentale, adică să aibe loc, pentru ori ce valori atribuite factorilor p, q, şi r. Condiţia necesară şi suficientă, pentru aceasta, este ca ecuaţia să poată fi pusă sub astfel de formă ca ea să nu conţină decât raporturi de lungimi, raporturi de timpuri şi raporturi de masse, căci atunci factorii în chestiune se elimină.

Această observaţie poate servi la verificarea exactităţii calculelor. Ea ne mai permite în multe cazuri să stabilim, à priori, fără alt raţionament, structura formulelor.

a). *Verificarea unei formule.* T fiind durata oscilaţiunei infinit de mici a unui pendul simplu de lungime l, într'un loc unde acceleraţia datorită gravităţii este g, avem, după cum se va vedea mai târziu

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dacă schimbăm de unităţi, ca mai sus, obţinem:

$$Tq = \pi \sqrt{\frac{lp}{gpq^{-2}}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}\, q^2} = q\, \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

formula este deci omogenă.

b). *Stabilirea structurei unei formule.* Să admitem că durata T a oscilaţiilor unui pendul depinde numai de lungimea l a pendulului, de massa m a greutăţei suspendate, de acceleraţia g a greutăţei şi de unghiul de pornire iniţială α. Potrivit aces-

tei presupuneri putem scrie $f(T, l, m, g, \alpha) = o$, f fiind o funcţiune pe care ne propunem de a o preciza.

In conformitate cu principiul omogenităţii, massa m nu poate să figureze în ecuaţie. Apoi cele două cantităţi l şi g, care sunt de gradul întâi în raport de lungimi, nu pot să intervină decât prin raportul lor $\frac{g}{l}$. Aşa dar

$$f\left(T, \frac{g}{l}, \alpha\right) = o.$$

Ori, T este un timp iar $\frac{g}{l}$ este inversul patratului unui timp. Pentru ca relaţia să fie independentă de timp trebue ca T şi $\frac{g}{l}$ să fie asociaţi sub forma $\frac{g}{l}T^2$, ceea ce reduce ecuaţia la forma

$$f\left(\frac{g}{l}T^2, \alpha\right) = o$$

sau, rezolvind în raport de T,

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \varphi(\alpha)$$

şi nu mai rămâne astfel decât de a găsi funcţiunea $\varphi(\alpha)$ de unghiul α, ceea ce vom face mai târziu.

6. **Despre similitudine mecanică.** Consideraţiile de mai sus servesc de bază şi la teoria similitudinei în Mecanică. Pentru ca două sisteme mecanice să poată fi privite ca asemenea, trebue ca să se poată trece dela unul la altul înmulţind toate lungimile printr'un acelaşi factor p, toate timpurile prin q, toate massele prin r, vitezele prin pq^{-1}, acceleraţiile prin pq^{-2} şi forţele prin $pq^{-2}r$.

III. TRAVALIUL FORŢELOR.

1. **Travaliu elementar.** *Se numeşte travaliu elementar al unei forţe, productul intensităţii acestei forţe cu deplasarea infinit de mică a punctului ei de aplicaţie şi cu cosinusul unghiului coprins între direcţia forţei şi aceea a deplasării:*

$$d\mathfrak{T} = F.\ ds.\ \cos(F, ds) \quad \text{sau} \quad d\mathfrak{T} = F\ ds\ \cos\alpha$$

ds fiind mărimea geometrică MM′ socotită pe tangenta din M în sensul deplasării punctului.

Travaliul astfel definit este o mărime susceptibilă de semn care va fi + sau — după cum forţa şi deplasarea vor face între ele un unghiu ascuţit sau obtus.

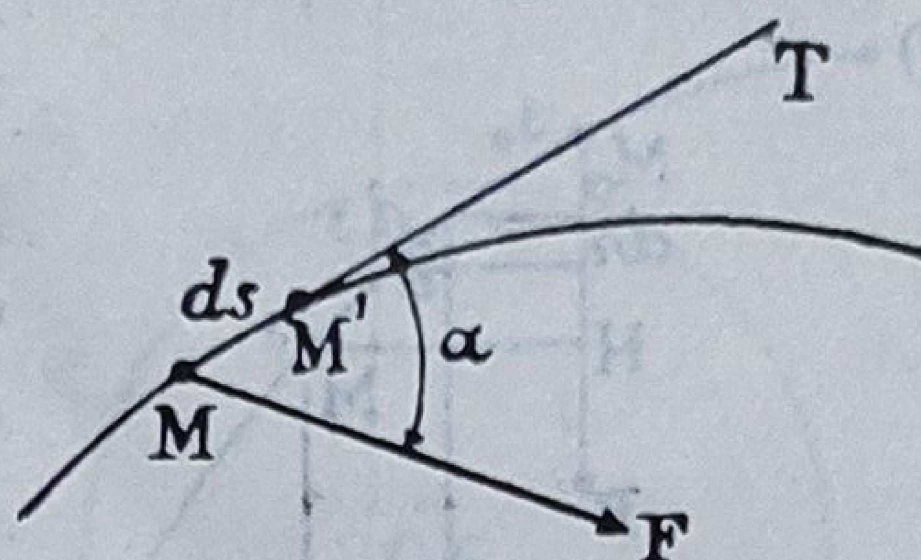


Fig 9.

Scriind travaliul sub forma $F.ds \cos\alpha$ sau sub forma $ds.\ F \cos\alpha$ vedem că putem defini travaliul elementar ca fiind *productul forţei cu proecţia deplasării pe direcţia forţei* sau ca *productul deplasării cu proecţia forţei pe direcţia deplasării.*

Travaliul elementar este nul, dacă direcţia forţei este perpendiculară pe aceea a deplasării.

Definiţia travaliului elementar se aplică la orice forţă care lucrează asupra unui punct, iar nu după cum s'ar putea crede, numai la rezultanta forţelor care determină mişcarea efectivă a punctului.

2. **Travaliu total.** Să considerăm o deplasare finită a punctului de aplicaţie a unei forţe şi să dividem arcul parcurs în elemente infinit de mici. Suma travaliurilor elementare corespunzătoare acestor deplasări infinit de mici, constitue ceeace se numeşte *travaliul total* al forţei. Aşa dar travaliul total al forţei F dela M_0 la M are ca expresie

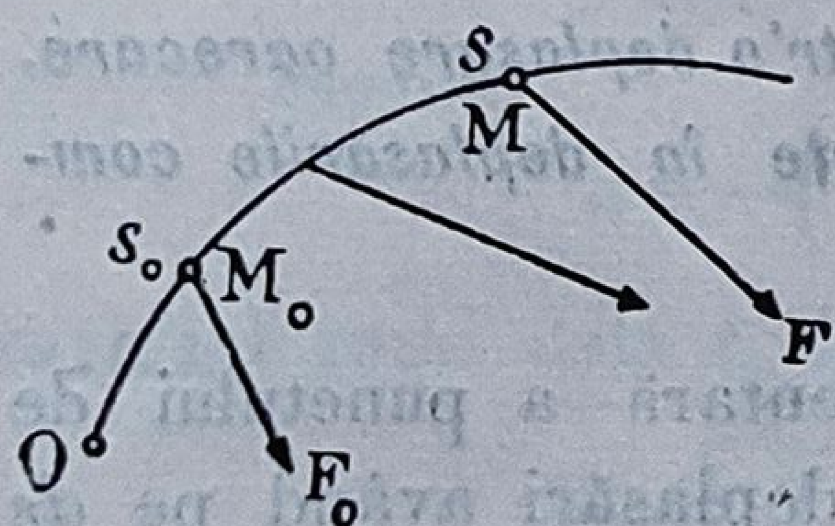


Fig. 10

$$\mathfrak{T} = \int_{s_0}^{s} F \cos\alpha.\ ds.$$

Integraţiunea se face imediat când forţa este constantă. Avem atunci (fig.11)

$$\mathfrak{T} = F \int_{s_0}^{s} \cos\alpha\ ds = F \int_{M_0}^{H} dh = F.\ M_0H$$

adică: *travaliul total al unei forţe constante este egal cu productul intensităţii forţei cu proecţiunea pe direcţia forţei a drumului parcurs.* Travaliul nu depinde prin urmare de forma curbei dintre M_0 şi M.

Astfel, *travaliul greutăţii, într'o deplasare oarecare a punctului M, este egal cu greutatea înmulţită cu deplasarea verticală a punctului, travaliul fiind pozitiv dacă deplasarea totală corespunde unei coboriri şi negativ în cazul contrariu.*

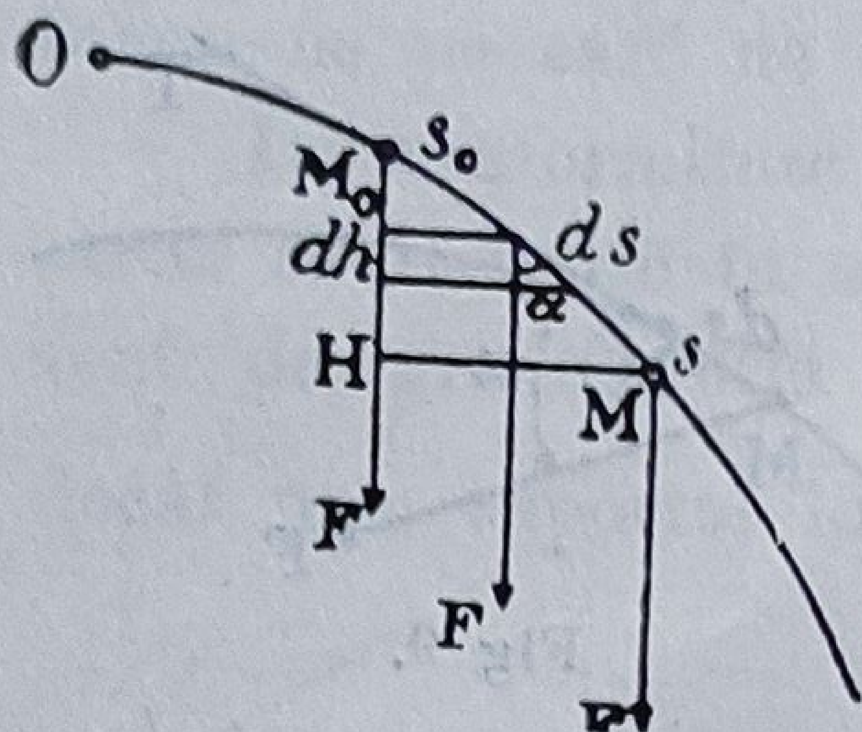


Fig. 11

Travaliul forţelor este o mărime care joacă un rol de o importanţă capitală în teoriile Mecanicei raţionale şi a Mecanicei aplicată la Fizică.

3. **Teorema I.** ***Travaliul unei forţe, pentrn o deplasare oarecare, este egal cu suma travaliurilor componentelor forţei pentru aceiaşi deplasare.***

Fie F o forţă, F_1, F_2, F_3, ..., componentele ei şi ds o deplasare elementară a punctului de aplicaţie. Proecţia rezultantei pe direcţia deplasării fiind egală cu suma proecţiilor componentelor, avem:

$$F \cos(F, ds) = F_1 \cos(F_1, ds) + F_2 \cos(F_2, ds) + \dots$$

şi înmulţind ambii membri cu ds, deducem:

$$F \cos(F, ds)\, ds = F_1 \cos(F_1, ds)\, ds + F_2 \cos(F_2, ds)\, ds + \dots$$

Această relaţie ne dă demonstraţia teoremei pentru travaliul elementar. Luând integrala, obţinem demonstraţia pentru travaliul total.

4. **Teorema II.** ***Travaliul unei forţe într'o deplasare oarecare, este egal cu suma travaliurilor acestei forţe în deplasările componente.***

Fie F o forţă, ds o deplasare elementară a punctului de aplicaţie şi ds_1, ds_2, ds_3, ..., diverse deplasări având pe ds ca rezultantă.

Proectând pe ds_1, ds_2, ..., şi pe ds pe direcţia lui F, avem

$$ds \cos(F, ds) = ds_1 \cos(F, ds_1) + ds_2 \cos(F, ds_2) + \dots$$

Inmulţind ambii membri cu F şi apoi integrând, avem demonstraţia teoremei.

5. **Teorema III.** *Travaliul unei forțe într'o mișcare elementară de rotație, este egal cu momentul forței în raport cu axul de rotație, înmulțit cu deplasarea unghiulară.*

Fie o rotație în jurul unui ax proectat în O și o forță F aplicată în M. Duc planul proectant al forței și în acest plan descompun pe F într'o forță F_1 perpendiculară în M pe planul figurei și în forța F_2 din plan. Travaliul forței F_1 este nul. Forța F_2 se poate descompune în componentele f_n și f_t. Travaliul componentei f_n este și el nul. Rămâne travaliul lui f_t care este egal cu $f_t \cdot ds$ adică cu $f_t \cdot r\, d\theta$. Ori $f_t \cdot r$ este momentul forței F în raport de axul O (nu în raport de punctul O). Deci

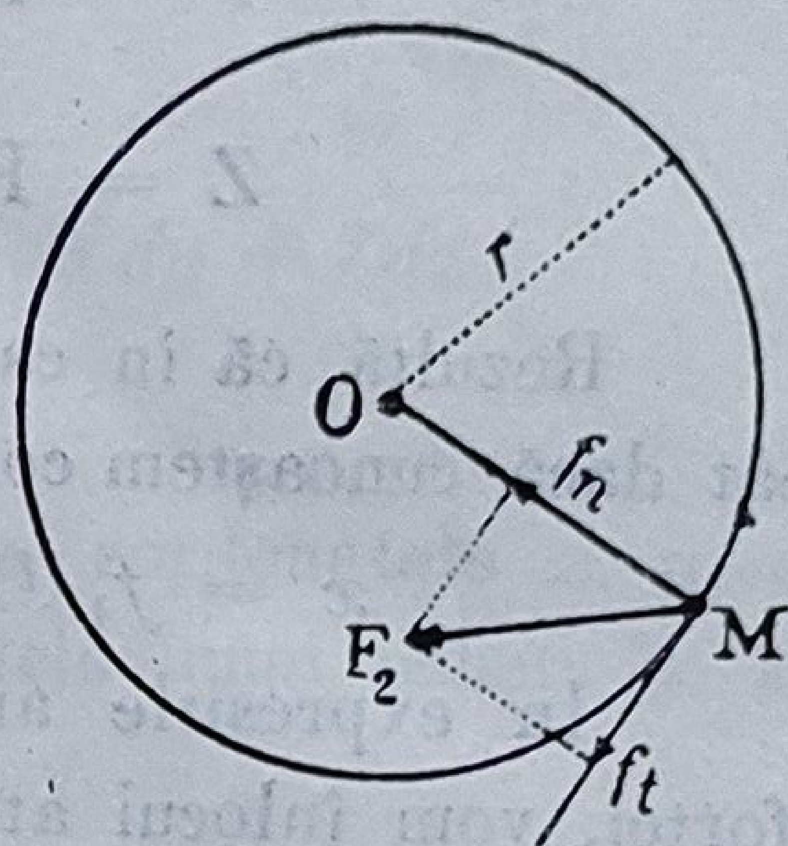


Fig. 12

$$d\mathfrak{T} = \text{Mom. F} \times d\theta\,.$$

6. **Expresia analitică a travaliului în cordonate dreptunghiulare.** Travaliul elementar fiind

$$d\mathfrak{T} = F\, ds \cos(F, ds)$$

vedem că el corespunde productului interior al vectoarelor F și ds[1]. Rezultă imediat, că dacă însemnăm prin X, Y, Z proecțiile forței și prin dx, dy, dz proecțiile diferențialei ds pe trei axe cordonate dreptunghiulare, avem:

$$d\mathfrak{T} = X dx + Y dy + Z dz.$$

Scriind

$$d\mathfrak{T} = \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}\right) dt$$

travaliul total dela t_0 la t va avea ca expresie analitică

$$\mathfrak{T} = \int_{t_0}^{t} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}\right) dt.$$

In general, componentele X, Y, Z ale forței sunt funcții de timp, de cordonatele punctului mobil și de proecțiile vitezei sale, adică

---

[1]) *Cinematica*, pag. 23.

$$X = F_1 \left(t;\ x,\ y,\ z;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)$$

$$Y = F_2 \left(t; \ldots ; \ldots \ldots \right)$$

$$Z = F_3 \left(t; \ldots ; \ldots \ldots \right)$$

Rezultă, că în cazul general nu putem calcula travaliul decât dacă cunoaştem complect mişcarea punctului, adică dacă se dă

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

In expresiile analitice ale componentelor X, Y, Z ale forţei, vom înlocui atunci pe x, y, z şi derivatele lor în funcţie de t şi calculul travaliului total se va efectua printr'o cuadratură.

7. **Caz particular.** *Forţa nu depinde decât de poziţia mobilului.* In asemenea caz, la fiecare sistem de valori x, y, z corespunde un sistem de valori X, Y, Z bine determinate. Deci

$$X = F_1(x, y, z), \quad Y = F_2(x, y, z), \quad Z = F_3(x, y, z)$$

funcţiile F_1, F_2, F_3 fiind funcţii uniforme de cordonate.

a). Grupul forţelor în regiunea de spaţiu unde ecuaţiile precedente au loc, constitue ceea ce se numeşte un *câmp de forţe.*

b). Se numeşte *linie de forţe* a unui câmp, o astfel de linie că în fiecare punct al ei, forţa care corespunde punctului este tangentă liniei. Se ia ca sens pozitiv, sensul încotro e îndreptată forţa.

Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de forţe sunt



Fig. 13

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

sau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X}$$

care integrate ne vor da

$$y = f(x, \alpha, \beta), \quad z = \varphi(x, \alpha, \beta)$$

α şi β fiind două constante arbitrare.

c). *Travaliul total* al forţei din câmp dela M_0 la M_1 pe o curbă (C) are ca expresiune

$$\mathcal{T} = \int_{M_0}^{M_1} Xdx + Ydy + Zdz$$

Fig. 14

în care X, Y, Z sunt funcţiuni numai de cordonatele x, y, z. Ori, putem întotdeauna exprima cordonatele unui punct M al arcului $M_0 M_1$ în funcţie de un parametru q,

$$x = f_1(q), \quad y = f_2(q), \quad z = f_3(q).$$

Deci X, Y, Z ca şi x, y, z fiind funcţii de q, rezultă

$$\mathcal{T} = \int_{q_0}^{q_1} \psi(q)\, dq$$

q_0 şi q_1 fiind valorile parametrului q care corespund punctelor M_0 şi M_1. In concluziune, *travaliul depinde numai de forma curbei* (C) iar nu şi de modul cum o parcurge mobilul, aşa că *dacă se dă curba*, calculul travaliului revine la efectuarea unei cuadraturi.

8. **Funcţie de forţe.** Să presupunem acum că proecţile X, Y, Z ale forţei sunt derivatele parţiale ale unei funcţiuni de cordonate $U(x,y,z)$, adică

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

In acest caz, forţa ca şi la n° precedent, nu depinde decât de poziţia mobilului, însă travaliul ei elementar $d\mathcal{T}$ fiind diferenţiala totală a funcţiei $U(x, y, z)$, de oarece avem

$$d\mathcal{T} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

rezultă că

$$\mathcal{T} = U_1 - U_0$$

U_0 şi U_1 fiind valorile funcţiei U pentru cordonatele x_0, y_0, z_0 şi x_1, y_1, z_1 ale punctelor M_0 şi M_1. Funcţia U ia numele

de *funcție de forțe.* [1]) Vedem astfel, că *dacă există o funcție de forțe, travaliul total dela* M_0 *la* M_1 *nu depinde decât de pozițiile acestor puncte*, adică de cordonatele lor x_0, y_0, z_0 și x_1, y_1, z_1 așa că el este acelaşi pentru toate drumurile care duc dela M_0 la M_1. În particular, el este nul, dacă punctul revine de unde a plecat, adică pentru un contur închis.

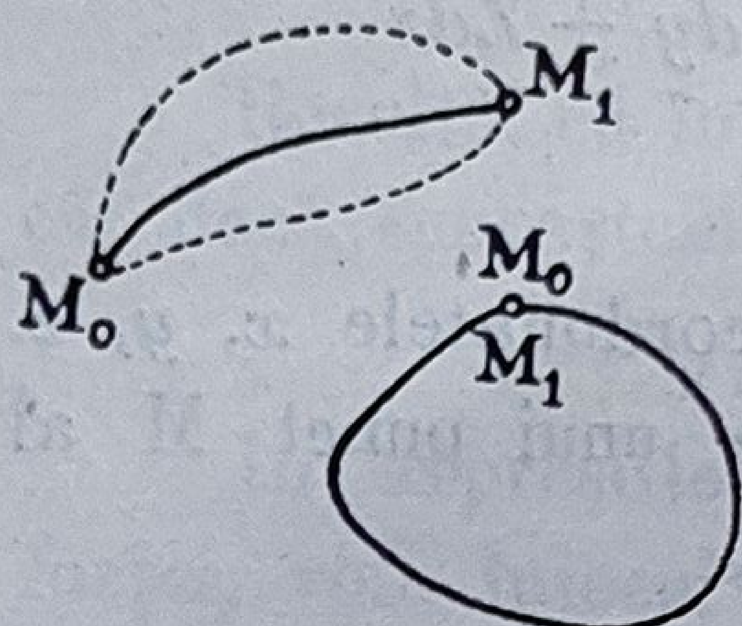


Fig. 15.

Este însă necesar pentru aceasta, ca funcția de forțe U să fie uniformă. In cazul contrariu, trebue să se urmărească variația funcției dela punctul inițial la punctul final.

Iată un exemplu. Fie $U = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$ cu presupunerea

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

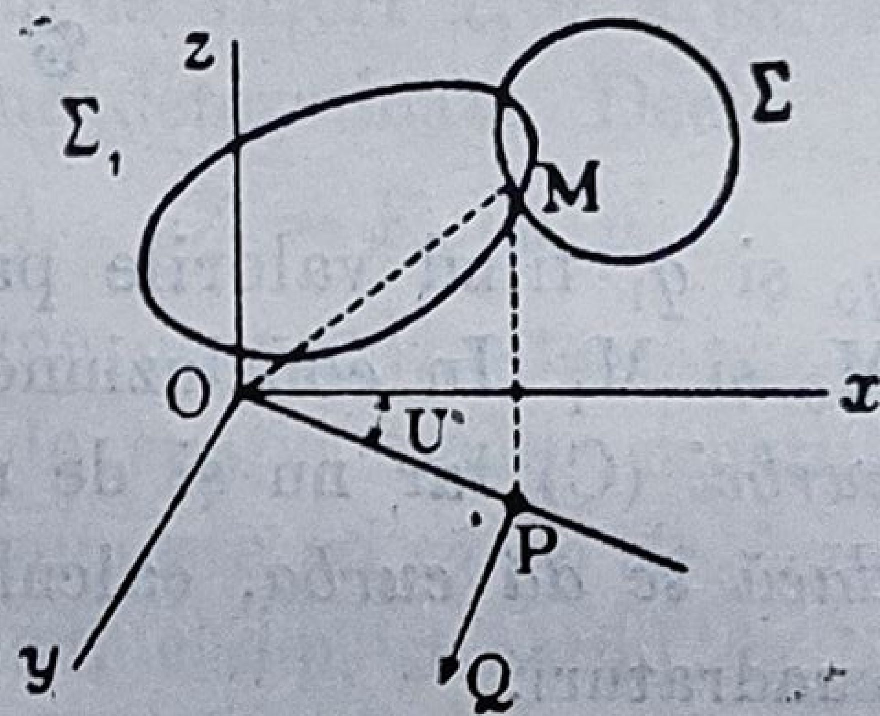


Fig. 16.

Observăm că

$$\frac{Y}{X} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

deci forța este perpendiculară pe planul zOP, adică are ca proecție orizontală segmentul PQ perpendicular pe OP. Funcția U este chiar unghiul xOP, tangenta acestui unghiu fiind $\frac{y}{x}$.

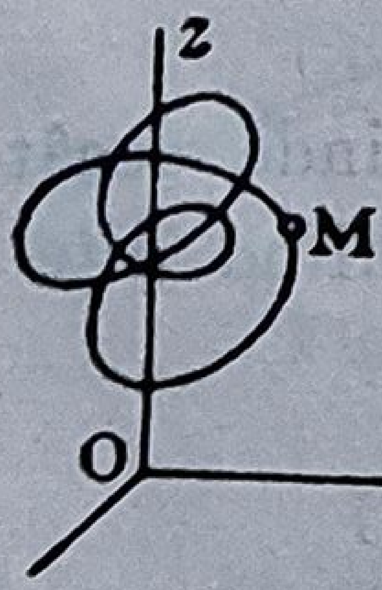


Fig. 17

Pentru conturul închis Σ, travaliul total este egal cu zero căci unghiul U revine la valoarea dela care a plecat.

Pentru conturul Σ_1 care înconjură axul Oz, travaliul este însă egal cu 2π, căci unghiul U inițial revine în M mărit cu 2π, adică

$$\mathcal{T} = (U_0 + 2\pi) - U_0 = 2\pi.$$

---

[1]) Invers, dacă travaliul elementar $d\mathcal{T}$ este diferențiala totală a unei funcții $U(x, y, z)$ atunci componentele X, Y, Z sunt derivatele parțiale ale acestei funcții, care este astfel funcția de forțe.

Dacă conturul înconjură de n ori axul Oz, travaliul total va fi egal cu $2n\pi$.

Câmpurile magnetice create de curenţi electrici prezintă particularităţi de acestea.

9. **Suprafeţe de nivel.** Dacă egalăm funcţia de forţe cu o constantă, obţinem ceea ce se numeşte o *suprafaţă de nivel.* Astfel

$$U(x, y, z) = C.$$

Prin fiecare punct al câmpului de forţe trece câte o suprafaţă de nivel. Astfel prin punctul de cordonate x_0, y_0, z_0 trece suprafaţa de nivel

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0)$$

valoarea constantei C fiind atunci egală cu $U(x_0, y_0, z_0)$.

a). *Forţa este perpendiculară în* M *suprafeţei de nivel ce trece prin acest punct.*

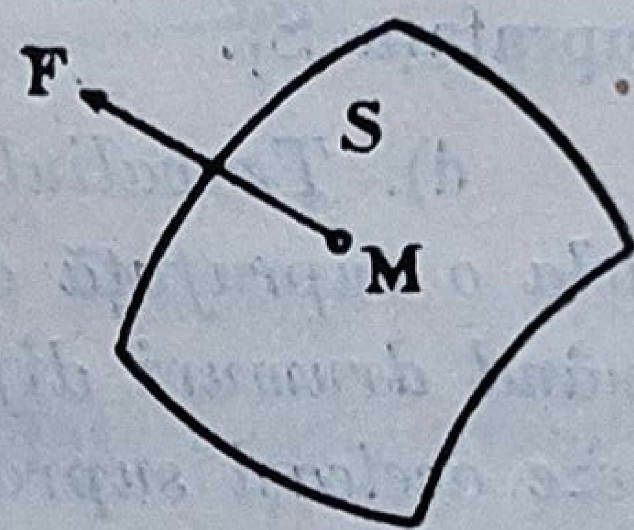


Fig. 18

Fie $U(x, y, z) = C$ suprafaţa de nivel care trece printr'un punct M. Cosinusurile directoare ale forţei aplicate în M, sunt proporţionale cu X, Y, Z adică cu $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Ori, aceste derivate parţiale sunt proporţionale cu cosinusurile directoare ale normalei în M la suprafaţa de nivel care trece prin acest punct. Deci forţa F este normală suprafeţii.

b). *Forţa este îndreptată în sensul încotro creşte funcţia de forţe.* Fie S şi S_1 două suprafeţe de nivel infinit vecine, suprafaţa S trecând prin punctul M şi corespunzând ecuaţiei

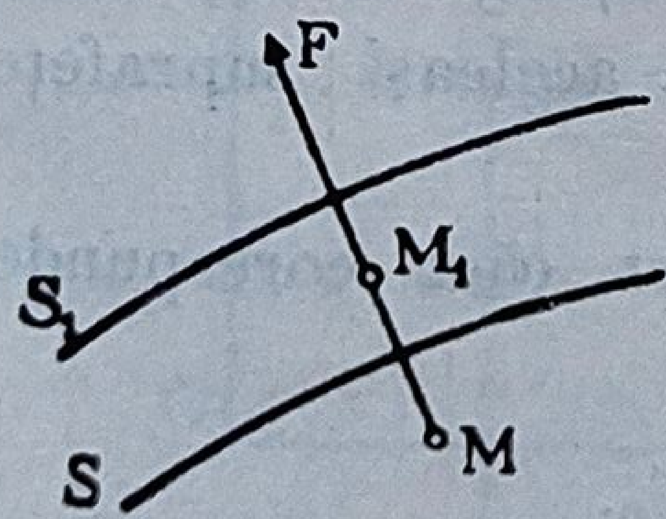


Fig. 19

$$U(x, y, z) = C$$

iar suprafaţa S_1 corespunzând ecuaţiei

$$U(x, y, z) = C + dC$$

în care să presupunem că dC este pozitiv, pentru ca funcţia U să crească atunci când se trece dela S la S_1.

Pe normala în M la suprafaţa S să considerăm punctul M_1 unde această normală întâlneşte pe S_1. Travaliul forţei F

pentru deplasarea elementară MM_1 este $\pm$ F. MM_1 după cum sensul forţei este MM_1 sau M_1M. Insă acest travaliu este egal cu dC care reprezintă creşterea elementară a funcţiei U când trecem de la S la S_1. Creşterea dC fiind prin ipoteză pozitivă, vom avea deci $+ F. MM_1 = dC$ ceeace însemnează că forţa are sensul MM_1.

c). *In ori-ce punct* M *al unei suprafeţe de nivel, forţa este invers proporţională distanţei pe normală dela* M *la suprafaţa de nivel infinit vecină.*

Din egalitatea $F. MM_1 = dC$ deducem

$$F = \frac{dC}{MM_1}.$$

Ori, dC este acelaşi pentru toate punctele suprafeţii S_1. Deci, oricare ar fi punctul M de pe suprafaţa S, forţa care trece prin acest punct este invers proporţională distanţei dela M la suprafaţa S_1.

d). *Travaliul total este acelaşi pentru mobilele care pleacă dela o suprafaţă de nivel* S_0 *şi ajung la o alta* S_1, *deşi urmând drumuri diferite, dar cu condiţia ca mobilele să traverseze aceleaşi suprafeţe şi în aceiaşi ordine.* In adevăr, travaliul elementar fiind egal cu creşterea dC a funcţiei de forţe, este acelaşi pentru orice parcurs elementar de la o suprafaţă de nivel la o suprafaţă infinit vecină. Travaliul total este prin urmare şi el independent de drumurile ce parcurg mobilele care pleacă dela S_0 şi ajung la S_1, dacă mobilele traversează aceleaşi suprafeţe şi în aceiaşi ordine.

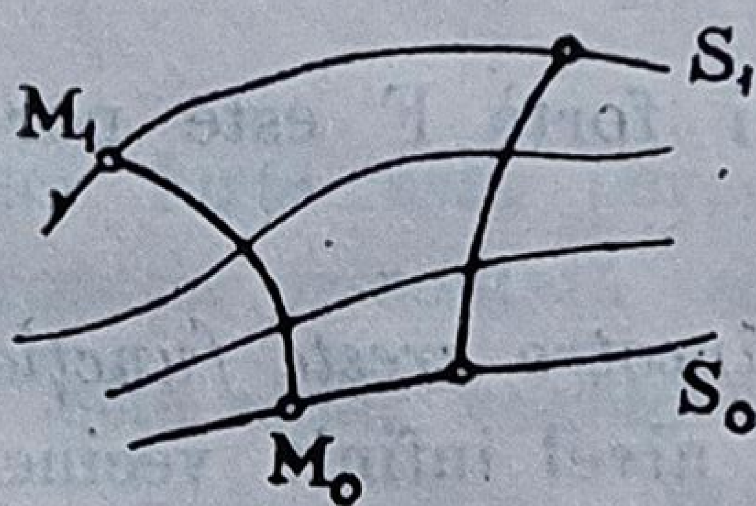


Fig. 20

In esenţa lui, acest fapt ne era cunoscut, căci corespunde celor două formule ştiute

$$d\mathcal{T} = dC \quad \text{şi} \quad \mathcal{T} = C_1 - C_0.$$

Precizarea de faţă are unicul scop de a face să se înţeleagă cum trebuesc luate parcursurile mobilelor pentru ca travaliul să rămână acelaşi.

Dacă revenim la exemplul deja considerat

$$U = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$$

vedem că suprafeţele de nivel sunt suprafeţele

$$\text{arctg}\,\frac{y}{x} = C$$

adică semiplanurile $\frac{y}{x} = tg\,C$ care trec toate prin axul Oz. Când punctul M descrie conturul închis Σ_1 el nu traversează aceleaşi suprafeţe ca în cazul când descrie conturul Σ şi înţelegem astfel mai bine dece travaliurile nu pot fi egale unul cu altul.

e). *Liniile de forţe sunt traectoriile ortogonale ale suprafeţelor de nivel.* Aceasta se înţelege imediat deoarece tangentele liniilor de forţe coincid cu direcţiile însăşi ale forţelor şi acestea sunt normale suprafeţelor de nivel.

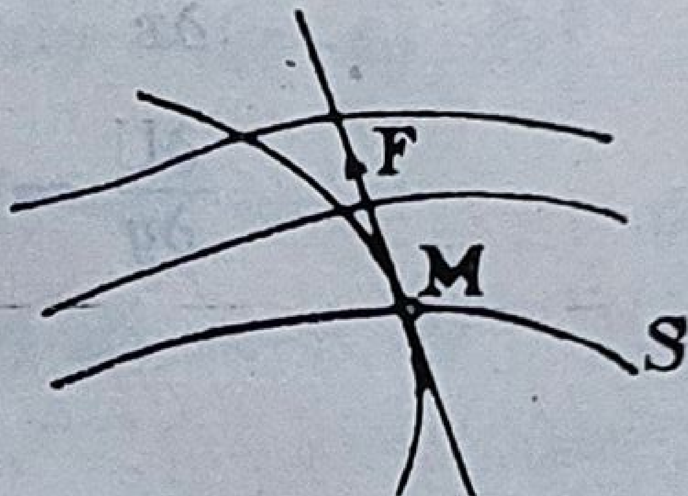


Fig. 21

10. Exemple de forţe care admit o funcţie de forţe.

a). *Forţă constantă.* Astfel este cazul greutăţei. Dacă luăm axul Oz vertical şi îndreptat în sus, avem

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = -mg$$

deci funcţia de forţe este

$$U = -mgz + \text{const.}$$

b). *Forţă perpendiculară la un plan fix şi funcţie de distanţa dela mobil la plan.* Luând planul fix drept plan xOy, avem

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = \varphi(z).$$

Se vede imediat că funcţia de forţe este

$$U = \int \varphi(z)\,dz = f(z) + \text{const.}$$

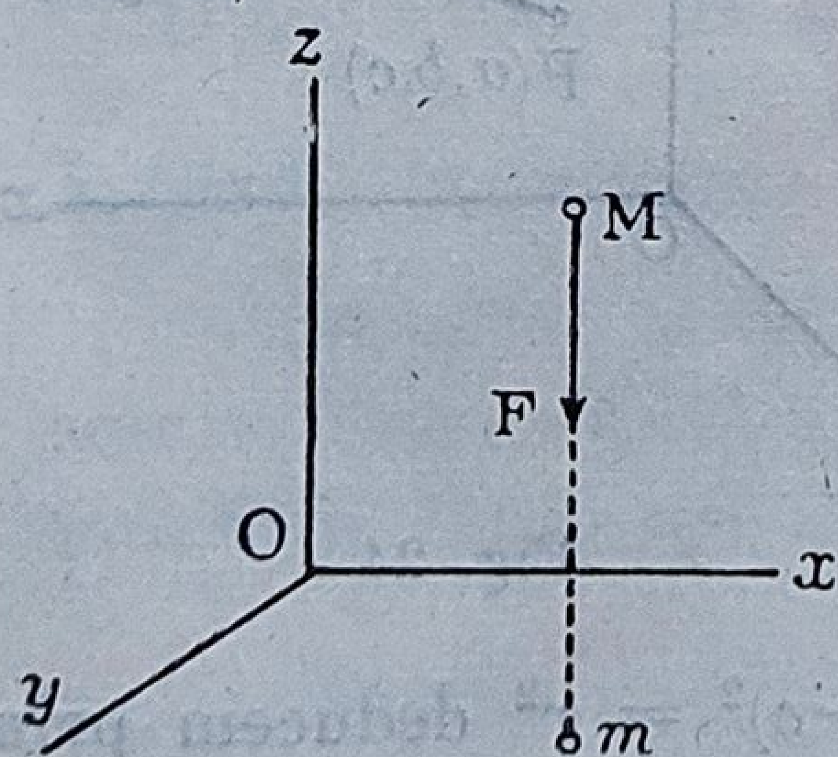


Fig. 22

Suprafeţele de nivel sunt $z = C$, adică planuri paralele cu xoy. Liniile de forţe sunt drepte paralele cu Oz.

c). *Forţă perpendiculară pe o dreaptă fixă şi funcţie de distanţa mobilului la dreaptă.* Luând dreapta fixă drept ax Oz, însemnând

prin r distanţa mobilului la dreaptă şi prin $\varphi(r)$ valoarea forţei, avem

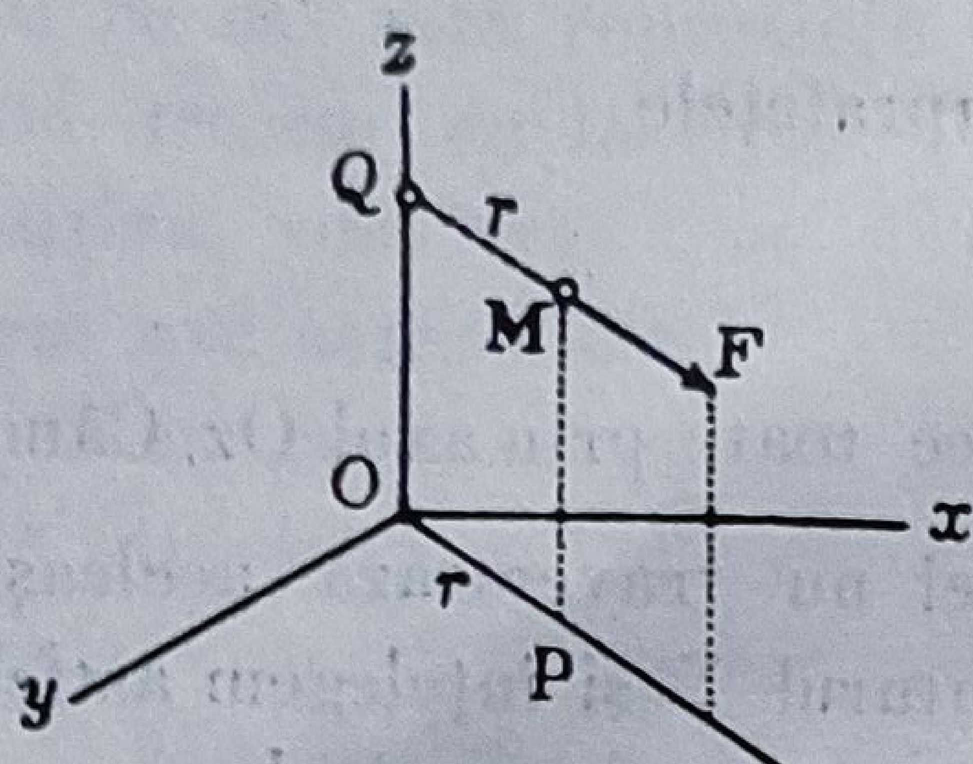


Fig. 23

$$X = \frac{x}{r}\varphi(r), \quad Y = \frac{y}{r}\varphi(r), \quad Z = o.$$

Funcţia de forţe este

$$U = \int \varphi(r)\, dr = f(r) + \text{const.}$$

căci relaţia $x^2 + y^2 = r^2$ ne dă

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$$

şi prin urmare

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}\varphi(r) = X$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}\varphi(r) = Y$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = o = Z.$$

Suprafeţele de nivel, $f(r) = C$, sunt cilindrii de revoluţie $r = \text{const.}$ iar liniile de forţe sunt perpendicularele MQ duse axului Oz.

d). *Forţă centrală, funcţie de distanţa mobilului la centrul fix.* Fie P centrul fix, de cordonate a, b, c şi M punctul mobil în care lucrează o forţă F îndreptată pe direcţia MP.

Insemnând prin r distanţa dela P la M şi prin $\varphi(r)$ valoarea forţei F, avem

$$X = \frac{x-a}{r}\varphi(r), \quad Y = \frac{y-b}{r}\varphi(r), \quad Z = \frac{z-c}{r}\varphi(r).$$

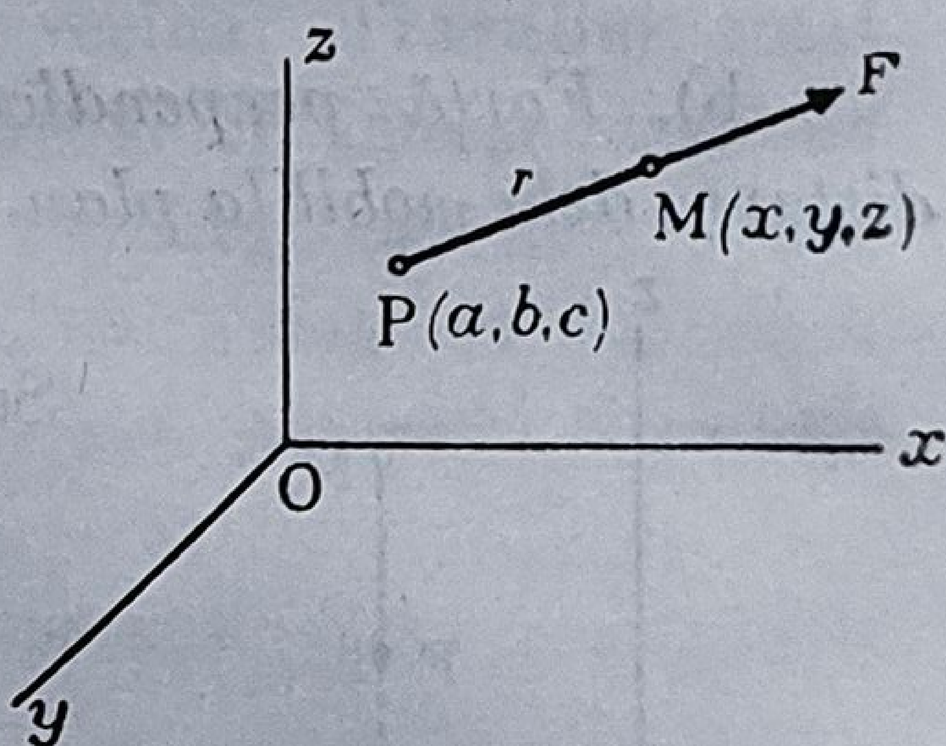


Fig. 24

Funcţia de forţe este ca şi la n° precedent

$$U = \int \varphi(r)\, dr = f(r) + \text{const.}$$

căci din relaţia $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ deducem prin derivare

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y-b}{r}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{z-c}{r}$$

aşa încât

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{r} \varphi(r) = X$$

şi în mod analog

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y-b}{r} \varphi(r) = Y, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z-c}{r} \varphi(r) = Z.$$

Travaliul elementar $d\mathfrak{T}$ al forţei F fiind egal cu dU are ca expresie $\varphi(r)\, dr$. Avem în adevăr

$$d\mathfrak{T} = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$$

adică

$$d\mathfrak{T} = \frac{\varphi(r)}{r} \left[(x-a)\; dx + (y-b)\; dy + (z-c)\; dz\right]$$

şi, cum relaţia $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ ne dă

$$(x-a)\; dx + (y-b)\; dy + (z-c)\; dz = r\; dr$$

rezultă în adevăr că

$$d\mathfrak{T} = \varphi(r)\; dr.$$

Suprafeţele de nivel, $r =$ const. sunt sfere descrise din P ca centru. Liniile de forţe sunt razele duse din P.

Dacă, în particular, punctul M este atras de centrul P cu o forţă invers proporţională patratului distanţei r, avem $F = \frac{k}{r^2}$, k fiind o constantă pozitivă. Funcţia de forţe U este în acest caz

$$U = \int -\frac{k}{r^2}\; dr = \frac{k}{r} + h$$

h fiind o constantă.

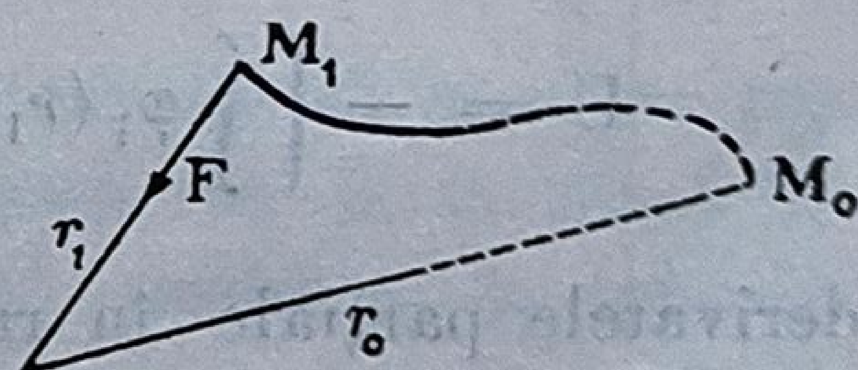


Fig. 25

Travaliul forţei, când mobilul soseşte dela o poziţie M_0 depărtată indefinit, la poziţia M_1, este

$$\mathfrak{T} = U_1 - U_0 = \left(\frac{k}{r_1} + h\right) - \left(\frac{k}{r_0} + h\right) = \frac{k}{r_1}$$

de oarece $\frac{k}{r_0}$ este nul.

Generalizare. Să presupunem că în punctul M lucrează mai multe forţe F_1, F_2, $F_3 \ldots$, îndreptate pe dreptele care unesc acest punct cu centrele fixe P_1, P_2, $P_3 \ldots$, intensităţile forţelor fiind funcţii $\varphi_1(r_1)$, $\varphi_2(r_2)$, $\varphi_3(r_3) \ldots$, de distanţele r_1, r_2, $r_3 \ldots$, ale punctului mobil M la centrele fixe.

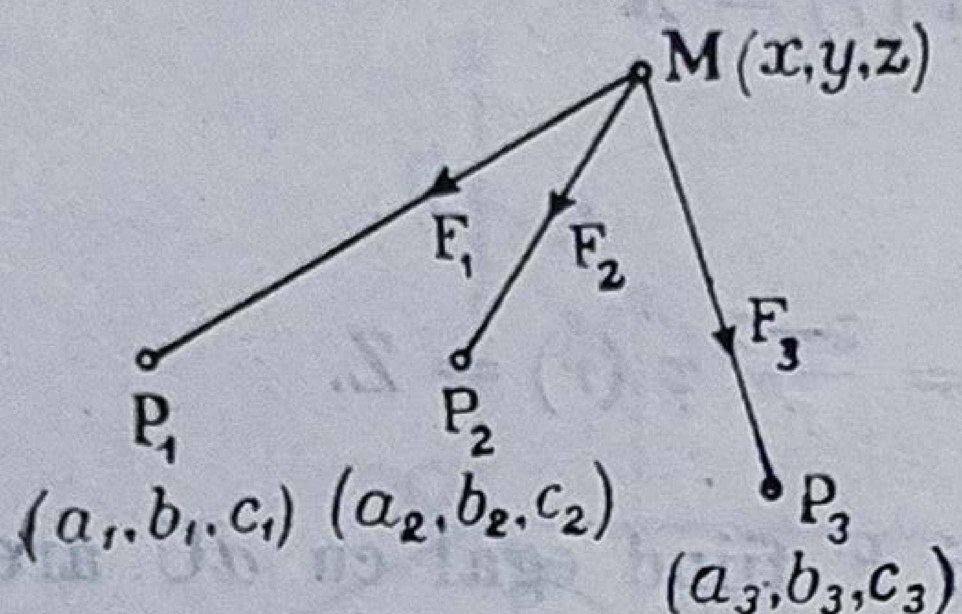


Fig. 26

Dacă forţele sunt atractive, aşa după cum arată figura, avem

$$X_1 = -\frac{x-a_1}{r_1}\varphi_1(r_1), \quad Y_1 = -\frac{y-b_1}{r_1}\varphi_1(r_1), \quad Z_1 = -\frac{z-c_1}{r_1}\varphi_1(r_1)$$

$$X_2 = -\frac{x-a_2}{r_2}\varphi_2(r_2), \quad Y_2 = -\frac{y-b_2}{r_2}\varphi_2(r_2), \quad Z_2 = -\frac{z-c_2}{r_2}\varphi_2(r_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

şi, în consecinţă, componentele X, Y, Z ale rezultantei acestor forţe au ca expresii:

$$X = -\left[\frac{x-a_1}{r_1}\varphi_1(r_1) + \frac{x-a_2}{r_2}\varphi_2(r_2) + \ldots\right]$$

$$Y = -\left[\frac{y-b_1}{r_1}\varphi_1(r_1) + \frac{y-b_2}{r_2}\varphi_2(r_2) + \ldots\right]$$

$$Z = -\left[\frac{z-c_1}{r_1}\varphi_1(r_1) + \frac{z-c_2}{r_2}\varphi_2(r_2) + \ldots\right].$$

Funcţia de forţe este în acest caz

$$U = -\left[\int \varphi_1(r_1)\,dr_1 + \int \varphi_2(r_2)\,dr_2 + \ldots\right]$$

derivatele parţiale în raport de x, y, z ale acestei funcţii reproducând, după cum se vede imediat, expresiile X, Y, Z de aci mai sus ale componentelor rezultantei forţelor care lucrează în punctul M.

Travaliul elementar al uneia dintre forţe, spre exemplu al forţei $\varphi_1(r_1)$ este $-\varphi_1(r_1)\,dr_1$. Aceasta se poate vedea şi

in mod geometric, considerând o deplasare elementară MM′ a mobilului şi observând că travaliul elementar al forţei F_1 pentru deplasarea MM′, care este egal cu forţa F_1 înmulţită cu proecţia elementului MM′ pe direcţia forţei, are ca expresie

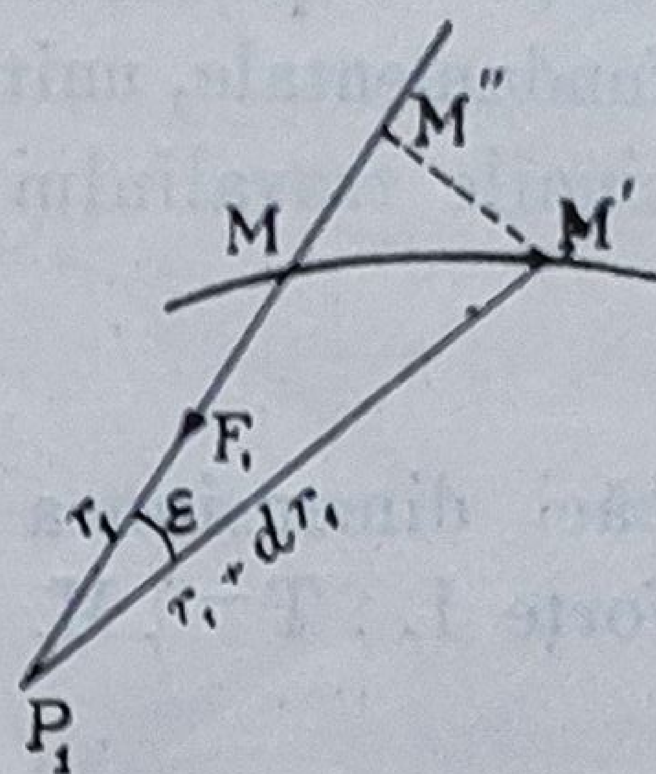


Fig. 27

$-F_1 . MM''$ sau $-F_1 (P_1 M' \cos \varepsilon - P_1 M)$

adică, în valoare principală,

$-F_1 [(r_1 + dr_1) - r_1]$ deci $- \varphi_1 (r_1) dr_1$.

11. **Potenţial**. Se numeşte astfel, funcţia de forţe luată cu semnul schimbat. Insemnând potenţialul prin V, avem în consecinţă $V = -U(x, y, z)$ şi prin urmare

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Potenţialul este utilizat în teoriile electricităţii şi magnetismului. Suprafeţele de nivel iau atunci numele de *suprafeţe echipotenţiale*.

12. **Unitate de travaliu şi dimensiunile travaliului.** a). Travaliul unei forţe constante F în deplasarea MM_1 de pe direcţia sa este

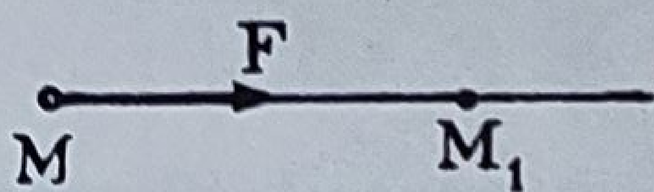


Fig. 28

$$\mathfrak{T} = MM_1 . F.$$

Dacă luăm $F=1$ şi $MM_1=1$, avem $\mathfrak{T}=1$. Unitatea de travaliu va fi deci travaliul unităţii de forţă pentru o deplasare în sensul forţei egală cu unitatea de lungime.

In sistemul C. G. S. unitatea de travaliu se numeşte *erg*. In sistemul industrial M. K. S., unitatea de forţă fiind kilogramul, iar unitatea de lungime metrul, unitatea de travaliu este *kilogrametrul*.

b). Travaliul fiind o sumă de termeni de forma

$$F.MM' \cos (F, MM')$$

şi cum cosinusul nu are dimensiuni, el fiind un număr abstract, rezultă că dimensiunile travaliului depind de productul F.MM′

adică de productul unei forțe cu o lungime. Dacă luăm ca unități fundamentale, unitățile de lungime, de timp și de massă, dimensiunile travaliului vor fi

$$L^2 . T^{-2} . M$$

căci dimensiunea unei lungimi este L, iar dimensiunea unei forțe $L . T^{-2} . M$.

II. MIŞCAREA ŞI ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL LIBER.

I. ECUAŢIILE GENERALE ALE MIŞCĂREI.

Dacă însemnăm prin m massa punctului şi prin X, Y, Z proecţiile rezultantei forţelor care lucrează asupra punctului, adică

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

avem în fiecare moment

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

sistemul de axe cordonate putând fi dreptunghiular sau oblic.

Aceste 3 ecuaţii, sunt ecuaţiile generale ale mişcărei. Ele servesc pentru rezolvirea celor 2 principale probleme de Dinamică:

I. Fiind date forţele care lucrează asupra unui punct, să se determine mişcarea punctului;

II. O mişcare fiind observată, să se determine forţa care o produce.

Problema I. Cum în general componentele X, Y, Z sunt după cum am mai spus funcţiuni de timp, de cordonate şi de componentele vitezei, sistemul de ecuaţii (1) se prezintă sub forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1\left(t;\ x,\ y,\ z;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)$$

$$(2)\qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_2\left(t;\ x,\ y,\ z;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_3\left(t;\ x,\ y,\ z;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right).$$

Acest sistem de trei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea urmează a fi integrat, pentru a se obţine expresiunile cordonatelor x, y, z, în funcţie de timp.

Putem aduce rezolvirea sistemului (2) la rezolvirea unui sistem de 6 ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi scriind

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dz}{dt} = z'$$

$$m\frac{dx'}{dt} = F_1\ (t;\ x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z')$$

$$m\frac{dy'}{dt} = F_2\ (t;\ x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z')$$

$$m\frac{dz'}{dt} = F_3\ (t;\ x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z').$$

Soluţia generală a acestui sistem conţine 6 constante arbitrare şi se prezintă sub forma

$$x = f_1\ (t;\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6)$$

$$y = f_2\ (t;\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots,\ c_6)$$

$$(3)\qquad z = f_3\ (t;\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots\ c_6)$$

$$x' = f_1'\ (t;\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6)$$

$$y' = f_2'\ (t;\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots\ c_6)$$

$$z' = f_3'\ (t;\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots\ c_6).$$

Cantităţile $c_1, c_2, \ldots, c_6$ figurează din cauză că scriind ecuaţiile (2) n'am precizat care anume sunt cordonatele x_0, y_0, z_0 ale punctului şi componentele x_0', y_0', z_0' ale vitezei sale la origina timpului. Dacă ni se dau aceste elemente, atunci problema se termină în felul următor:

In sistemul de ecuaţii (3) înlocuim pe x, y, z şi x', y', z' prin x_0, y_0, z_0 şi x_0', y_0', z_0' iar pe t prin zero. Rezolvind atunci în raport de $c_1, c_2, \ldots, c_6$ vom determina valorile acestor constante pe care nu ne mai rămâne decât să le introducem în sistemul de ecuaţii (3) pentru a obţine soluţia definitivă a problemei.

Cele 6 constante trebuind să fie distincte, sistemul de ecuaţii care le dă, nu poate să fie nici incompatibil, nici nedeterminat. Dacă unul din aceste două cazuri se prezintă, aceasta va însemna că nu s'a obţinut soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale.

a). ***Integralele unei probleme de Dinamică.*** Integraţiunea ecuaţilor mişcărei unui punct este o problemă grea, pentru care nu se poate da nici o regulă generală. Se procedează adesea ori la integraţiune, căutând ceeace se numesc *integrale ale sistemului de ecuaţii diferenţiale*, adică funcţiuni de timp, de cordonate şi de componentele vitezei care să rămână constante pe tot timpul mişcărei:

$$\varphi\,(t;\, x,\, y,\, z;\, x',\, y',\, z') = 0.$$

Numărul de integrale distincte este de cel mult 6:

$$\varphi_1\,(t;\, x,\, y,\, z;\, x',\, y',\, z') = c_1$$
$$\varphi_2\,(t;\, x,\, y,\, z;\, x',\, y',\, z') = c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_6\,(t;\, x,\, y,\, z;\, x',\, y',\, z') = c_6.$$

Rezolvirea lor în raport de x, y, z; x', y', z' ne dă soluţia generală reprezentată prin sistemul de ecuaţii (3).

In cazul când nu putem rezolvi complect problema, cele câteva integrale găsite ne arată fiecare în parte câte o proprietate caracteristică a mişcării şi ne vom mulţumi cu atât.

b). ***Mişcarea într'un plan.*** Când forţa care lucrează asupra punctului nu iese dintr'un plan, care să conţină şi viteza iniţială, mişcarea este plană şi are ca ecuaţii:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

Soluţia generală, conţine patru constante arbitrare.

c). *Mişcarea pe o dreaptă.* Dacă forţa are necontenit aceiaşi direcţie, care să fie şi direcţia vitezei iniţiale, mişcarea este rectilină şi avem atunci o singură ecuaţie diferenţială:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

a cărei soluţiune generală conţine două constante arbitrare.

Problema II. Să presupunem acum că se cunoaşte mişcarea punctului şi se caută forţa care o produce. Cordonatele x, y, z sunt atunci funcţiuni cunoscute de timp. Derivându-le de 2 ori în raport de timp şi înmulţind derivatele aflate cu massa m, vom avea

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dacă observarea mişcărei, făcută cu condiţiuni iniţiale variabile, ne-a putut permite să exprimăm pe x, y, z în funcţie de 6 constante arbitrare:

$$\begin{aligned} x &= f_1 \ (t;\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) \\ y &= f_2 \ (t;\ c_1,\ c_2 \ldots \ldots,\ c_6) \\ z &= f_3 \ (t;\ c_1,\ c_2, \ldots \ldots,\ c_6) \end{aligned}$$

şi prin urmare

$$\begin{aligned} x' &= f'_1 \ (t;\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) \\ y' &= f'_2 \ (t;\ c_1,\ c_2, \ldots \ldots,\ c_6) \\ z' &= f'_3 \ (t;\ c_1,\ c_2, \ldots \ldots,\ c_6) \end{aligned}$$

atunci se poate obţine şi legea după care variază forţa pe timpul mişcării. Vom avea în adevăr în asemenea caz

$$\begin{aligned} X &= m.\ f''_1 \ (t;\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) \\ Y &= m.\ f''_2 \ (t;\ c_1,\ c_2, \ldots \ldots,\ c_6) \\ Z &= m.\ f''_3 \ (t;\ c_1,\ c_2, \ldots \ldots,\ c_6) \end{aligned}$$

în care vom înlocui constantele prin valorile trase din sistemul precedent, deci valori funcţiuni de t, x, y, z, x', y', z'. Operând astfel vom ajunge la rezultatul

$$\begin{aligned} X &= F_1 \ (t;\ x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z') \\ Y &= F_2 \ (t;\ x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z') \\ Z &= F_3 \ (t;\ x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z') \end{aligned}$$

care va reprezenta legea forţei pe timpul mişcării.

Dacă mişcarea este plană, va trebui să cunoaştem pe x şi pe y în funcţie de t şi de 4 constante arbitrare, iar dacă mişcarea este rectilină trebue să ni se dea x în funcţie de t şi de 2 constante arbitrare.

Exemplu. *Mişcare rectilină reprezentată prin ecuaţia*

$$x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

α şi β *fiind constante determinate iar* A *şi* B *constante arbitrare.*

Deducem :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\ Ae^{\alpha t} + \beta\ Be^{\beta t} = x'$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 Ae^{\alpha t} + \beta^2 Be^{\beta t}.$$

Eliminarea constantelor arbitrare A şi B între aceste ecuaţii ne dă

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ \frac{dx}{dt} & \alpha & \beta \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0$$

din care deducem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\alpha + \beta)\frac{dx}{dt} - \alpha\beta x$$

şi prin urmare

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\left[(\alpha + \beta)\frac{dx}{dt} - \alpha\beta x\right]$$

care reprezintă legea forţei pe timpul mişcării.

Ecuaţiile intrinsece ale mişcării.

Ştim că acceleraţia este coprinsă în planul osculator al traectoriei şi are ca proecţii pe tangentă şi pe normala principală

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{R}$$

R fiind raza de curbură în punctul M. Dacă F este rezultanta forţelor care lucrează asupra punctului, avem $F = mw$ şi prin urmare proecţiile ei pe tangentă şi pe normală vor fi

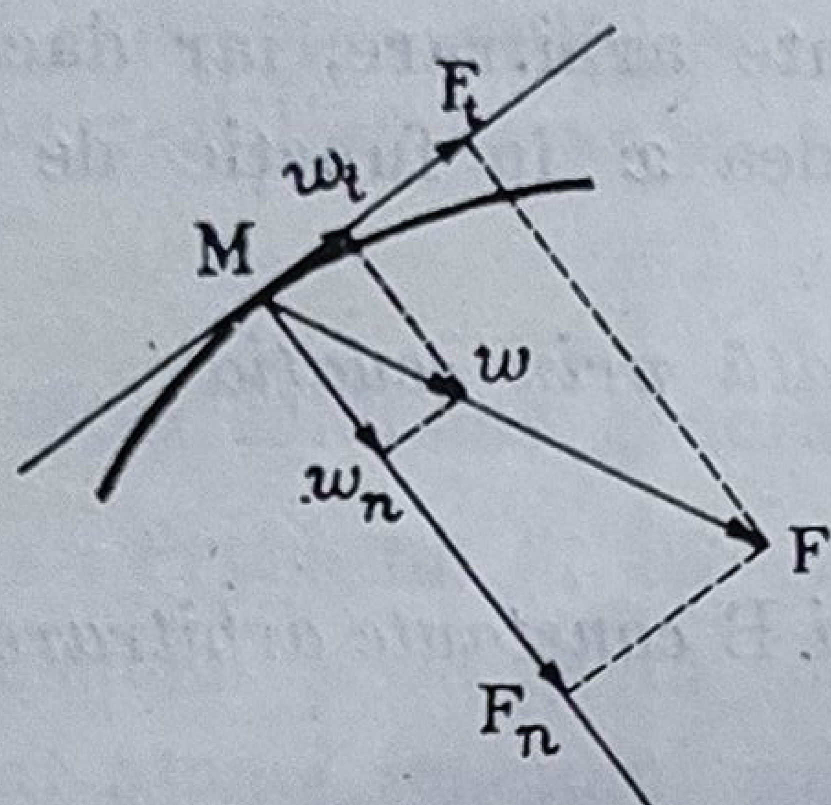


Fig. 29

$$F_t = m\frac{dv}{dt}, \quad F_n = m\frac{v^2}{R}.$$

Aceste formule arată că variaţia de viteză este datorită numai componentei tangenţiale F_t aşa că dacă F_t ar fi nul, adică dacă forţa ar fi necontenit normală traectoriei, viteza ar rămâne constantă şi prin urmare mişcarea ar fi uniformă. De asemenea curbura $\frac{1}{R}$ depinde numai de F_n aşa că dacă această componentă ar fi nulă, curbura ar fi şi ea nulă şi mişcarea ar fi rectilină. Componentei F_n i se mai zice şi *forţă centripetă*.

Cele două ecuaţii de mai sus, se numesc *ecuaţiile intrinsece* ale mişcării. Ele sunt cu deosebire utile atunci când se cunoaşte forma geometrică a traectoriei.

II. CANTITATEA DE MIŞCARE.

Să punem pe cea dintâi dintre cele două ecuaţii intrinsece sub forma $m.\, dv = F_t \,.\, dt$ şi să integrăm dela t_0 la t. Obţinem:

$$(\alpha) \qquad mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} F_t \,.\, dt.$$

Productul mv se numeşte *cantitate de mişcare* iar productul $F_t \,.\, dt$ *impulsiune elementară a forţei* F_t. Egalitatea (α) exprimă cu aceste denumiri, că *variaţia cantităţii de mişcare într'un interval de timp este egală cu impulsiunea totală a componentei tangenţiale a rezultantei forţelor, în acel interval de timp.*

Cantitatea de mişcare se reprezintă printr'un vector de mărime mv purtat pe direcţia şi în sensul vitezei. Ea are ca dimensiuni $L.\, T^{-1}.\, M$.

Proecţiile cantităţei de mişcare pe trei axe cordonate sunt

$$m\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{dz}{dt}$$

iar momentele ei, în raport de 3 axe dreptunghiulare, au ca expresiuni

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \quad m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \quad m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

1. **Teorema cantităţii de mişcare proectată pe un ax.** Să luăm un ax oarecare drept ax Ox. Avem în proecţiune pe acest ax: $m\frac{d^2x}{dt^2} = X$ care se mai poate scrie

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X.$$

Aşa dar:

Derivata în raport de timp a proecţiei cantităţii de mişcare pe un ax fix, este egală cu proecţia rezultantei forţelor pe acelaşi ax.

Dacă luăm trei axe cordonate, avem în acelaşi timp

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X$$

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z$$

X, Y, Z fiind proecţiile rezultantei forţelor care lucrează asupra punctului.

Fie OA vectorul reprezentativ al cantităţii de mişcare şi OB vectorul reprezentativ al rezultantei forţelor. Ecuaţiile (1) exprimă că *derivata geometrică a vectorului* OA, *şi deci viteza punctului* A *este egală cu vectorul* OB.

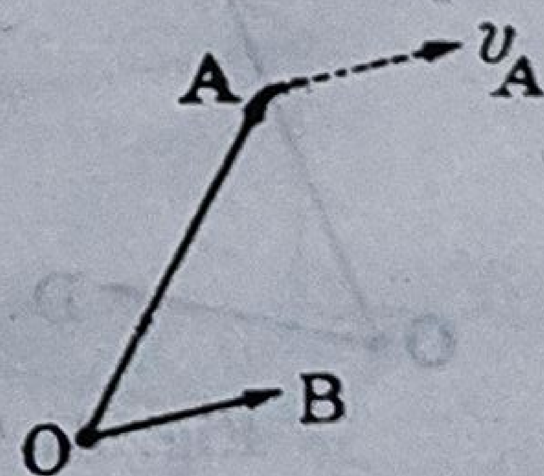


Fig. 30

2. **Teorema momentului cantităţei de mişcare.** Să luăm ca mai sus un ax oarecare drept ax Ox şi să formăm cu acest ax un sistem dreptunghiular $Oxyz$.

Dacă înmulţim egalitatea $m\,\frac{d^2z}{dt^2} = Z$ cu y şi scădem din ea egalitatea $m\,\frac{d^2y}{dt^2} = Y$ înmulţită cu z, obţinem combinaţiunea

$$m\left(y\,\frac{d^2z}{dt^2} - z\,\frac{d^2y}{dt^2}\right) = y\,Z - z\,Y$$

care se mai poate scrie

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(y\,\frac{dz}{dt} - z\,\frac{dy}{dt}\right)\right] = y\,Z - z\,Y.$$

Această egalitate exprimă, că:

Derivata în raport de timp a momentului cantităţii de mişcare în raport de un ax fix, este egală cu momentul rezultantei forţelor luat în raport de acelaşi ax.

In raport de 3 axe cordonate dreptunghiulare, avem în acelaşi timp

$$\frac{d}{dt}\,m\left[\left(y\,\frac{dz}{dt} - z\,\frac{dy}{dt}\right)\right] = y\,Z - z\,Y$$

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left[m\left(z\,\frac{dx}{dt} - x\,\frac{dz}{dt}\right)\right] = z\,X - x\,Z$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right)\right] = x\,Y - y\,X.$$

Fie OC momentul cantităţii de mişcare în raport cu origina axelor şi OD momentul rezultantei forţelor în raport de acelaşi punct. Ecuaţiile (2) exprimă că *derivata geometrică a vectorului* OC *şi deci viteza punctului* C, *este egală cu vectorul* OD.

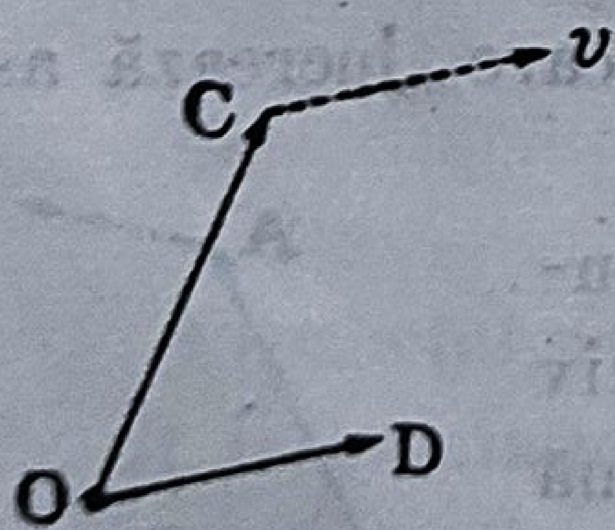


Fig. 31

3. **Aplicaţiuni.** Cele 2 teoreme de mai sus ne dau integrale de ale mişcării în cazul când rezultanta forţelor este necontenit perpendiculară pe un ax sau pe un plan fix, sau când momentul ei în raport de un ax sau de un punct este necontenit nul.

a). *Rezultantă perpendiculară pe un ax.* Luând axul drept ax Ox, avem

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dx}{dt}\right) = \text{o} \qquad \text{deci } m\,\frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

care este o integrală. Deducem $x = a + bt$, a şi b fiind două constante arbitrare.

b). *Rezultantă perpendiculară pe un plan.* Luând planul drept plan xOy şi ca ax Oz o dreaptă perpendiculară pe plan, avem:

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dx}{dt}\right) = \text{o}, \quad \frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dy}{dt}\right) = \text{o}, \quad m\,\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Primele două ecuaţii ne dau două integrale de ale mişcării din care deducem $x = a + bt$, $y = h + kt$ şi prin eliminarea lui t: $Ax + By + C = \text{o}$. Aşa dar traectoria este plană. Planul conţine direcţia forţei şi a vitezei iniţiale. Dacă luăm în acest plan un ax Oz paralel cu cel dintâi şi un ax Ox perpendicular, ecuaţiile mişcării se reduc la

$$x = \alpha + \beta t, \quad m\,\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

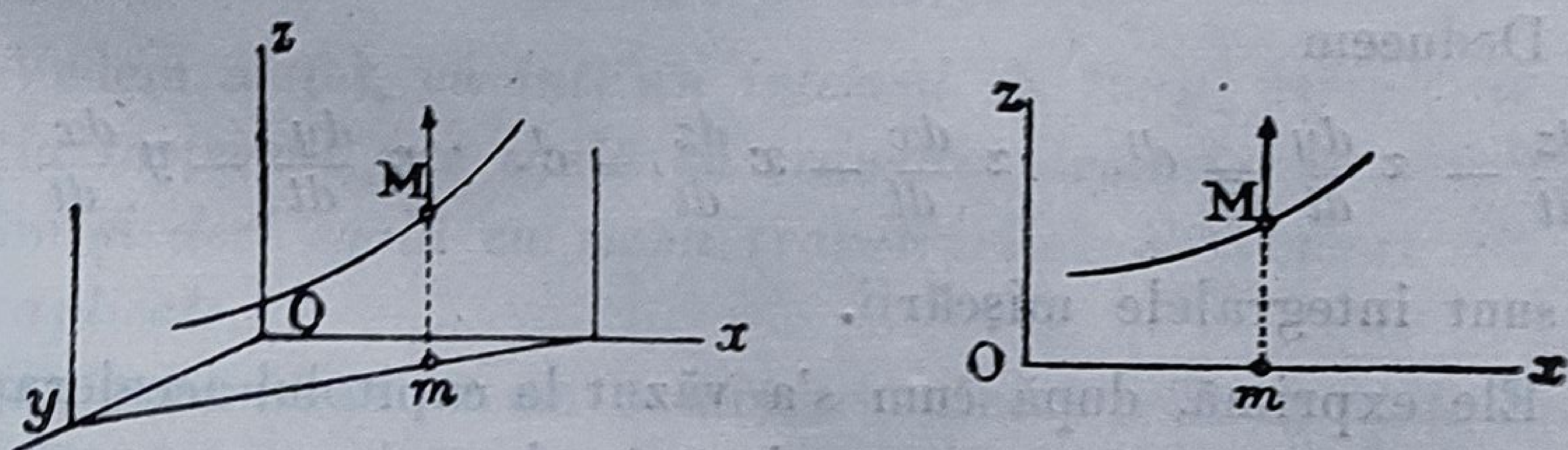


Fig. 32

c). *Rezultantă întâlnind un ax.* Luând axul drept ax Oz momentul rezultantei în raport cu acest ax fiind nul, avem

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right)\right] = \text{o}$$

deci

$$m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) = \text{const.}$$

sau mai simplu

$$x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = c$$

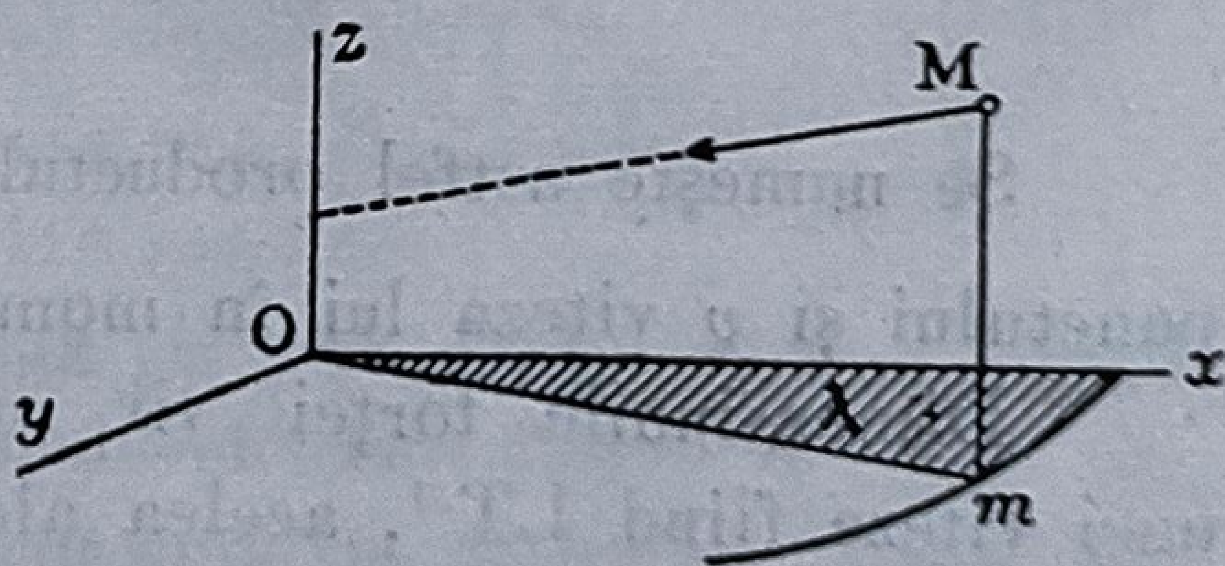


Fig. 33.

care este o integrală a mişcării. Ea exprimă, după cum ştim

dela capitolul acceleraţiunilor centrale, [1]) că aria λ creşte proporţional cu timpul, adică $\lambda = \frac{1}{2} ct + c_1$ sau numai $\lambda_1 = \frac{1}{2} ct$ dacă aria începe odată cu timpul.

d). *Rezultantă trecând printr'un punct fix.* Luând punctul fix ca origină a unui sistem de axe cordonate dreptunghiulare, avem în acelaşi timp

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right] = 0$$

căci momentele rezultantei în raport de cele trei axe sunt nule

Deducem

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c'', \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = c', \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c$$

care sunt integralele mişcării.

Ele exprimă, după cum s'a văzut la capitolul acceleraţiilor centrale, că traectoria este coprinsă într'un plan care trece prin origină şi că ariile λ, λ' şi λ'' variază proporţional cu timpul t, ori care ar fi planurile cordonate.

III. FORŢA VIE

Se numeşte astfel productul $\frac{1}{2} mv^2$, în care m este massa punctului şi v viteza lui în momentul t.

Dimensiunile forţei vii sunt $L^2 T^{-2} M$ căci dimensiunile unei viteze fiind LT^{-1}, acelea ale patratului vitezei sunt $L^2 T^{-2}$.

---

[1]) Cinematica, pag. 79.

Forţa vie are deci aceleaşi dimensiuni ca şi travaliul, adică reprezintă o mărime de aceiaşi natură [1]).

1. **Teoremă**. *Variaţia forţei vii într'un interval de timp oarecare, este egală cu suma travaliului forţelor care lucrează asupra punctului în acelaşi interval de timp.*

Fie: m massa punctului, v viteza într'un moment oarecare, F rezultanta forţelor care lucrează asupra punctului şi α unghiul coprins între rezultanta forţelor şi viteză.

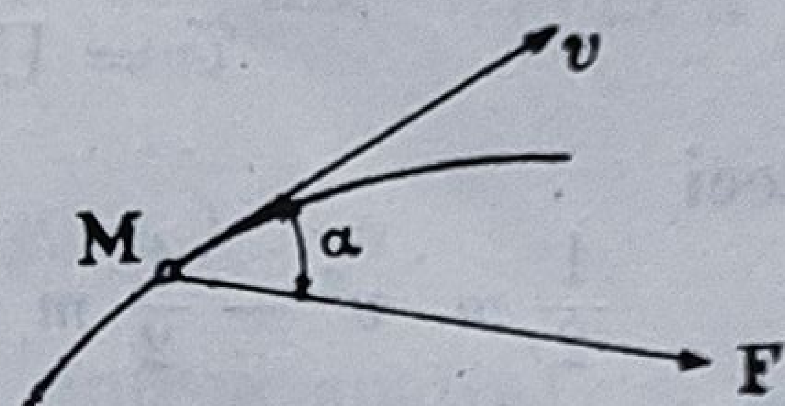


Fig. 34

Avem $m \dfrac{dv}{dt} = \mathrm{F} \cos\alpha$

deci $m\,dv = \mathrm{F}\,dt \cos\alpha$.

Inmulţind primul membru cu v şi pe cel de al doilea cu $\dfrac{ds}{dt}$ care este egal cu v, obţinem

$$m\,v\,dv = \mathrm{F}\,ds \cos\alpha \quad \text{adică} \quad d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathrm{F}\,ds\cos\alpha$$

care se scrie $$d\mathrm{T} = d\mathfrak{T}.$$

Vedem astfel, că *într'un interval de timp infinit de mic, variaţia forţei vii este egală cu travaliul elementar al rezultantei forţelor şi deci egală cu suma travaliurilor elementare ale forţelor aplicate.*

Să considerăm acum o mişcare finită dela t_0 *la* t. Fie v_0 şi v vitezele corespunzătoare şi s_0 şi s arcurile parcurse pe traectorie.

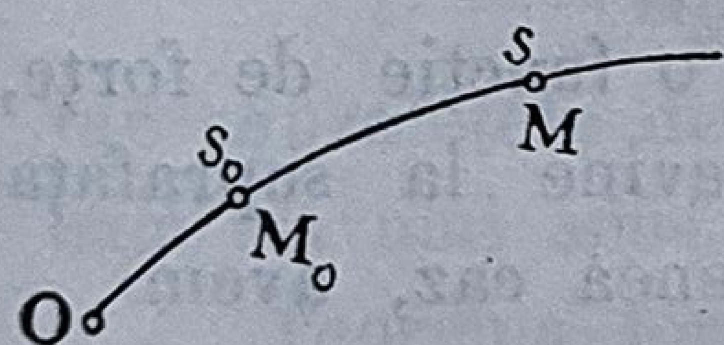


Fig. 35

Integraţiunea ecuaţiei precedente ne dă

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} \mathrm{F}\,ds \cos\alpha$$

---

[1]) *Leibnitz* a dat numelele de forţă vie productului mv^2. Acest product nu reprezintă însă o forţă, căci dimensiunile lui sunt diferite de acelea ale unei forţe. Mai târziu, *Coriolis* a denumit forţă vie productul $\frac{1}{2}mv^2$, căci sub această formă intervine de obicei în chestiunile de Mecanică productul mv^2. De atunci, autorii au zis forţă vie fie lui mv^2, fie lui $\frac{1}{2}mv^2$ după simplele lor preferinţe.

care se scrie mai simplu

$$T - T_0 = \mathfrak{T} \quad \text{sau încă} \quad \Delta T = \mathfrak{T} .$$

Teorema este deci demonstrată.

2. Integrala forţelor vii. Teorema forţelor vii este de o importanţă capitală în cazul când există o funcţie de forţe. Fie aceasta $U(x, y, z.)$ Ştim că avem în acest caz

$$\mathfrak{T} = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

deci

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

sau

$$\frac{1}{2} m v^2 - U(x, y, z) = \frac{1}{2} m v_0^2 - U(x_0, y_0, z_0).$$

Vedem astfel că funcţia $\frac{1}{2} m v^2 - U(x, y, z)$ rămâne constantă pe tot timpul mişcării şi constitue în consecinţă o integrală a problemei.

Dacă V este potenţialul avem

$$\frac{1}{2} m v^2 + V = \text{const.}$$

Aşa dar, *când rezultanta forţelor care lucrează asupra unui punct admite un potenţial, suma forţei vii şi a potenţialului rămâne constantă pe tot timpul mişcării.*

3. Conservarea forţei vii. Când există o funcţie de forţe, travaliul este în general nul dacă punctul revine la suprafaţa de nivel de la care a plecat. Deci, în asemenea caz, avem

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 \quad \text{adică} \quad v^2 = v_0^2$$

ceea ce arată că, *în valoare absolută, mărimea vitezei rămâne aceiaşi ori de câte ori mobilul traversează aceiaşi suprafaţă de nivel.*

In aceasta constă principiul zis al conservării forţei vii. Este însă necesar pentru ca acest fapt să aibe întotdeauna loc, ca suprafeţele de nivel să nu se întretae unele cu altele.

4. Notă asupra integralei forţelor vii. Egalitatea

$$\frac{1}{2} m \; v^2 - \frac{1}{2} m \; v_0{}^2 = \mathrm{U}(x, y, z) - \mathrm{U}(x_0, y_0, z_0)$$ ne dă

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_0{}^2 + \mathrm{U}(x, y, z) - \mathrm{U}(x_0, y_0, z_0).$$

Cum primul membru este esenţialmente pozitiv, rezultă că punctul mobil nu poate eşi, în mişcarea sa, din regiunea de spaţiu definită prin inegalitatea

$$\frac{1}{2} mv_0{}^2 + \mathrm{U}(x, y, z) - \mathrm{U}(x_0, y_0, z_0) > 0 \, .$$

Când această regiune nu coprinde întreg spaţiul, ea este limitată de suprafaţa

$$\frac{1}{2} mv_0{}^2 + \mathrm{U}(x, y, z) - \mathrm{U}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

care depinde de poziţia iniţială a punctului şi de mărimea vitezei sale iniţiale, însă este independentă de direcţia acestei viteze.

Aplicaţiune. Fie un punct material supus numai acţiunei greutăţii. Luând axul Oz vertical, avem

$$\mathrm{X} = 0 \, , \quad \mathrm{Y} = 0 \, , \quad \mathrm{Z} = -mg \, .$$

Traectoria este, după cum se ştie (pag. 45) conţinută în planul determinat de viteza iniţială şi de greutatea punctului.

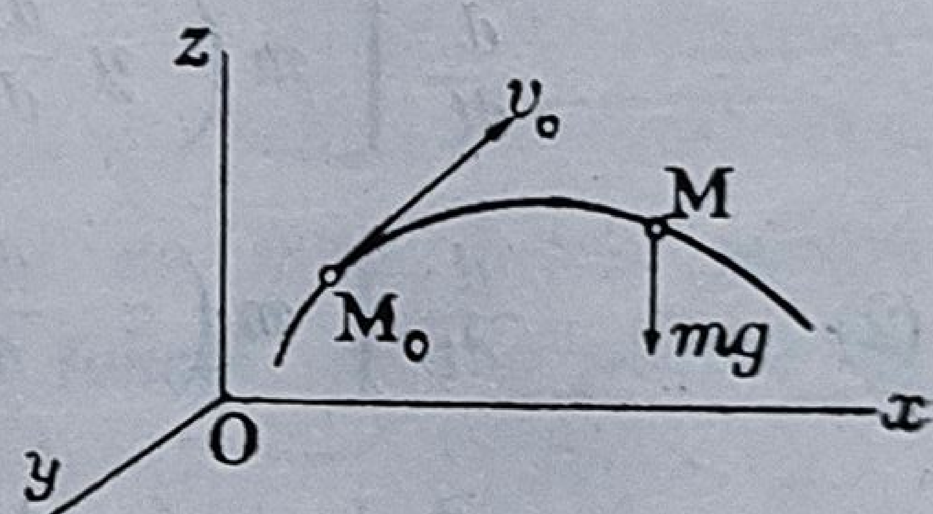


Fig. 36

Funcţia de forţe este

$$\mathrm{U} = -mgz + \text{const.}$$

iar suprafeţele de nivel sunt planurile orizontale $z = c$, după cum s'a mai spus.

Teorema forţelor vii ne dă

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0{}^2 = -mgz + mgz_0$$

de unde deducem, ca integrală a mişcării,

$$v^2 + 2gz = v_0{}^2 + 2gz_0 = \text{const.}$$

Funcţia de forţe fiind o funcţie uniformă de x, mărimea vitezei v redevine aceiaşi, în valoare absolută, când mobilul revine la acelaşi plan orizontal. Pe de altă parte, cum $v_0{}^2 - 2g(z - z_0) > 0$ şi prin urmare $z < z_0 + \frac{v_0{}^2}{2g}$ rezultă, că

oricare ar fi direcţia vitezei iniţiale, punctul se va găsi întotdeauna dedesubtul planului orizontal de cotă $z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$.

Dacă $z_0 = 0$, valoarea $\frac{v_0^2}{2g}$ reprezintă înălţimea la care se ridică punctul material când este asvârlit vertical în sus, de pe planul xOy, cu viteza v_0.

IV. REZUMAT.

In rezumat avem 7 ecuaţiuni, care pot în anumite cazuri să ne procure integrale de ale mişcării. Aceste ecuaţiuni sunt următoarele:

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X, \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y, \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z$$

care corespund teoremei cantităţii de mişcare proectată pe trei axe, apoi

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right] &= yZ - zY \\ \frac{d}{dt}\left[m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\right] &= zX - xZ \\ \frac{d}{dt}\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right] &= xY - yX \end{aligned}$$

care corespund teoremei momentelor cantităţilor de mişcare în raport cu 3 axe dreptunghiulare, şi însfârşit

$$(3) \quad d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Xdx + Ydy + Zdz$$

sau $dT = d\mathcal{T}$ care corespunde teoremei forţelor vii.

V. ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL LIBER.

Să considerăm un punct în mişcare. Se numesc poziţii de echilibru acele poziţii în care forţele care lucrează asupra punctului îşi fac echilibru, adică au o rezultantă nulă. In astfel

de poziţii, punctul va fi realmente în echilibru dacă-l vom presupune lipsit de viteză şi aceasta trebue subînţeles. Nu depinde de

Dacă X, Y, Z sunt proecţiile rezultantei forţelor, poziţiile de echilibru sunt prin urmare definite prin sistemul de ecuaţii

$$(1) \qquad X = o, \qquad Y = o, \qquad Z = o.$$

Să presupunem că există un câmp de forţe. In asemenea caz, componentele X, Y, Z sunt funcţiuni numai de cordonatele x, y, z ale poziţiei punctului. Rezolvind în raport de x, y, z sistemul de ecuaţiuni (1) obţinem una sau mai multe poziţii care vor fi poziţiile de echilibru.

1. **Definiţia stabilităţii de echilibru.** O poziţie de echilibru A este zisă stabilă, dacă aşezând punctul într'o poziţie infinit vecină de A şi abandonându-l forţelor, după ce i s'a imprimat mai întâi o viteză iniţială foarte mică, punctul ia o mişcare infinit apropiată de poziţia A. In cazul contrariu, poziţia de echilibru este zisă nestabilă.

2. **Teoremă.** *Când există o funcţie de forţe, orice poziţie care corespunde unui maximum al acestei funcţii, este o poziţie de echilibru stabil.*

Prin ipoteză

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

U fiind funcţia de forţe. Poziţiile de echilibru verifică sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial U}{\partial x} = o, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = o, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = o$$

ele corespund deci unui maximum sau unui minimum al funcţiei de forţe U (x, y, z).

Fie A o poziţie corespunzând unui maximum a al funcţiei U. Intr'o poziţie A_0 infinit vecină de A, valoarea funcţiei U

este $a - \varepsilon_0$, ε_0 fiind infinit de mic şi pozitiv. In poziţia A_0 să imprimăm punctului o viteză foarte mică v_0, abandonându-l apoi acţiunei forţelor.

Punctul se va pune în mişcare. Fie după un timp oarecare, $a - \varepsilon$ valoarea lui U şi v viteza punctului. Potrivit teoremei forţelor vii, avem

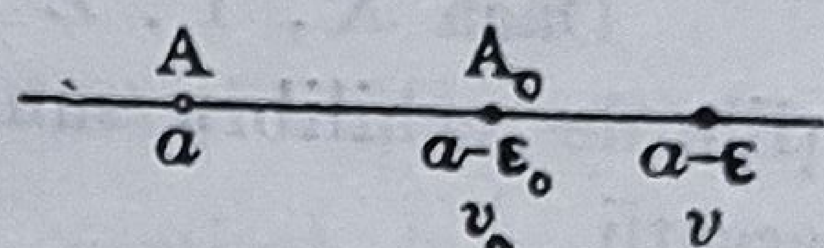


Fig. 37

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = (a - \varepsilon) - (a - \varepsilon_0)$$

adică

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \varepsilon_0 - \varepsilon.$$

Insă $\frac{1}{2} m v^2$ este pozitiv. Deci ε este mai mic decât $\frac{1}{2} m v_0^2 + \varepsilon_0$ şi rămâne astfel infinit de mic. Valoarea $a - \varepsilon$ a funcţiei U fiind în consecinţă infinit apropiată de valoarea a, rezultă că poziţia punctului va rămâne infinit vecină de poziţia de echilibru A şi echilibrul va fi stabil.

Potenţialul fiind prin definiţiune egal cu —U, un maximum al funcţiei de forţe corespunde la un minimum al potenţialului. Teorema de faţă mai poate fi deci enunţată în felul următor:

Când forţele aplicate unui punct material liber admit un potenţial, orice poziţiune a punctului care corespunde unui minimum al potenţialului este o poziţiune de echilibru stabil.

Exemplu. Un punct M este atras de un punct fix O cu o forţă F proporţională cu distanţa OM şi este animat în momentul iniţial de o viteză care trece prin O. Mişcarea este evident rectilină şi dacă luăm punctul O ca origină, avem

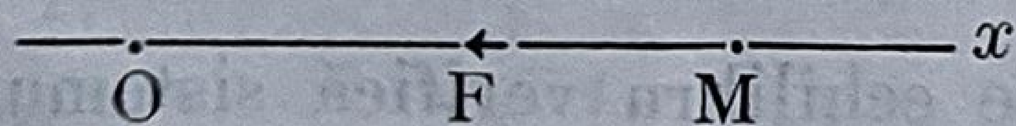


Fig. 38

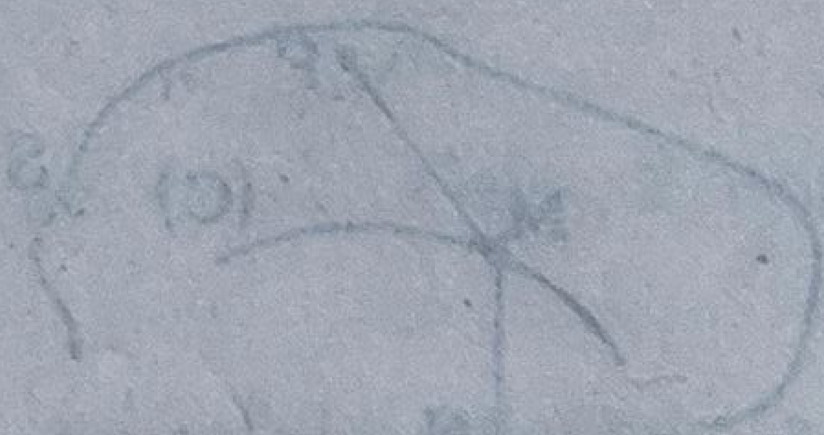
$$F = -kx.$$

Funcţia de forţe este

$$U = -\frac{1}{2} k x^2 + \text{const.}$$

Ea este maximă pentru $x = o$, deci poziţia O este o poziţie de echilibru stabil.

Dacă forţa F ar fi repulsivă, am avea $F = kx$, funcţia de forţe ar fi $U = \frac{1}{2} k x^2 + c$ şi valoarea $x = o$ n'ar mai corespunde unei poziţii de echilibru stabil, U fiind minim pentru $x = o$.



III. MIŞCAREA ŞI ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O SUPRAFAŢĂ SAU PE O CURBĂ.

I. MIŞCAREA PE O SUPRAFAŢĂ.

Fie un punct M supus unei rezultante de forţe F. Dacă punctul este obligat de a rămâne pe o suprafaţă S, el va descrie o curbă (C) trasă pe suprafaţă, care nu este traectoria punctului în mişcarea sa liberă sub acţiunea forţei F. Aşa dar suprafaţa exercită o acţiune asupra punctului, care modifică acceleraţia mişcării sale libere. Acţiunea suprafeţii este deci echivalentă unei forţe N aplicată în M, care compusă cu forţa F dă o rezultantă coprinsă în planul osculator al curbei din punctul M şi egală cu mw, w fiind acceleraţia punctului în mişcarea sa pe curba (C). *Mişcarea punctului va putea fi considerată ca o mişcare liberă, descrisă sub acţiunea acestei rezultante, numită forţă motrice.*

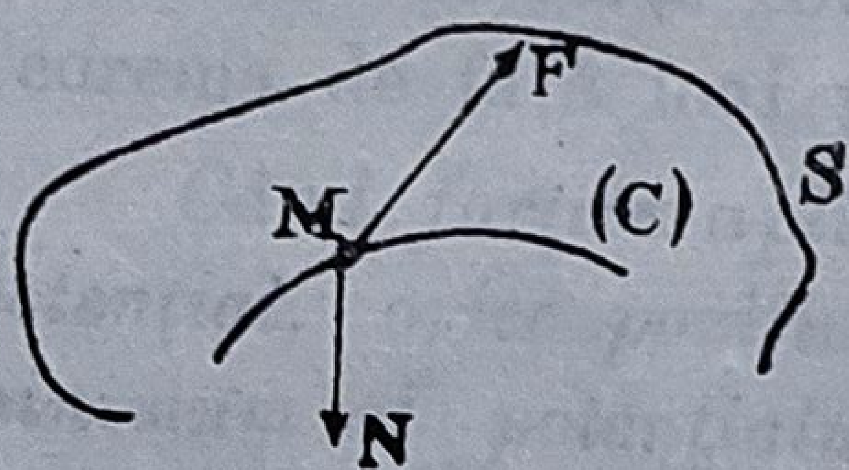


Fig. 39

Forţei F, i se zice *forţă direct aplicată.*

Când suprafaţa este perfect netedă, N este o forţă normală suprafeţei. In cazul contrariu, forţa N are o componentă tangenţială curbei (C) în sensul contrariu mişcării, care corespunde la ceea ce se numeşte *frecare.* In cele ce urmează vom presupune că nu există frecare.

In virtutea principiului acţiunii şi reacţiunii, acţiunei N a suprafeţei asupra punctului, îi corespunde o reacţiune P a punctului asupra suprafeţei, egală şi direct opusă lui N. Această reacţiune este zisă *presiune* a punctului.

1. **Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării.** Fie suprafaţa $F(x, y, z) = 0$. Cosinusurile directoare ale normalei la suprafaţă au ca expresiuni (axe dreptunghiulare)

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\Delta}, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\Delta}, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\Delta} \quad \text{cu} \quad \Delta = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Se va şti în fiecare caz, după natura problemei, care semn să se ia înaintea radicalului.

Ecuaţiile mişcării punctului pe suprafaţă vor fi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \frac{N}{\Delta}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}$$

deci 4 ecuaţii pentru determinarea necunoscutelor x, y, z şi N în funcţie de t.

Dacă eliminăm pe N, obţinem

$$(1) \qquad \frac{m\frac{d^2x}{dt^2} - X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{m\frac{d^2y}{dt^2} - Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{m\frac{d^2z}{dt^2} - Z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

adică 3 ecuaţii, împreună cu $F(x, y, z) = 0$. Cele 2 ecuaţii diferenţiale introduc 4 constante.

2. Se profită adesea de ecuaţia suprafeţei pentru a se exprima x, y, z în funcţie de doi parametri arbitrari:

$$x = \varphi_1(\alpha, \beta), \qquad y = \varphi_2(\alpha, \beta), \qquad z = \varphi_3(\alpha, \beta).$$

Se formează atunci

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \quad \text{în funcţie de} \quad \alpha, \beta, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \frac{d^2\beta}{dt^2}$$

care se introduc în ecuaţiile (1). Integraţiunea ne va da pe α şi β în funcţie de t şi de 4 constante arbitrare, acestea corespunzând valorilor α_0, β_0, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0$ din momentul iniţial.

3. **Aplicațiunea teoremei forțelor vii**. Este esențial de remarcat că în aplicațiunea acestei teoreme nu se va ține socoteală de acțiunea N, căci ea fiind normală curbei (C), travaliul ei este necontenit nul. Vom avea deci

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_o^t (X\,dx + Y\,dy + Zdz)$$

unde X, Y, Z vor reprezenta numai componentele rezultantei F a forțelor direct aplicate.

Dacă forțele direct aplicate admit o funcție de forțe $U(x, y, z)$, atunci se obține o integrală a mișcării

$$\frac{1}{2} mv^2 - U(x, y, z,) = \frac{1}{2} mv_0^2 - U(x_0, y_0, z_0) = \text{const.}$$

care dă valoarea lui v^2 în fiecare punct al traectoriei.

4. **Presiunea pe suprafață**. Să considerăm sistemul de trei axe dreptunghiulare format de tangenta MT la traectorie, de normala MN a suprafeții și de dreapta MS perpendiculară pe planul TMN.

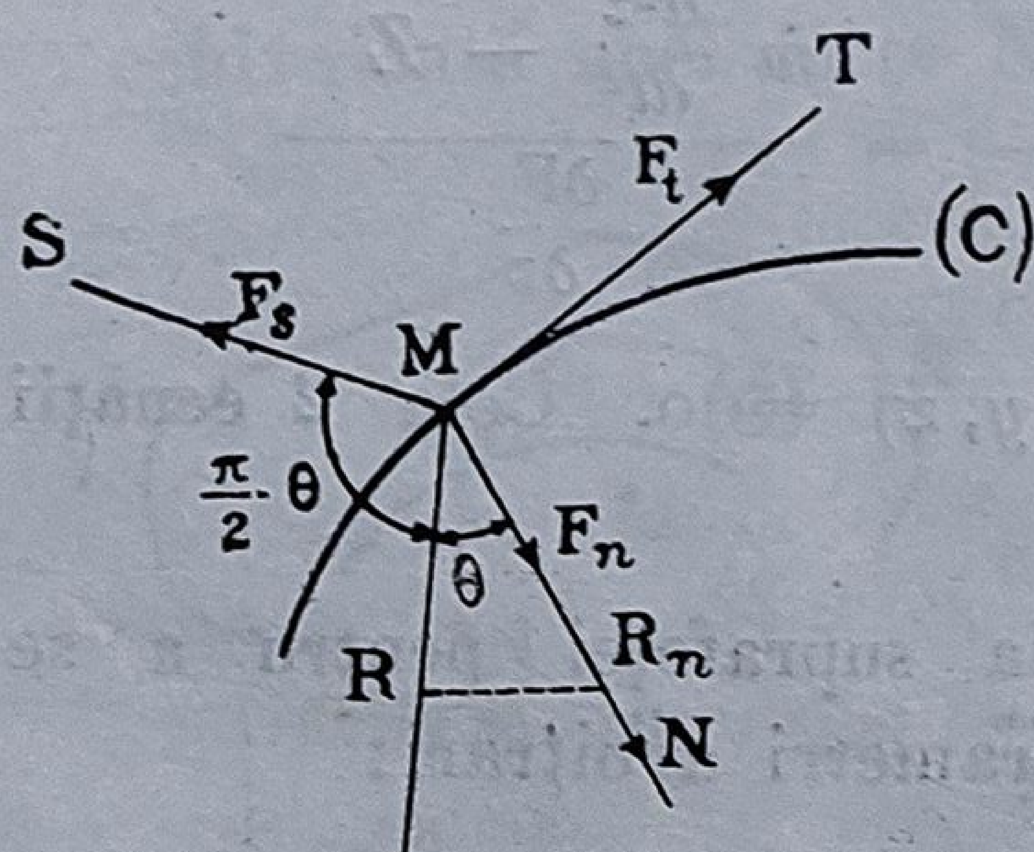


Fig. 40

Fie F_t, F_n, F_s, componentele forței F pe cele trei axe și N acțiunea suprafeței asupra punctului mobil, îndreptată după cum s'a spus pe MN.

Normala principală a curbei este situată în planul NMS. Fie θ unghiul pe care îl face ea cu MN. Accelerația totală w a mobilului având ca proecții:

$\frac{dv}{dt}$ pe MT, $\frac{v^2}{R}\cos\theta$ pe MN și $\frac{v^2}{R}\sin\theta$ pe MS, rezultă, înmulțind cu m și egalând cu proecțiile respective ale rezultantei celor două forțe F și N,

$$(2) \qquad m\frac{dv}{dt} = F_t, \qquad m\frac{v^2}{R}\cos\theta = N + F_n, \qquad m\frac{v^2}{R}\sin\theta = F_s.$$

Ecuația a doua ne dă pe N. Presiunea P, egală și direct

opusă lui N, va avea prin urmare ca valoare

$$P = -N = F_n - m\frac{v^2}{R}\cos\theta.$$

Forţa $-m\frac{v^2}{R}$, îndreptată pe normala principală a curbei şi spre exterior, este zisă *forţa centrifugă*. *Presiunea pe suprafaţă este deci egală cu suma proecţiunilor pe normala la suprafaţă a forţei centrifuge şi a forţei direct aplicate.*

F_n este *presiunea statică*. Prezenţa forţei centrifuge este ceea ce deosebeşte presiunea statică de *presiunea dinamică*.

Observând că $R = R_n \cos\theta$ (teorema **Meusnier**) R_n fiind raza de curbură a secţiunei normale a suprafeţii (plan TMN) ecuaţia a doua se mai poate scrie

$$m\frac{v^2}{R_n} = N + F_n.$$

Dacă există o funcţie de forţă U, avem $v^2 = \frac{2}{m}(U + h)$, h fiind o constantă, aşa că dacă se cunoaşte R_n şi F_n se poate calcula N şi deci P.

5. **Caz particular**. Dacă punctul se mişcă numai în virtutea unei viteze iniţiale, adică dacă presupunem $F = o$, atunci F_t, F_s şi F_n sunt nuli şi cele 3 ecuaţii (2) ne dau

$$m\frac{dv}{dt} = o, \qquad \sin\theta = o, \qquad m\frac{v^2}{R} = N \qquad \text{iar } R = R_n$$

deci: 1⁰) mişcarea este uniformă; 2⁰) normala principală a curbei este normală suprafeţei, deci planul osculator al curbei este normal suprafeţei şi curba este o linie geodezică; 3⁰) presiunea devine egală cu forţa centrifugă.

Notă. Dacă punctul nu este legat suprafeţei şi se mişcă pe una din feţele ei, este necesar, pentruca punctul să rămână pe suprafaţă ca forţa N să fie îndreptată spre regiunea unde punctul poate părăsi suprafaţa. Când N devine nul, punctul părăseşte suprafaţa şi mişcarea devine liberă.

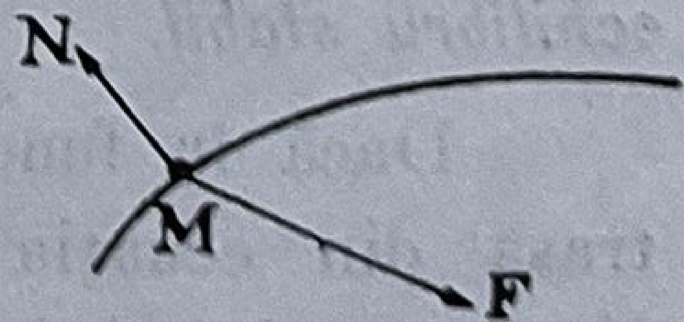


Fig. 41

II. ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O SUPRAFAŢĂ.

a). Condiţia de echilibru este ca forţa F să fie normală suprafeţei, căci atunci rezultanta totală, adică rezultanta forţelor F şi N este nulă, dacă presupunem punctul lipsit de viteză. In consecinţă, însemnând prin X, Y, Z componentele forţei F condiţia de echilibru se exprimă prin ecuaţiile,

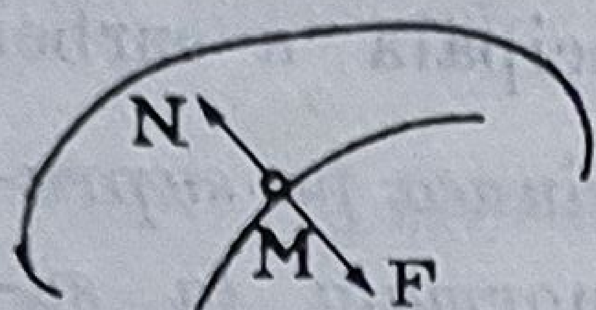


Fig. 42

$$\frac{X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{cu } F(x, y, z) = 0.$$

Dacă X, Y, Z sunt funcţiuni numai de x, y, z, acest sistem de trei ecuaţii ne dă valorile x, y, z ale poziţiilor de echilibru. In cazul când rezistenţa suprafeţei este unilaterală, trebue să mai exprimăm că forţa F este îndreptată spre regiunea unde punctul nu poate pătrunde, sau că această forţă e nulă.

b). Dacă forţele direct aplicate admit o funcţie de forţe $U(x, y, z)$ condiţiile de echilibru devin

$$1) \qquad \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{cu } F(x, y, z) = 0.$$

Cele două dintâi ecuaţii exprimă că în ori ce poziţie de echilibru, normala la suprafaţă este normală şi suprafeţii de nivel sau, cu alte cuvinte, că suprafaţa de nivel este tangentă suprafeţei $F(x, y, z) = 0$. Ducând suprafeţele de nivel tangente suprafeţei date, punctele de contact vor fi chiar poziţiile de echilibru.

Teoremă. ***Ori ce punct al suprafeţei*** $F(x, y, z) = 0$ ***unde funcţia de forţe*** $U(x, y, z)$ ***este maximă, constitue o poziţie de echilibru stabil.***

Dacă în funcţia $U(x, y, z)$ înlocuim pe z prin valoarea trasă din ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, U devine o funcţie de x şi y. Maximul şi minimul lui U sunt date, după cum se ştie din Algebră, de cele două ecuaţii

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = o$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{F\partial}{\partial y} dy + \frac{F\partial}{\partial z} dz = o$$

între care se elimină dz şi se egalează apoi cu zero coeficienţii lui dx şi dy. Ori, asemenea operaţie ne conduce la sistemul de ecuaţii (1). Aşa dar punctele suprafeţei $F(x, y, z) = o$ unde funcţia $U(x, y, z)$ este maximă sau minimă, corespund poziţiilor de echilibru.

Rămâne să demonstrăm că punctele unde funcţia $U(x, y, z)$ este maximă corespund echilibrului stabil. Demonstraţia, bazată pe aplicaţiunea teoremei forţelor vii, este la fel cu aceea pe care am dat-o pentru punctul material liber căci, şi în cazul de faţă, travaliul nu depinde decât de forţele direct aplicate şi prin urmare numai de variaţia funcţiei U.

Exemplu. *Un punct material obligat de a rămâne pe o suprafaţă, este supus numai acţiunii gravitaţiei.*

Luând axul Oz vertical şi îndreptat spre zenit, avem $U = -mgz + c$, deci poziţiile de echilibru se obţin ducând planuri tangente orizontale suprafeţei date, aceste planuri orizontale fiind suprafeţe de nivel. În punctele de contact unde z este minim, funcţia U este maximă şi echilibrul este stabil.

III. MIŞCAREA UNUI PUNCT PE O CURBĂ.

1. **Ecuaţiile mişcării.** In caz când nu există frecare, acţiunea N a curbei asupra punctului este o forţă normală, adică conţinută în planul perpendicular tangentei MT în punctul M. Rezultanta forţelor direct aplicate F şi acţiunea N trebue să ne dea prin compunere o forţă situată în planul osculator şi având ca valoare mw, w fiind acceleraţia mobilului. *Mişcarea punctului poate fi considerată ca liberă sub acţiunea forţelor* F *şi* N, *rezultanta lor fiind forţa motrice.*

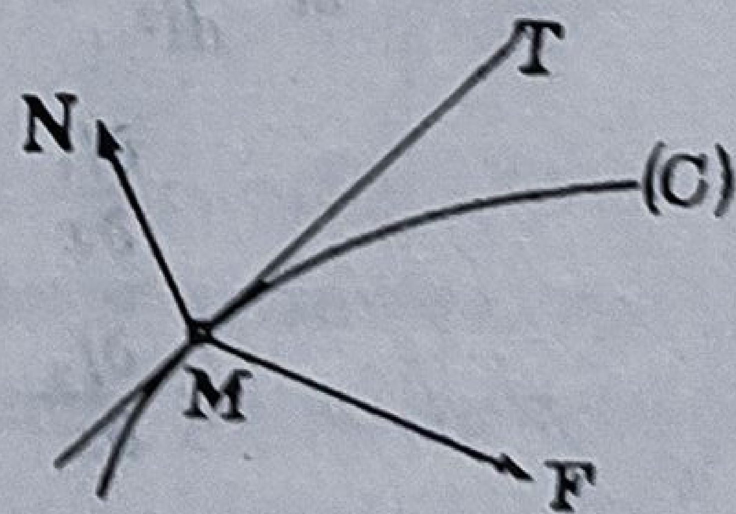


Fig. 43

Insemnând prin X, Y, Z proecţiile forţei F şi prin a, b, c cosinusurile directoare ale acţiunei N, ecuaţiile mişcării în raport

cu un sistem de axe dreptunghiulare vor fi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + a\,N$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + b\,N$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + c\,N$$

cu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ şi $a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$ care exprimă că forţa N este perpendiculară tangentei MT.

La acest sistem de ecuaţii se adaogă ecuaţiile curbei, fie sub forma

$$f_1\,(x, y, z) = 0\,, \qquad f_2\,(x,\ y,\ z) = 0$$

fie exprimând pe x, y, z în funcţie de un parametru variabil

$$x = \varphi_1\,(\alpha), \qquad y = \varphi_2\,(\alpha), \qquad z = \varphi_3\,(\alpha).$$

Cazul I. Cele 7 ecuaţii ne dau valorile x, y, z; a, b, c şi N în funcţie de t. Pentru a elimina pe a, b, c şi N, vom scrie

$$a\,N\,dx + b\,N\,dy + c\,N\,dz = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}\,dz = 0.$$

Inlocuind pe $a\,N$, $b\,N$, $c\,N$ prin $m\frac{d^2x}{dt^2} - X$, $m\frac{d^2y}{dt^2} - Y$, $m\frac{d^2z}{dt^2} - Z$ şi eliminând pe dx, dy, dz, obţinem

$$\begin{vmatrix} m\frac{d^2x}{dt^2} - X & m\frac{d^2y}{dt^2} - Y & m\frac{d^2z}{dt^2} - Z \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0\,.$$

ecuaţie care împreună cu $f_1\,(x, y, z) = 0$ şi $f_2\,(x,\ y,\ z) = 0$ ne dă valorile cordonatelor x, y, z în funcţie de t şi de 2 constante arbitrare. Una din constante corespunde poziţiei iniţiale, care fiind pe curbă pretinde pentru precizarea ei o singură condiţie,

iar cealaltă constantă arbitrară corespunde vitezei iniţiale, care fiind tangentă curbei se găseşte precizată tot printr'o singură condiţie.

Cazul II. Sistemul celor 8 ecuaţii ne dă pe $x, y, z; a, b, c;$ N şi α în funcţia de t.

Ecuaţia

$$adx + bdy + cdz = 0$$

se scrie

$$a\,\varphi_1'(\alpha) + b\,\varphi_2'(\alpha) + c\,\varphi_3'(\alpha) = 0.$$

Dacă pentru forţele direct aplicate există o funcţie de forţe U, atunci, însemnând prin h o constantă arbitrară, avem, potrivit teoremei forţelor vii şi ţinând socoteală că în aplicaţia acestei teoreme forţa N nu intervine, ea fiind perpendiculară direcţiei mişcării,

$$v^2 = \frac{2}{m}(U + h) \quad \text{deci } v^2 = \psi(\alpha)$$

adică

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \psi(\alpha)$$

şi prin urmare

$$\left[(\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 + (\varphi_3')^2\right]\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \psi(\alpha)$$

din care deducem pentru $\frac{d\alpha}{dt}$ o valoare de forma $\frac{d\alpha}{dt} = F(\alpha)$, de unde

$$t = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{F(\alpha)}.$$

Această ecuaţie ne dă pe t în funcţie de α şi invers, pe α în funcţie de t. Ecuaţiile curbei ne dau atunci pe x, y, z în funcţie de t.

Procedeul se aplică şi în cazul când forţa depinde numai de poziţia mobilului, adică atunci când

$$X = F_1(x, y, z), \quad Y = F_2(x, y, z), \quad Z = F_3(x, y, z).$$

Avem, în adevăr,

$$X = \theta_1(\alpha), \qquad Y = \theta_2(\alpha), \qquad Z = \theta_3(\alpha)$$

şi travaliul total

$$\mathfrak{T} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} X\,dx + Y\,dx + Z\,dz$$

este tot o funcţie de α, aşa că egalitatea

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0{}^2 = \mathfrak{T} \qquad \text{ne dă} \qquad v^2 = \psi(\alpha).$$

Obţinerea lui v^2 depinde, după cum se vede, de o cuadratură, ceea ce nu se întâmplă dacă există o funcţie de forţe.

2. **Presiune pe curbă**. Presiunea punctului pe curbă este o forţă egală şi direct opusă acţiunei N a curbei asupra punctului.

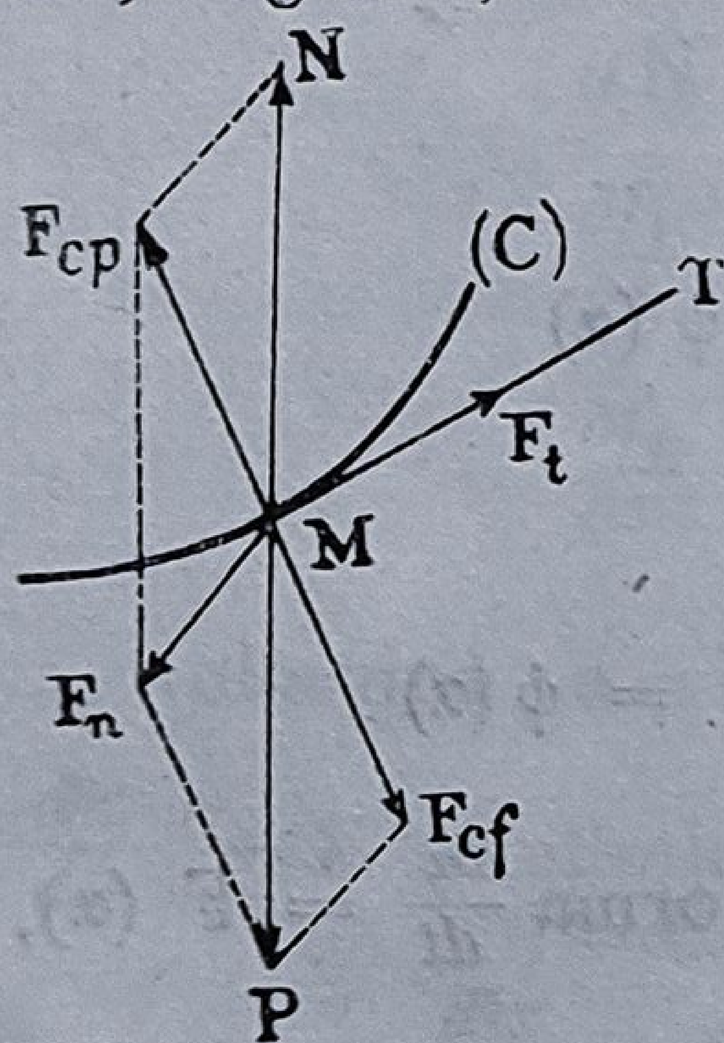


Fig. 44

Pentru a-i afla valoarea procedăm astfel: Descompunem forţa direct aplicată F în componenta ei tangenţială $F_t = m\,\frac{dv}{dt}$ şi în componenta ei din planul normal, F_n. Compunerea forţei F_n cu forţa N ne dă forţa centripetă $F_{cp} = m\,\frac{v^2}{R}$. Vedem atunci că presiunea P este rezultanta forţei centrifuge $F_{cf} = -F_{cp}$ şi a forţei F_n. Aşa dar: *Presiunea punctului asupra curbei este rezultanta forţei centrifuge şi a componentei din planul normal a forţei direct aplicate.*

Dacă există o funcţie de forţe, se cunoaşte v^2 şi se poate calcula prin urmare imediat presiunea.

Exemplu. *Punctul* M *descrie un cerc într'un plan vertical sub acţiunea greutăţii* F; *el porneşte din* M_0 *cu viteză nulă.*

Fie N acţiunea normală a curbei asupra punctului. Forţa motrice este rezultanta R a celor două forţe F şi N. Sub

efectul ei, punctul M descrie în mişcare liberă cercul dat.

Avem

$$U = mgz + \text{const.}$$

deci $\frac{1}{2} mv^2 = mgz$ de unde

$$v^2 = 2gz.$$

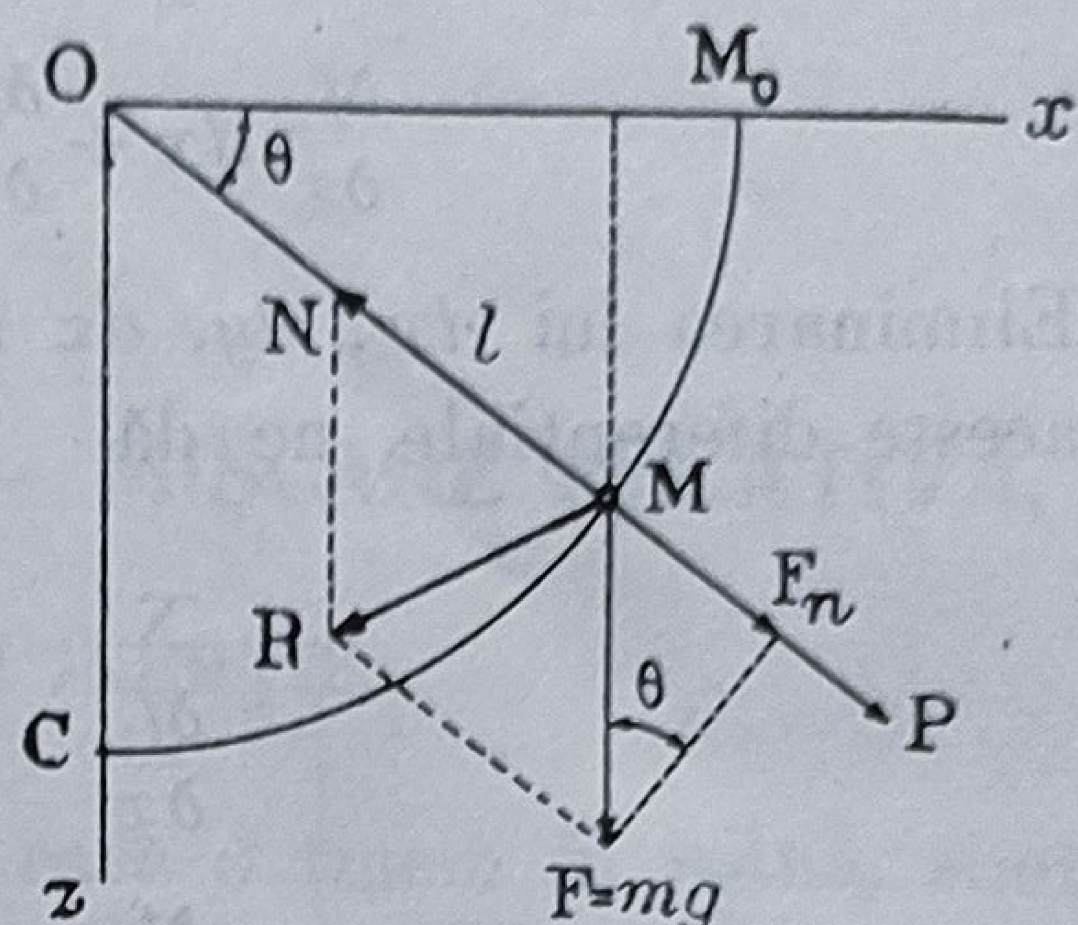


Fig. 45

Pe de altă parte, luând ca sens pozitiv direcţia OM vedem că

$$F_n = mg \sin \theta, \quad \text{deci}$$

$$P = mg \sin \theta + m \frac{v^2}{R} = mg \sin \theta + m \frac{2gz}{l}.$$

Cum însă $z = l \sin \theta$, putem scrie

$P = mg \sin \theta + 2\, mg \sin \theta$ adică, în definitiv: $P = 3\, mg \sin \theta$.

Această formulă arată că în punctul C, unde presiunea statică este mg, presiunea dinamică este egală cu $3\, mg$. Rezultanta forţelor N şi mg, în acest punct, este deci îndreptată dela C spre O şi egală cu $2mg$.

Insfârşit, în punctul M_0 viteza fiind nulă, forţa centrifugă este şi ea nulă şi presiunea sè reduce la componenta normală a greutăţii. Aceasta fiind însă şi ea nulă, conchidem că în punctul M_0 nu există nici-o presiune.

IV. ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O CURBĂ.

Poziţiile de echilibru sunt acelea unde forţa F este normală curbei, căci atunci rezultanta forţelor F şi N este nulă, dacă presupunem punctul lipsit de viteză.

Condiţia de echilibru este prin urmare

$$X\, dx + Y dy + Z\, dz = 0$$

X, Y, Z fiind proecţiile dreptunghiulare ale forţei F.

a). Dacă curba este dată prin ecuaţiile $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, diferenţialele dx, dy, dz satisfac celor două ecuaţii

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}\,dz = 0.$$

Eliminarea lui dx, dy, dz între cele trei ecuaţii care conţin aceste diferenţiale, ne dă

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă X, Y, Z sunt funcţiuni date de x, y, z, această ecuaţie împreună cu cele 2 ale curbei, determină poziţiile de echilibru.

b). Dacă curba este dată prin ecuaţii de forma

$$x = \varphi_1(\alpha), \qquad y = \varphi_2(\alpha), \qquad z = \varphi_3(\alpha)$$

ecuaţia de echilibru se scrie

$$X\,\varphi_1'(\alpha) + Y\,\varphi_2'(\alpha) + Z\,\varphi_3'(\alpha) = 0$$

ecuaţie, care în caz când X, Y, Z sunt funcţii de x, y, z, este de forma $\psi(\alpha) = 0$. Rădăcinile acestei ecuaţii corespund poziţiilor de echilibru.

Notă. Când există o funcţie de forţe pentru forţele direct aplicate, avem în cazul echilibrului pe o curbă aceleaşi teoreme ca în cazul echilibrului pe o suprafaţă.

IV. FORȚĂ DE INERȚIE. — MIȘCARE RELATIVĂ.

I. FORȚĂ DE INERȚIE.

Când învârtim o piatră pe care o ținem în mână, simțim foarte bine că piatra apasă asupra mânii și această apăsare, potrivit principiului acțiunii și reacțiunii, este în tot momentul egală și direct opusă forței care prin mijlocirea mânii îi dă pietrii mișcarea ei de rotație. Astfel, piatra se găsește supusă în fie ce moment unui anumit efort F, iar mâna la un efort F′ egal și direct opus lui F. Acest efort F′ se numește *forță de inerție.*

Cuvântul de forță de inerție a fost bine ales, căci reacțiunea care a primit acest nume este cu adevărat forța pe care un corp o exercită asupra noastră în virtutea inerției sale, când căutăm a-l scoate din starea de repaus sau când încercăm a-i modifica mărimea, direcția, ori sensul vitezei de care se găsește animat (pag. 10).

Fie, pentru a preciza mai bine această noțiune, A un punct material și B un alt punct care acționând asupra lui A îi dă acestuia o anumită mișcare. Dacă m este massa punctului A și w accelerația mișcărei sale, forța care acționează punctul este $F = mw$. Forța de inerție a punctului A va fi o forță F′, egală tot cu mw, însă direct opusă forței F și aplicată în punctul B.

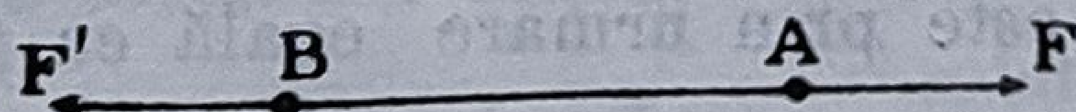


Fig. 46

Dacă x, y, z sunt cordonatele punctului A în raport de 3 axe dreptunghiulare, proecțiile pe aceste axe ale forței sale de inerție vor fi

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\qquad -m\frac{d^2y}{dt^2},\qquad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

iar proecţiile acestei forţe pe tangentă şi pe normala principală a traectoriei punctului, vor fi respectiv egale cu

$$-m\frac{dv}{dt}\qquad \text{şi}\qquad -m\frac{v^2}{R}$$

cea dintâi fiind *forţa de inerţie tangenţială*, iar cea de a doua *forţa de inerţie centrifugă*.

II. MIŞCARE RELATIVĂ.

După cum ştim de la teoria mişcărilor relative din Cinematică, avem

$$(w_a) = (w_r) + (w_e) + (w_c).$$

Inmulţind cu massa m, obţinem

$$(mw_a) = (mw_r) + (mw_e) + (mw_c)$$

sau

$$(F_a) = (F_r) + (F_e) + (F_c).$$

Această egalitate exprimă că forţa care dă punctului mişcarea sa reală, este rezultanta forţei care îi dă mişcarea relativă [1]), a forţei care îi dă mişcarea de antrenare [2]) şi a forţei care îi dă mişcarea complimentară.

Deducem

$$(1)\qquad (F_r) = (F_a) + (-F_e) + (-F_c).$$

Forţa $-F_e$ este egală şi direct opusă forţei F_e pe care o imprimă sistemul de axe mobile punctului M în mişcarea sa de antrenare. Ea este prin urmare egală cu forţa de inerţie a

---

[1]) Adică mişcarea aşa cum este ea văzută de un observator antrenat cu axele mobile şi care raportează mişcarea punctului la acele axe considerându-le ca fixe.

[2]) Adică mişcarea ce dobândeşte punctul când îl presupunem invariabil legat axelor mobile.

lui M din această mişcare şi a primit numele de *forţă de inerţie de antrenare*. Cealaltă $-F_c$, egală şi direct opusă forţei F_c, a fost denumită de **Coriolis**: *forţă centrifugă compusă*, deşi nu se vede destul de bine pentru ce a fost denumită astfel; totuşi numele a rămas.

Formula (1) corespunde teoremei următoare:

Mişcarea relativă a unui punct poate fi tratată ca o mişcare absolută faţă de axele mobile de referenţă, dacă se adaogă forţei F_a care lucrează realmente asupra punctului, forţa de inerţie de antrenare $-F_e$ şi forţa centrifugă compusă $-F_c$ (Coriolis).

Cum pentru observatorul din sistemul fix, singura forţă care lucrează asupra punctului este forţa F_a, celorlalte două $-F_e$ şi $-F_c$ li se zice *forţe aparente*. Pentru observatorul însă antrenat cu axele mobile, aceste forţe par efective, ca componente alături de F_a ale forţei F_r care produce mişcarea relativă.

Forţa centrifugă compusă se anulează bine înţeles în aceleaşi cazuri când se anulează acceleraţia complimentară $w_c = 2\,\omega\, v_r \sin\alpha$. Aceste cazuri sunt următoarele trei[1]:

1) $\omega = o$; mişcarea de antrenare a sistemului mobil este o translaţie;

2) $v_r = o$; punctul mobil este în repaus relativ;

3) $\alpha = o$; axul instantaneu de rotaţie, al mişcării de antrenare, este paralel cu viteza relativă a punctului mobil. Exemplu: un punct căzând spre pământ şi obligat de a rămâne pe suprafaţa unei uşi care se învârteşte în jurul unei verticale din planul ei (linia balamalelor).

1. **Ecuaţiile mişcării relative.** Dacă $Oxyz$ este un sistem de axe mobil şi însemnăm, *în raport cu acest sistem*, prin X, Y, Z componentele forţei din mişcarea relativă a punctului,

X_a, Y_a, Z_a " " " " absolută "
X_e, Y_e, Z_e " " " " de antrenare "
X_c, Y_c, Z_c " " " " complimentară "

avem

[1]) Cinematica, pag. 178.

$$X_r = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y_r = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z_r = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

şi în consecinţă, potrivit egalităţei (1):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X_a - X_e - X_c$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y_a - Y_e - Y_c$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z_a - Z_e - Z_c .$$

Aceste 3 ecuaţii sunt ecuaţiile mişcărei relative. Valoarea fiecărei forţe se determină căutând pe aceea a acceleraţiei din mişcarea ce-i corespunde şi înmulţind-o cu massa m.

2. **Echilibru relativ.** Viteza relativă fiind necontenit nulă, avem $F_r = 0$ şi $F_c = 0$, prin urmare

$$(F_a) + (-F_e) = 0$$

adică

$$X_a - X_e = 0, \qquad Y_a - Y_e = 0, \qquad Z_a - Z_e = 0 .$$

Exemplu. Să presupunem că un punct M este în echilibru relativ faţă de planul OMZ care se învârteşte în jurul axului OZ, cu viteza unghiulară constantă ω. Forţa F_e este $mr\omega^2$ şi avem $F_a = F_e$. Punctul se găseşte în echilibru relativ sub acţiunea forţei F_a şi a forţei de inerţie de antrenare $-F_e$.

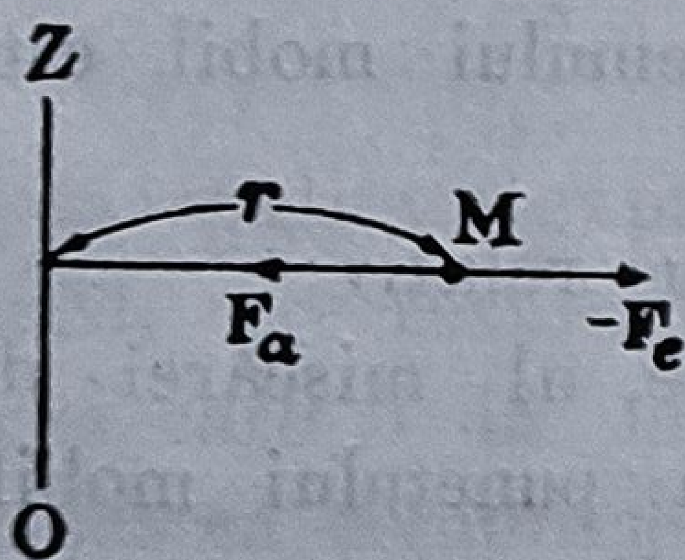


Fig. 47

Notă. Când se aplică mişcărei relative teorema forţelor vii, să se observe că *forţa centrifugă compusă nu intervine*, căci travaliul acestei forţe este nul, ea fiind perpendiculară vitezei relative şi deci direcţiei mişcării.

V. EXEMPLE DE MIŞCĂRI.
PUNCT LIBER.

I. MIŞCARE RECTILINĂ.

Ecuaţie generală:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X = F\ t, x, \left(\frac{dx}{dt}\right).$$

1. **Forţă constantă.** ***Mişcarea verticală a unui punct greu în vid.*** Vom presupune că în momentul iniţial, adică pentru $t = 0$, avem $x_0 = 0$ şi $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0$, *mişcarea fiind ascendentă.*

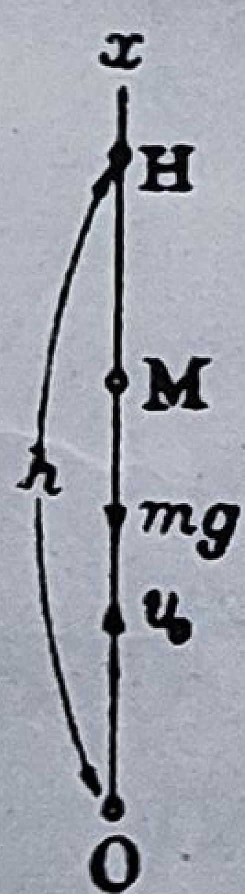


Fig 48.

Axul fiind îndreptat în sus, ecuaţia mişcării va fi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg, \qquad \text{căci } X = -mg.$$

Obţinem succesiv, prin integraţiuni,

$$\frac{dx}{dt} - v_0 = -gt, \qquad \text{sau } \frac{dx}{dt} = v_0 - gt$$

apoi:

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

deci mişcarea este uniform variată.

Punctul se sue până când viteza lui devine nulă:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - gt = 0, \qquad \text{de unde } t = \frac{v_0}{g}$$

valoare pentru care

$$x = h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Invers:

Pentru ca punctul să atingă înălţimea h trebue să luăm $\frac{v_0^2}{2g} = h$, adică să asvârlim punctul cu o viteză v_0 egală cu $\sqrt{2gh}$.

Din H punctul va coborî pe aceiaşi verticală. Funcţia de forţe fiind $U = -mgx + \text{const.}$, aplicaţia teoremei forţelor vii ne dă

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -m g x$$

adică
$$v^2 = v_0^2 - 2gx$$

egalitate care arată că la aceiaşi valoare a lui x, corespunde aceiaşi valoare absolută pentru v, fie că punctul se ridică fie că se coboară.

Aşa dar mişcarea de coborîre este reproducerea mişcării de suire.

Egalitatea $v^2 = v_0^2 - 2gx$ rezultă de altfel şi din eliminarea lui t între cele două ecuaţii de mai sus:

$$v = v_0 - gt \qquad \text{şi} \qquad x = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2.$$

In cazul *mişcării descendente*, fără viteză iniţială, luând pe Ox îndreptat în jos, ecuaţia mişcării va fi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

de unde, prin integraţiuni,

$$v = gt \qquad \text{şi} \qquad x = \frac{1}{2} gt^2 \qquad \text{sau} \qquad x = \frac{v^2}{2g}.$$

2. Forţă funcţie de timp: $X = F(t)$.

Avem succesiv

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \qquad \text{sau} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(t);$$

$$\frac{dx}{dt} - v_0 = \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\, dt = \psi(t);$$

$$x - x_0 = \int_0^t \psi(t)\, dt \qquad \text{adică} \qquad x = x_0 + \int_0^t \psi(t)\, dt.$$

3. Forţă funcţie de poziţia mobilului: $X = F(x)$.

Ecuaţia mişcărei fiind

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{F}(x) \qquad \text{sau} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt=\mathrm{F}(x)\,dx$$

adică

$$d\,.\,\frac{1}{2}\,m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\mathrm{F}(x)\,dx\;;$$

deducem

$$\frac{1}{2}\,mv^2-\frac{1}{2}\,m\,v_0{}^2=\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(x)\,dx$$

care este integrala forţelor vii, funcţia de forţe fiind

$$\mathrm{U}=\int\mathrm{F}(x)\,dx+\text{const.}$$

Astfel

$$v^2=v_0{}^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x}\mathrm{F}(x)\,dx$$

deci

$$v=\frac{dx}{dt}=\psi(x)$$

şi prin urmare

$$dt=\frac{dx}{\psi(x)}\;; \qquad t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\psi(x)}=\varphi(x)\;; \qquad x=f(t)\,.$$

Exemplu. *Atracţie proporţională cu distanţa mobilului la un centru fix.*

Fie O centrul fix. Se dă $\mathrm{X}=-\,k\,x$, k fiind pozitiv. Condiţii iniţiale: $t=0$, $x=x_0$ (punct M_0), $v=v_0$.

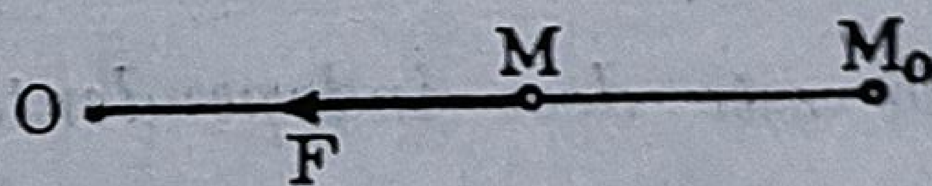


Fig. 49

Ecuaţia mişcării este

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}=-\,kx\,, \qquad \text{sau} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\,\omega^2x$$

punând $\qquad \dfrac{k}{m}=\omega^2.$

Regăsim o ecuaţie care ne este cunoscută din Cinematică dela studiul mişcării vibratoare simple. Ştim că integrarea ei ne dă $x = a \cos(\omega t + \alpha)$; a şi α fiind constante arbitrare. Putem scrie $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Exprimând că petru $t = o$ avem $x = x_0$ şi $v = v_0$, obţinem:

$x_0 = A$ şi $v_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = B\omega$ de unde $B = \frac{v_0}{\omega}$.

Deci soluţia generală, cu condiţiile iniţiale în evidenţă, este

$$(1) \qquad x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad \text{cu } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Aplicaţiunea teoremei forţelor vii ne dă

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0{}^2 = U - U_0$$

unde

$$U = -\int kx\, dx = -k \frac{x^2}{2} = \text{const.}$$

deci

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0{}^2 = -k \frac{x^2}{2} + k \frac{x_0{}^2}{2}$$

sau

$$v^2 + \frac{k}{m} x^2 = v_0{}^2 + \frac{k}{m} x_0{}^2.$$

In definitiv, mişcarea este vibratoare simplă, durata unei oscilaţiuni complecte (dus şi întors) fiind

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Această durată este deci independentă de condiţiile iniţiale ale mişcării.

Pe de altă parte, dacă $v_0 = o$ avem potrivit ecuaţiei generale (1)

$$x = x_0 \cos \omega t$$

şi, plecând dela $t = o$, vedem că cea mai mică valoare a lui t pentru care x devine nul este $t = \frac{\pi}{2\omega}$, adică $t = \frac{T}{4}$, valoare

independentă de poziţia iniţială. Aşa dar, *oricare ar fi poziţia iniţială* M_0, dacă punctul pleacă din această poziţie fără viteză iniţială, el va pune totdeauna acelaşi timp ca să ajungă în O. Se zice pentru aceasta că mişcarea este *tautocronă*.

4. Forţă funcţie de viteză: $X = F(v)$.

Avem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(v) \qquad \text{sau} \qquad m\frac{dv}{dt} = F(v)$$

deci

$$dt = m\frac{dv}{F(v)}, \qquad t = m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}$$

adică

$$t = \psi(v) \qquad \text{de unde} \qquad v = \varphi(t)$$

şi prin urmare

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t) \qquad \text{şi} \qquad x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt.$$

Dacă voim direct pe x în funcţie de v procedăm astfel:

$$dx = v\,dt = v.\,m\frac{dv}{F(v)}$$

deci

$$x = x_0 + m\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{F(v)} = f(v).$$

Exemplu. *Căderea verticală a unui punct greu într'un mediu rezistent.*

Presupunem rezistenţa proporţională cu patratul vitezei, punând

$$R = mg\frac{v^2}{k^2}.$$

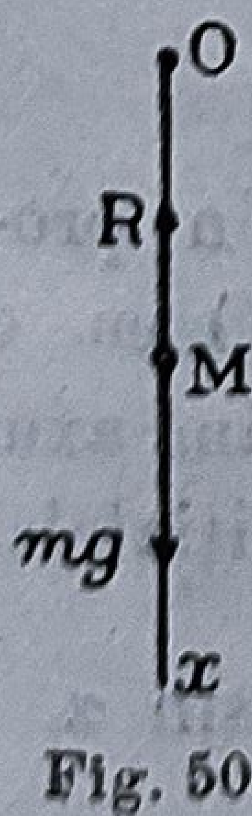


Fig. 50

Condiţii iniţiale: $t = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$. Avem, succesiv,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - mg\frac{v^2}{k^2};$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2)$$

$$(1) \qquad dt = \frac{k^2}{g}\cdot\frac{dv}{k^2 - v^2}; \quad t = \frac{k}{2g}\,\text{Log}\left(\frac{k+v}{k-v}\right) \text{ căci } v_0 = 0.$$

Deducem:

$$\frac{k+v}{k-v} = e^{\frac{2g}{k}t}, \qquad v = k\frac{e^{\frac{2g}{k}t}-1}{e^{\frac{2g}{k}t}+1}$$

sau

$$(2) \qquad v = \frac{dx}{dt} = k\,\frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}.$$

Mai integrând odată, se obţine

$$(3) \qquad x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{Log}\left(\frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2}\right).$$

Formulele (2) şi (3) dau pe v şi pe x în funcţie de t. Putem găsi direct o relaţie între v şi x:

$$dx = v\,dt = v.\frac{k^2}{g}\cdot\frac{dv}{k^2-v^2} = -\frac{k^2}{2g}\cdot\frac{(-2v)\,dv}{k^2-v^2}$$

şi, prin integraţiune,

$$(4) \quad x = -\frac{k^2}{2g}\left[\,\mathrm{Log}\,(k^2-v^2) - \mathrm{Log}\,k^2\,\right] = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{Log}\,\frac{k^2}{k^2-v^2}.$$

Formulele (2), (3) şi (4) dau soluţia completă a problemei. Formula (2) arată că viteza v tinde către k când t creşte necontenit. Deci *mişcarea tinde a deveni uniformă*.

Constanta k reprezintă de altfel viteza pentru care R devine egal cu mg.

II. MIŞCAREA IN PLAN.

1. **Forţă constantă.** *Mişcarea proectilelor în vid.* Un proectil, asimilat unui punct material, este asvârlit din O cu o viteză v_0 înclinată de unghiul α pe orizontala Ox Să luăm axul Oy vertical şi îndreptat în sus. Avem drept condiţii iniţialele:

$$t = 0\;;\; x_0 = 0\,,\; y_0 = 0\;;\; \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0\cos\alpha\,,\; \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0\sin\alpha.$$

Cum singura forţă aplicată este greutatea mg, ecuaţiile mişcărei vor fi: $m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$.

Traectoria. Din ecuaţiile mişcărei, simplificate cu factorul m, deducem succesiv prin integraţiune:

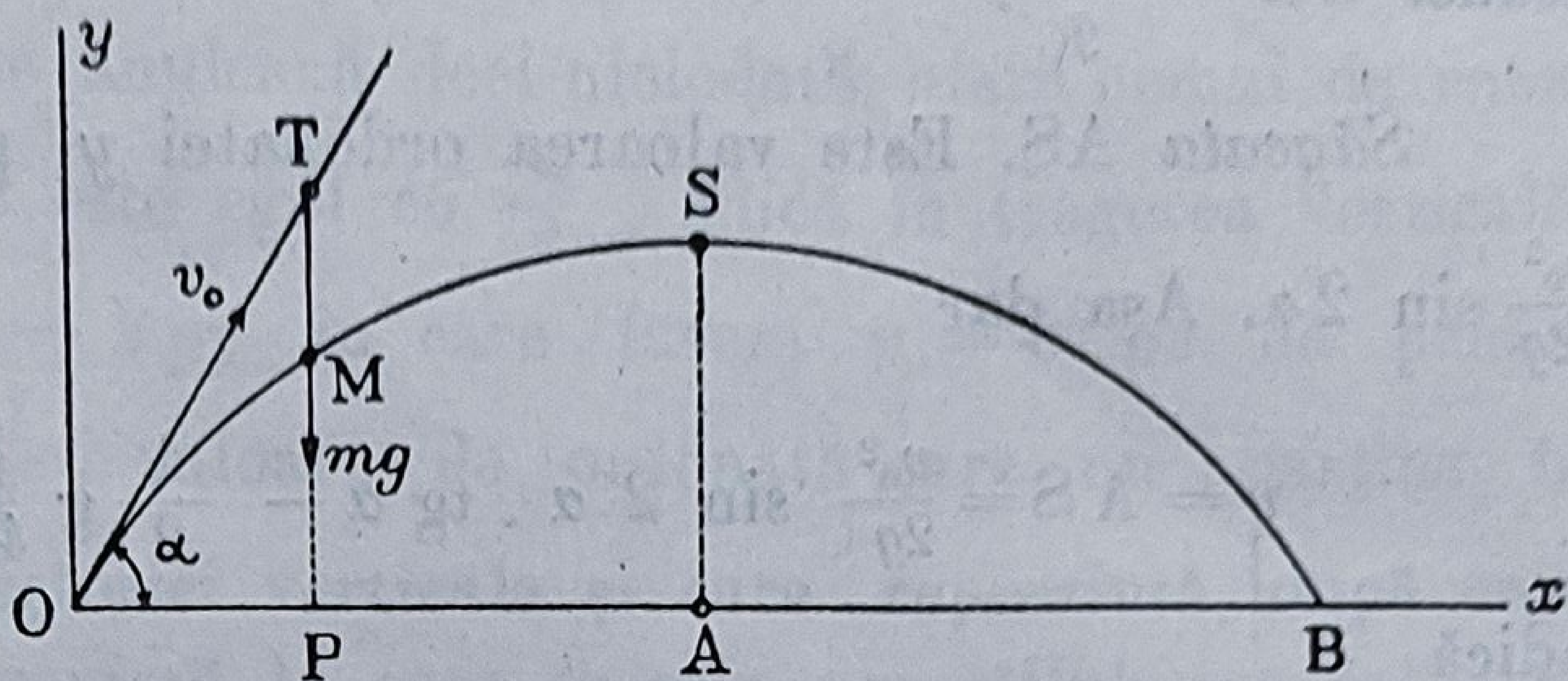


Fig. 51

$$\frac{dx}{dt} - v_0 \cos\alpha = 0, \qquad \frac{dy}{dt} - v_0 \sin\alpha = -gt$$

apoi

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

Ecuaţiile acestea două se puteau scrie şi imediat, observând că fără intervenţia greutăţii, proectilul ar fi parcurs indefinit tangenta MT cu o mişcare uniformă de viteză v_0 ; efectul greutăţii este prin urmare acela de a coborî neîncetat proectilul de o cantitate egală cu deviaţiunea $\frac{1}{2} g(\Delta t)^2$ în timpul Δt, şi prin urmare de cantitatea $\frac{1}{2} gt^2$ în timpul t. Deci

$$x = \mathrm{OT} \cos\alpha = v_0 t \cos\alpha \quad \text{şi} \quad y = \mathrm{TP} - \mathrm{TM} = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

Eliminarea lui t între x şi y ne dă

$$y = x \, tg\, \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

ecuaţie care reprezintă o parabolă cu axul vertical.

Bătaia OB. Se obţine făcând $y = 0$ în ecuaţia traectoriei; deci

$$x' = 0 \quad \text{şi} \quad x'' = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2\alpha \, . \, tg\, \alpha$$

adică

$$x'' = \mathrm{OB} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Bătaia este maximă pentru $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, adică $\alpha = \frac{\pi}{4}$; atunci $OB = \frac{v_0^2}{g}$.

Săgeata AS. Este valoarea ordonatei y pentru $x = \frac{OB}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$. Aşa dar

$$y = AS = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha - \frac{1}{2} g \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

adică

$$AS = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Săgeata este maximă pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ când $AS = \frac{v_0^2}{2g}$ adică egal cu jumătatea bătăii maxime.

Valoarea vitezei într'un punct al traectoriei. Avem

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2$$

sau

$$v^2 = v_0^2 - 2g\left(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2\right)$$

deci

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Această ecuaţie se putea obţine încă şi mai direct prin aplicaţiunea teoremei forţelor vii, care ne dă în adevăr imediat

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = - mgy$$

adică $$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Viteza are, după cum se vede, aceiaşi valoare în punctele traectoriei care au aceiaşi ordonată y. Ea are prin urmare în punctul de cădere B aceiaşi valoare ca în origina O. Cu începere din O, viteza descreşte necontenit până în vârful S al traectoriei când y are cea mai mare valoare. De altfel, viteza în punctul S fiind orizontală, este dată imediat de ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

care exprimă că *procția orizontală a oricărei dintre viteze este constantă și egală cu* $v_0 \cos \alpha$.

Viteza nu se anulează deci niciodată, afară numai de cazul particular când α este egal cu $\frac{\pi}{2}$, adică în tragerea verticală. Ecuația $v^2 = v_0{}^2 - 2\,gy$ în care facem $v = o$ ne dă pentru acest caz $y = \frac{v_0{}^2}{2g}$, valoare de ordonată care nu aparține în adevăr decât traectoriei verticale și care reprezintă, după cum știm, înălțimea maximă la care se suie proectilul aruncat vertical în sus.

Atingerea unui punct. Se cere unghiul α sub care trebue asvârlit proectilul, cu o viteză dată v_0, pentru ca traectoria sa să treacă printr'un punct M′ de cordonate x', y'.

Valoarea lui α rezultă bineînțeles din ecuația

$$y' = x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2}\, g \frac{x'^2}{v_0{}^2 \cos^2 \alpha}$$

sau

$$y' = x' \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2}\, g \frac{x'^2}{v_0{}^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Deducem:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2\,v_0{}^2}{gx'} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2\,v_0{}^2\,y'}{gx'^2} + 1 = o.$$

Pentru ca problema să fie posibilă trebue să avem

$$\left(\frac{v_0{}^2}{gx'}\right)^2 - \left(\frac{2\,v_0{}^2\,y'}{gx'^2} + 1\right) > o$$

de unde

$$y' < \frac{v_0{}^2}{2\,g} - \frac{gx'^2}{2v_0{}^2}.$$

Să considerăm curba

$$y = \frac{v_0{}^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0{}^2}.$$

Aceasta este înfășurătoarea curbei (1) când variem pe α [1].)

---

[1] Infășurătoarea unei curbe $A\lambda^2 + 2\,B\lambda + C = o$ este $B^2 - AC = o$.

Ea este o parabolă, cu vârful în C la distanța $OC = \frac{v_0^2}{2g}$, focarul fiind în O, iar parametrul egal cu $OB = \frac{v_0^2}{g}$. Trebue ca M′ să fie situat dedesubtul acestei curbe. Atunci sunt două traectorii care trec prin M′, corespunzând celor 2 valori α date de ecuația (1). Dacă punctul este situat pe curba înfășurătoare, cele 2 valori α se confundă, fiind egale cu rădăcina dublă:

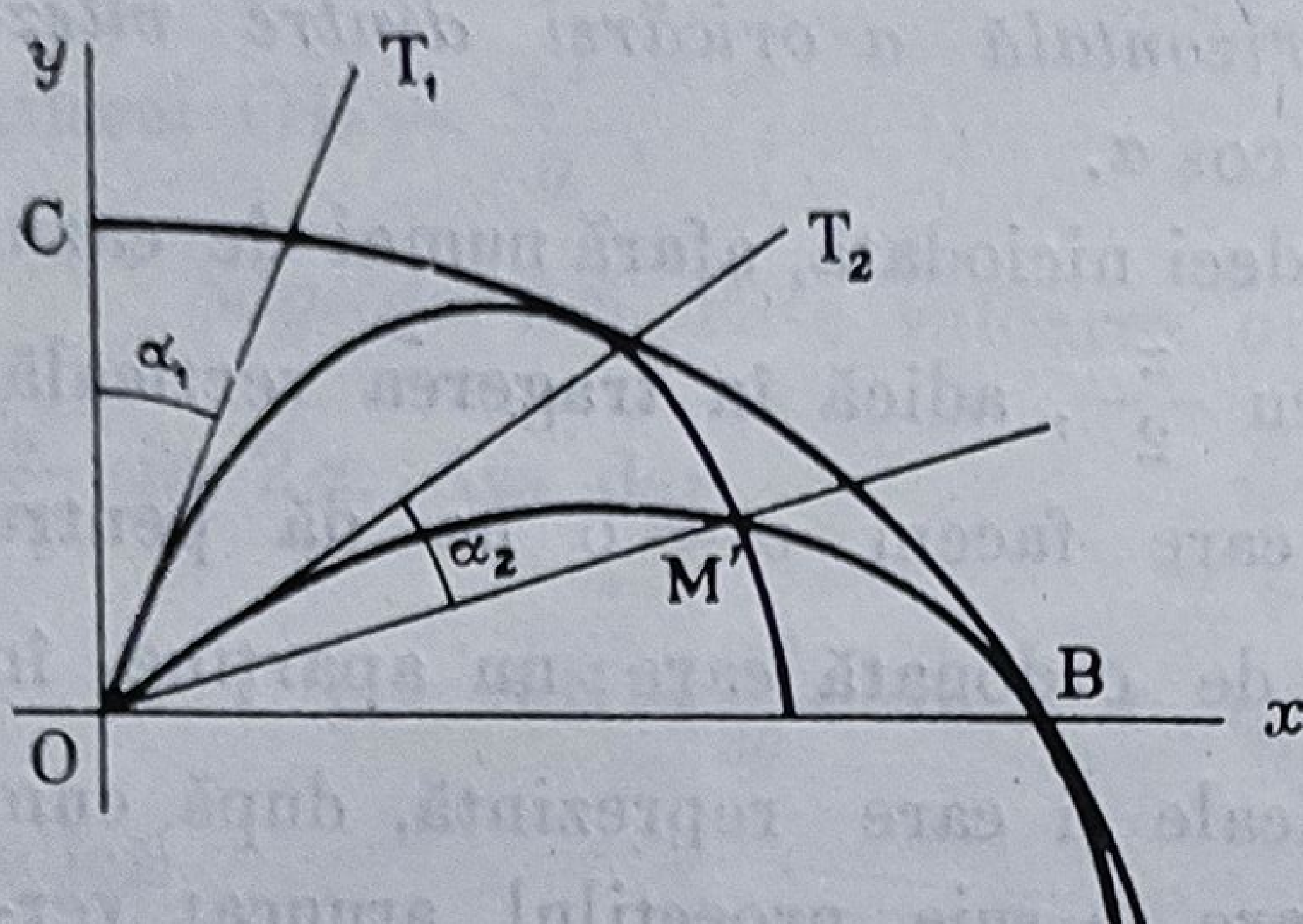


Fig. 52

$$tg\,\alpha = \frac{v_0^2}{gx'}.$$

Parabola CB este zisă *parabolă de siguranță*. Se poate ușor demonstra geometricește că cele două unghiuri α_1 și α_2 de pe figură sunt egale unul cu altul.

2. **Curba balistică**. Se numește astfel traectoria pe care o descrie în aer un proectil, asimilat unui punct material de aceiași greutate ca proectilul.

In mișcarea sa, punctul material întâmpină din partea aerului o rezistență R direct opusă vitezei sale și funcție de această viteză, pe care să o reprezentăm prin $m c F(v)$, c fiind o constantă. Punctul fiind astfel supus acțiunii forțelor mg și $m c F(v)$, ecuațiile mișcării sale sunt

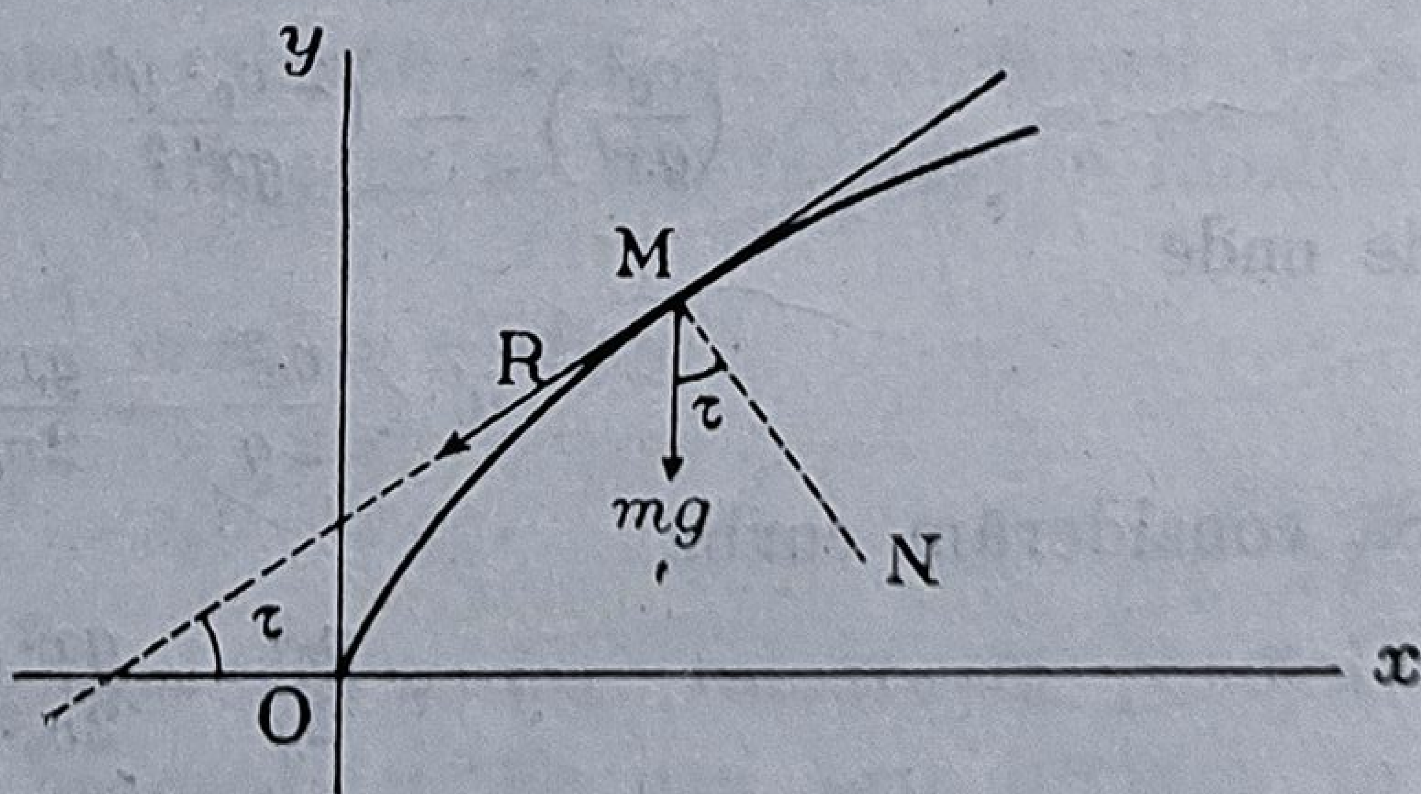


Fig. 53

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mcF(v)\cos\tau$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mcF(v)\sin\tau - mg.$$

Acest sistem de ecuații diferențiale de ordinul al doilea

poate fi înlocuit prin următorul sistem de 4 ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi:

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \tau , \qquad \frac{dy}{dt} = v \sin \tau \, .$$

$$\frac{d (v \cos \tau)}{dt} = - c \, F(v) \cos \tau$$

$$\frac{d (v \sin \tau)}{dt} = - c \, F(v) \sin \tau - g$$

care determină pe x, y, v şi τ în funcţie de t, cu condiţiile iniţiale

$$x = 0 , \qquad y = 0 ; \qquad v = v_0 , \qquad \tau = \tau_0 \, .$$

Putem înlocui ecuaţia a patra prin următoarea, ce se găseşte dacă înmulţim ecuaţia a patra cu $\cos \tau$ şi o scădem din ecuaţia a treia înmulţită cu $\sin \tau$:

$$(a) \qquad v \frac{d\tau}{dt} = - g \cos \tau \, .$$

Această din urmă ecuaţie se poate dealtfel deduce direct din proecţia mişcării punctului material pe normala MN. Avem în adevăr, însemnând prin ρ raza de curbură în M,

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \tau$$

însă

$$\rho = - \frac{ds}{d\tau} {}^{1)} = - \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = - v \frac{dt}{d\tau}$$

şi înlocuirea lui ρ prin $- v \dfrac{dt}{d\tau}$ în egalitatea precedentă simplificată cu m, ne dă pe (a).

Să observăm în sfârşit, că împărţind ecuaţia a treia prin ecuaţia (a) obţinem

$$d (v \cos \tau) = \frac{c}{g} v \, F(v) \, d\tau \, .$$

Această din urmă ecuaţie nu conţine decât variabilele v şi τ. Ea este ecuaţia diferenţială a hodografului [2]) în cordonate

---

[1]) Se ia semnul minus înaintea membrului al doilea, deoarece s creşte când τ descreşte, aşa că derivata $\dfrac{ds}{d\tau}$ este negativă.

[2]) *Cinematica*, pag. 62.

polare, de oarece v este raza vectoare a unui punct al hodografului şi τ unghiul lui v cu direcţia fixă Ox.

In definitiv, vedem că soluţia problemei de faţă depinde de integraţiunea următorului sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$dx = v \cos \tau \, dt \tag{1}$$

$$dy = v \sin \tau \, dt \tag{2}$$

$$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v \, F(v) \, d\tau \tag{3}$$

$$v \, d\tau = - g \cos \tau \, dt. \tag{4}$$

Dacă putem integra ecuaţia (3) adică ecuaţia diferenţială a hodografului, singura care nu conţine decât două variabile v şi τ, atunci rezolvirea complectă a problemei se reduce la simple cuadraturi. In adevăr, trăgând pe dt din ecuaţia (4) şi înlocuindu-l apoi în (1) şi (2) găsim

$$dt = - \frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau} \tag{5}$$

$$dx = - \frac{v^2}{g} d\tau \tag{6}$$

$$dy = - \frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \tau . \, d\tau \tag{7}$$

aşa că dacă am avea integrala ecuaţiei (3) adică ecuaţia hodografului în cordonate polare

$$v = \psi(\tau)$$

atunci înlocuind pe v în ecuaţiile precedente prin $\psi(\tau)$ am obţine prin nişte simple cuadraturi expresiile elementelor t, x şi y în funcţie de τ.

Câteva particularităţi ale curbei balistice. Presupunem că rezistenţa aerului R şi deci $F(v)$ este o funcţie continuă, crescătoare, anulându-se şi devenind infinită odată cu v.

1. *Viteza orizontală $v \cos \tau$ descreşte necontenit.* In adevăr cele două ecuaţii (3) şi (6)

$$d(v \cos \tau (= \frac{c}{g} v \, F(v) \, d\tau$$

$$dx = - \frac{v^2}{g} d\tau$$

ne dau prin diviziune

$$\frac{d(v\cos\tau)}{dx} = -\frac{cF(v)}{v}.$$

Membrul al doilea fiind totdeauna negativ, rezultă că $v\cos\tau$ descrește necontenit când x crește. In vid, s'a văzut că $v\cos\tau$ păstrează din potrivă o valoare constantă.

2. Fie M_1 și M_2 două puncte ale curbei balistice situate pe aceiași orizontală. *Vitezele v_1 și v_2 din cele două puncte, înclinările τ_1 și τ_2 ale tangentelor pe orizontală și distanțele M_1A și M_2A ale punctelor la săgeata traectoriei nu sunt egale între ele ca în vid* și avem

$$v_1 > v_2, \qquad \tau_1 < \tau_2, \qquad M_1A > M_2A.$$

a). Să aplicăm în adevăr teorema forțelor vii între M_1 și M_2. Cum travaliul greutății mg este nul, punctele M_1 și M_2 fiind la acelaşi nivel, avem, însemnând prin s_1 și s_2 lungimile de arc de la origina O a curbei balistice până la cele două puncte:

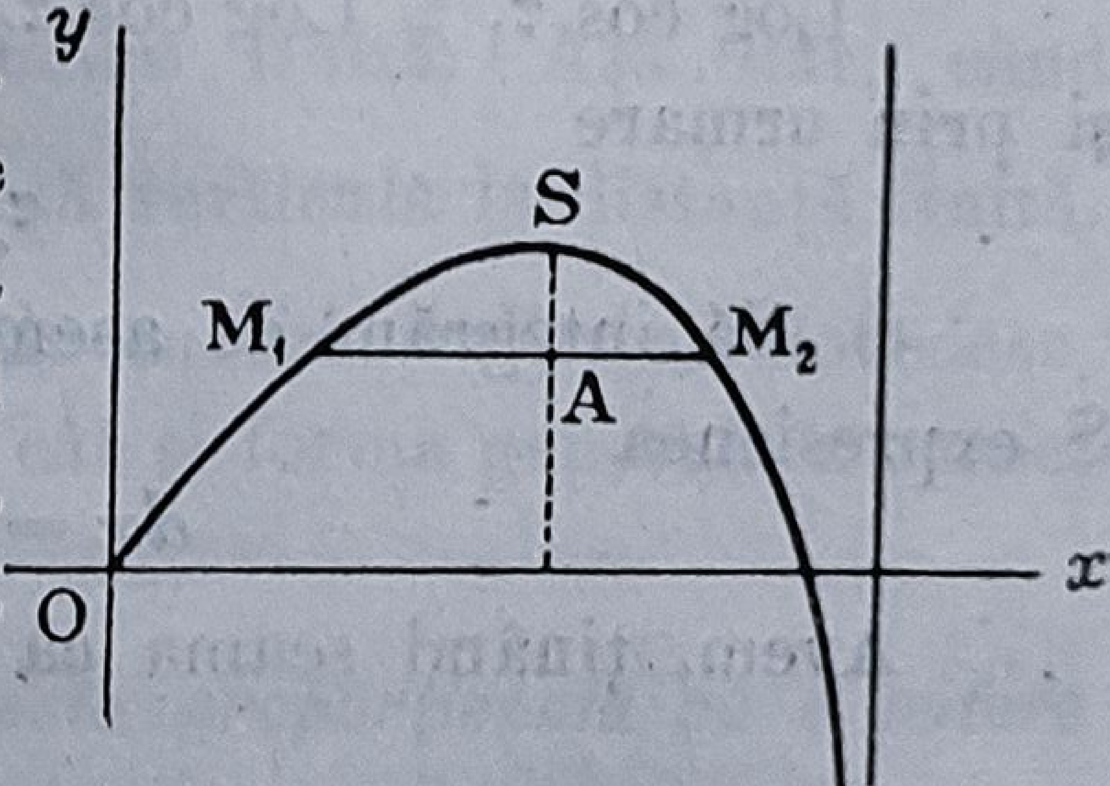


Fig. 54

$$\frac{1}{2}m(v_2{}^2 - v_1{}^2) = -\int_{s_1}^{s_2} R\,ds$$

travaliul elementar al rezistenței R fiind negativ și egal cu $-R\,ds$.

Deci

$$v_2{}^2 - v_1{}^2 < 0$$

și prin urmare

$$v_1 > v_2.$$

b). Plecând dela ecuația (7)

$$dy = -\frac{v^2}{g}\,tg\,\tau\,.\,d\tau$$

sau

$$tg\,\tau\,.\,d\tau = -\frac{g}{v^2}\,dy$$

să integrăm dela M_1 la vârf, adică dela τ_1 la zero. Obținem

$$\text{Log} \cos \tau_1 = -\int_{y_1}^{y_s} \frac{g}{v^2} dy$$

și în mod analog, integrând dela M_2 la vârf,

$$\text{Log} \cos \tau_2 = -\int_{y_2}^{y_s} \frac{g}{v^2} dy .$$

Ori, după cum am văzut mai sus, pentru 2 puncte situate pe aceiași orizontală, viteza în punctul de pe ramura urcătoare este mai mare decât viteza din punctul de pe ramura coborâtoare, deci fiecare element $\frac{g}{v^2} dy$ al integralei a doua este superior elementului corespunzător al integralei întâia, de unde rezultă, ținând seama de semne, că

$$\text{Log} \cos \tau_1 > \text{Log} \cos \tau_2 \qquad \text{sau} \qquad \cos \tau_1 > \cos \tau_2$$

și prin urmare

$$\tau_1 < \tau_2 .$$

c). Să integrăm de asemenea între M_1 și S și între M_2 și S expresiunea

$$dx = dy \operatorname{cotg} \tau .$$

Avem, ținând seama că $y_2 = y_1$,

$$M_1 A = \int_{y_1}^{y_s} \operatorname{cotg} \tau \, d\tau$$

și

$$AM_2 = \int_{y_s}^{y_2} \operatorname{cotg} \tau \, d\tau = \int_{y_1}^{y_s} - \operatorname{cotg} \tau \, d\tau .$$

Raționând ca la litera *b*) ajungem imediat la concluzia că

$$M_1 A > AM_2 .$$

3. *Viteza poate să treacă printr'un minimum dincolo de vârful traectoriei.*

Din ecuația diferențială a hodografului

$$d\,(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v \, F(v) \, d\tau$$

deducem

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau} \left[\sin \tau + \frac{c}{g} F(v) \right] .$$

Pentru ca viteza să poată trece printr'un minimum, trebue să avem

$$\frac{dv}{d\tau} = o \quad , \quad \text{deci} \quad \sin\tau + \frac{c}{g}\,F(v) = o$$

egalitate care nu poate fi satisfăcută decât pentru $\tau < o$, adică dincolo de vârf.

4. *Traectoria are o asimptotă verticală la distanță finită.* Avem în adevăr

$$x = -\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{v^2}{g}\,d\tau \qquad \text{şi} \qquad y = -\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{v^2}{g}\,\text{tg}\,\tau\,d\tau\,.$$

Ori, când τ tinde către valoarea $-\frac{\pi}{2}$, $tg\,\tau$ tinde către infinit şi prin urmare integrala a doua devine infinită la limită, pe câtă vreme prima integrală rămâne finită. Aşa dar, când $\tau = -\frac{\pi}{2}$, curba admite o asimptotă verticală la distanță finită.

Toate aceste particularități ale curbei balistice dovedesc, că atât mişcarea pe această curbă cât şi forma generală a curbei diferă cu totul de mişcarea în vid.

Cazul când rezistența aerului este proporțională cu o putere a vitezei.

Să presupunem că avem

$$R = mc\,F(v) = mc\,\frac{v^n}{k^n}$$

k fiind o constantă. In acest caz, ecuația diferențială (3) a hodografului

$$d\,(v\cos\tau) = \frac{c}{g}\,v\,F(v)\,d\tau$$

adică

$$\frac{d\,(v\cos\tau)}{v} = \frac{c}{g}\,\frac{v^n}{k^n}\,d\tau$$

devine integrabilă. In adevăr, devizând ambii membri ai ei prin $v^n \cos^{n+1}\tau$, obținem

$$\frac{d\,(v\cos\tau)}{(v\cos\tau)^{n+1}} = \frac{c}{gk^n}\,\frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}$$

şi integraţiunea acestei ecuaţii între limitele τ_0 şi τ, ţinând seama că pentru $\tau = \tau_0$ avem $v = v_0$, ne dă

$$\frac{1}{(v\cos\tau)^n} - \frac{1}{(v_0\cos\tau_0)^n} = -\frac{cn}{gk^n}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}.$$

Avem astfel o relaţie care ne permite să calculăm pe v în funcţie de τ, adică să determinăm ecuaţia hodografului

$$v = \psi(\tau).$$

După cum am mai spus, problema poate fi atunci complect rezolvită prin cuadraturi, căci ecuaţiile (5), (6) şi (7) ne dau

$$t = -\frac{1}{g}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{v\,d\tau}{\cos\tau}$$

$$x = -\frac{1}{g}\int_{\tau_0}^{\tau} v^2\,d\tau$$

$$y = -\frac{1}{g}\int_{\tau_0}^{\tau} v^2\,tg\,\tau\,d\tau.$$

3. Atracţiune invers proporţională cu patratul distanţei mobilului la un centru fix, direcţia vitezei iniţiale fiind oarecare.

Acceleraţia fiind centrală, ştim că traectoria este o curbă plană şi că legea ariilor are loc în planul curbei, adică

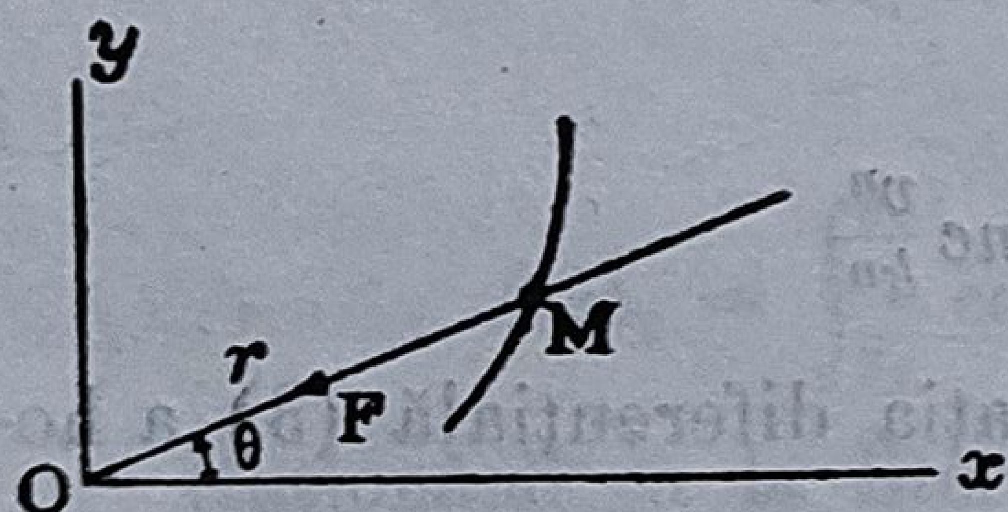


Fig. 55

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const}.$$

Prin ipoteză $F = -\frac{mk}{r^2}$ însemnând prin k o constantă pozitivă. Cum există o funcţie de forţe

$$U = \int -\frac{mk}{r^2}\,dr = \frac{mk}{r} + \text{const}.$$

avem

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{mk}{r} - \frac{mk}{r_0}$$

adică

(1) $\quad v^2 = \frac{2k}{r} + h$ însemnând prin h o constantă.

Ori, după cum s'a văzut în Cinematică la paragraful accelerațiilor centrale,

$$(2) \qquad v^2 = c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\,\theta} \right)^2 \right].$$

Egalând pe (1) cu (2) obținem

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\,\theta} \right)^2 \right] = 2 \frac{k}{r} + h$$

ecuație diferențială care ne dă pe r în funcție de θ. Integrala ariilor $r^2 \frac{d\theta}{dt} = c$ în care vom înlocui spre ex. pe r în funcție de θ ne va da pe θ în funcție de t.

Este însă mai simplu de a proceda în felul următor:

a). *Determinarea traectoriei.* Aplicarea formulei lui *Binet* ne dă

$$F = -\frac{mk}{r^2} = -\frac{mc^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\,\theta^2} \right]$$

deci

$$\frac{k}{c^2} = \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\,\theta^2}.$$

Putem scrie:

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{c^2} \right)}{d\theta^2} = -\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{c^2} \right)$$

și comparativ cu ecuația cunoscută $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ în care ω ar fi egal cu 1, obținem prin integrațiune

$$\frac{1}{r} - \frac{k}{c^2} = \frac{k}{c^2}\, e \cos(\theta - \alpha)$$

e și α fiind constante arbitrare. Deducem

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} \left[1 + e \cos(\theta - \alpha) \right]$$

sau

$$r = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$$

deci *traectoria este o secțiune conică având unul din focare în centrul fix.*

In formula precedentă putem oricând presupune pe $e > o$ căci altfel nimic nu ne împedecă de a mări pe α cu 180 de grade pentru a schimba semnul cosinusului. Unghiurile θ și α sunt cele arătate de figură; e este excentricitatea iar $\frac{c^2}{k}$ parametrul.

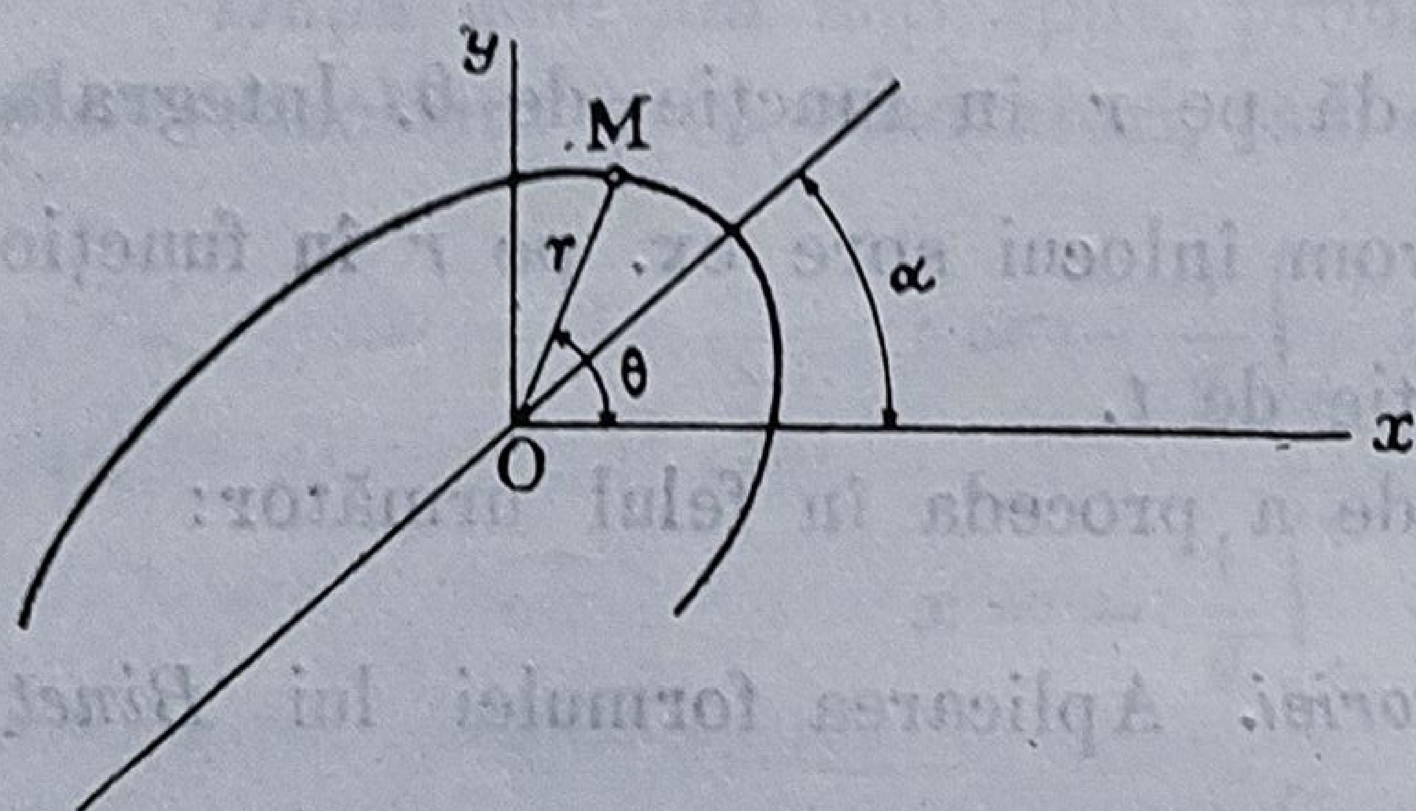


Fig. 56

b). ***Determinarea constantelor arbitrare.*** Condiții inițiale: r_0, θ_0, v_0 ε_0, însemnând prin ε unghiul vitezei v cu raza vectoare OM. Ecuația traectoriei conține 3 constante arbitrare c, e, și α pe care trebue să le determinăm. Formulele pe care le vom utiliza sunt:

$$(1) \qquad \frac{1}{r} - \frac{k}{c^2} = \frac{k}{c^2} e \cos(\theta - \alpha)$$

din care deducem

$$\frac{-d\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{ke}{c^2} \sin(\theta - \alpha) ;$$

$$(2) \qquad v \cos \varepsilon = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{c}{r^2} = -c \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{ke}{c} \sin(\theta - \alpha) ;$$

$$(3) \qquad v \sin \varepsilon = r \frac{d\theta}{dt} = r \frac{c}{r^2} = \frac{c}{r} .$$

Introducând valorile inițiale, cele trei formule (1), (2) și (3) ne dau

$$\frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2} = \frac{k}{c^2} e \cos(\theta_0 - \alpha)$$

$$v_0 \cos \varepsilon_0 = \frac{k}{c} e \sin(\theta_0 - \alpha)$$

$$v_0 \sin \varepsilon_0 = \frac{c}{r_0}$$

de unde deducem

$$c = r_0 v_0 \sin \varepsilon_0$$

$$e \sin(\theta_0 - \alpha) = \frac{c}{k} v_0 \cos \varepsilon_0 = \frac{r_0 v_0^2 \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0}{k}$$

$$e \cos(\theta_0 - \alpha) = \frac{c^2}{k}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{k}{c^2}\right) = \frac{r_0 v_0^2 \sin^2 \varepsilon_0}{k} - 1 .$$

Prima formulă ne dă valoarea lui c. Celelalte două determină pe α și pe e.

Dacă ridicăm la patrat pe cele două din urmă și le adunăm, găsim

$$1 - e^2 = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \varepsilon_0}{k^2} \left(\frac{2k}{r_0} - v_0^2\right)$$

ceea ce arată că traectoria va fi o elipsă ($1 - e^2 > o$) o parabolă ($1 - e^2 = o$) sau o hiperbolă ($1 - e^2 < o$) după cum cantitatea $\frac{2k}{r_0} - v_0^2$ va fi pozitivă, nulă sau negativă. Cum această cantitate nu depinde de ε_0, vedem, ceea ce este foarte important, că *natura secțiunii conice pe care o descrie mobilul nu depinde decât de distanța inițială r_0 și de viteza inițială v_0 iar nu și de direcția ε_0 a acestei viteze.*

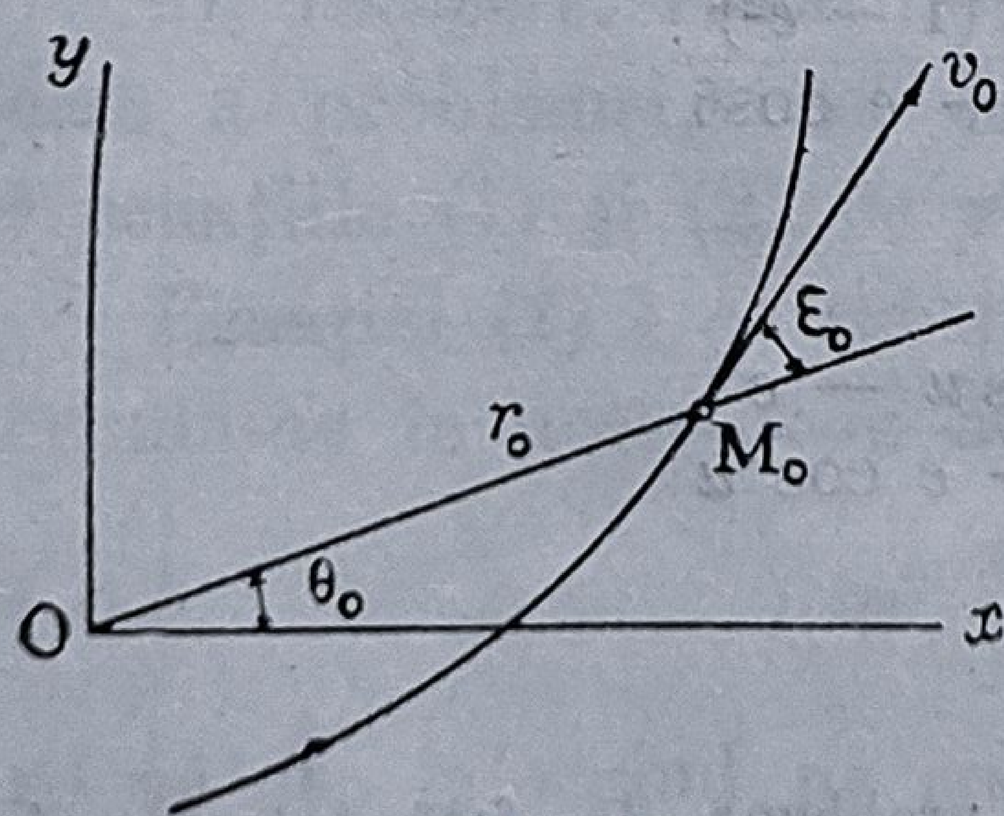


Fig. 57

Pe de altă parte, mărimea axului cel mare a, fiind procurată de egalitate cunoscută din geometria analitică:

$$\frac{c^2}{k} = a(1 - e^2)$$

care dă

$$\frac{1}{a} = \frac{k(1 - e^2)}{c^2}$$

avem, înlocuind pe c^2 și pe $1 - e^2$ prin valorile lor precedente

$$\frac{1}{a} = \frac{k}{r_0^2\, v_0^2 \sin^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{r_0^2\, v_0^2 \sin^2 \varepsilon_0}{k^2} \left(\frac{2k}{r_0} - v_0^2 \right) = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{k}.$$

Vedem astfel că şi a este independent de ε_0. Conchidem din acest fapt şi din cel precedent, că *dacă diverse puncte materiale pornesc din aceiaşi poziţie iniţială cu aceiaşi viteză în diferite direcţii, ele descriu toate secţiuni conice de aceiaşi natură şi având acelaşi ax mare.*

c). ***Expresiunea cordonatelor în funcţie de timp.*** Ecuaţia traectoriei combinată cu integrala ariilor $r^2 \frac{d\theta}{dt} = c$ ne permite a exprima pe r şi pe θ în funcţie de timp. In Astronomie[1]) se procedează altfel. Se exprimă r şi θ în funcţie de o variabilă auxiliară u şi se determină valoarea lui u în funcţie de timp.

Să efectuăm această operaţie, presupunând că traectoria ar fi o elipsă. Inlocuind parametrul $\frac{c^2}{k}$ prin $a\,(1 - e^2)$ ecuaţia conicei raportată la axul ei cel mare ca ax polar ($\alpha = o$) este

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

Ori, într'o elipsă r este întotdeauna coprins între $a\,(1 - e)$ şi $a\,(1 + e)$[2]) aşa că putem pune

$$r = a\,(1 - e \cos u) \tag{1}$$

şi egalitatea

$$a\,(1 - e \cos u) = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos\theta}$$

ne dă pentru θ:

$$\cos \theta = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \tag{2}$$

---

[1]) Vom vedea în capitolul următor că problema de faţă interesează mişcarea planetelor.

[2]) $a - c = a - a \frac{c}{a} = a\,(1 - e)$ şi $a + c = a\,(1 + e)$.

de unde

$$(2)^{\text{bis}} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}.$$

Ne trebue acum u în funcţie de timp. Ne servim în acest scop de integrala ariilor $r^2\, d\,\theta = cdt$, calculând mai întâi pe $d\,\theta$ în funcţie de u.

Ecuaţia (2) diferenţiată, ne dă ţinând socoteală de $(2)^{\text{bis}}$

$$d\,\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\,du$$

deci

$$r^2\, d\theta = a^2\,(1-e\cos u)^2 \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\,du = a^2\sqrt{1-e^2}$$

$(1 - e \cos u)\, du$ şi, potrivit integralei ariilor,

$$a^2\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos u)\,du = c\,dt$$

sau
$$(1-e\cos u)\,du = n\,dt$$

punând pentru prescurtare

$$\frac{c}{a^2\sqrt{1-e^2}} = n.$$

Integraţiunea ecuaţiei diferenţiale precedente ne dă însfârşit:

$$(3) \qquad u - e\sin u = nt + \gamma$$

γ fiind o constantă arbitrară.

d). *Incheere.* Ecuaţiile (1), (2) şi (3) ne dau soluţia completă a problemei, căci ecuaţia (3) ne dă pe u în funcţie de t iar ecuaţiile (1) şi (2) pe r şi pe θ în funcţie de u.

Ecuaţiei (2) i se substitue de obicei o formulă mai comodă, servindu-ne în acest scop de relaţia trigonometrică

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

care ne dă, înlocuind pe $\cos\theta$ prin expresia sa (2),

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

In definitiv dar, soluţia problemei este dată de sistemul de ecuaţii

$$r = a\,(1 - e \cos u)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

$$u - e \sin u = nt + \gamma.$$

Putem da constantei $n = \dfrac{c}{a^2\sqrt{1-e^2}}$ o formă foarte simplă, observând că potrivit formulei ştiute din Cinematică: $\lambda = \dfrac{1}{2}\, ct$, valoarea lui c este egală cu îndoitul ariei descrisă de raza vectoare într'un timp, divizată prin acest timp, aşa că dacă raza vectoare descrie aria întreagă a elipsei

$$\pi\, ab = \pi\, a^2 \left(\frac{b}{a}\right) = \pi\, a^2 \sqrt{1-e^2}\ ^{1)}$$

şi însemnăm prin T durata revoluţiei punctului pe orbita sa, avem

$$c = \frac{2\,\pi\, a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$$

şi prin urmare

$$n = \frac{2\,\pi}{T}.$$

Cantitatea n se numeşte *viteză unghiulară mijlocie* şi productul nt este zis *mişcare mijlocie* a punctului mobil.

In Astronomie, unghiului θ i se zice *anomalie adevărată* iar unghiului u, *anomalie excentrică*.

III. MIŞCARE IN SPAŢIU.

Atracţiune proporţională cu distanţa mobilului la un centru fix, direcţia vitezei iniţiale fiind oare care.

---

[1]) $\dfrac{b^2}{a} = a\,(1-e^2)$.

Luăm centrul fix ca origină a unui sistem de axe dreptunghiulare. Forța de atracție F trecând prin O, suntem în cazul accelerațiilor centrale. Oricare ar fi legea pecare ar urma-o forța, știm că mișcarea este plană și că legea ariilor are loc pentru orice plan trecând prin punctul O. Planul curbei este determinat de vectorul vitezei inițiale și de punctul O.

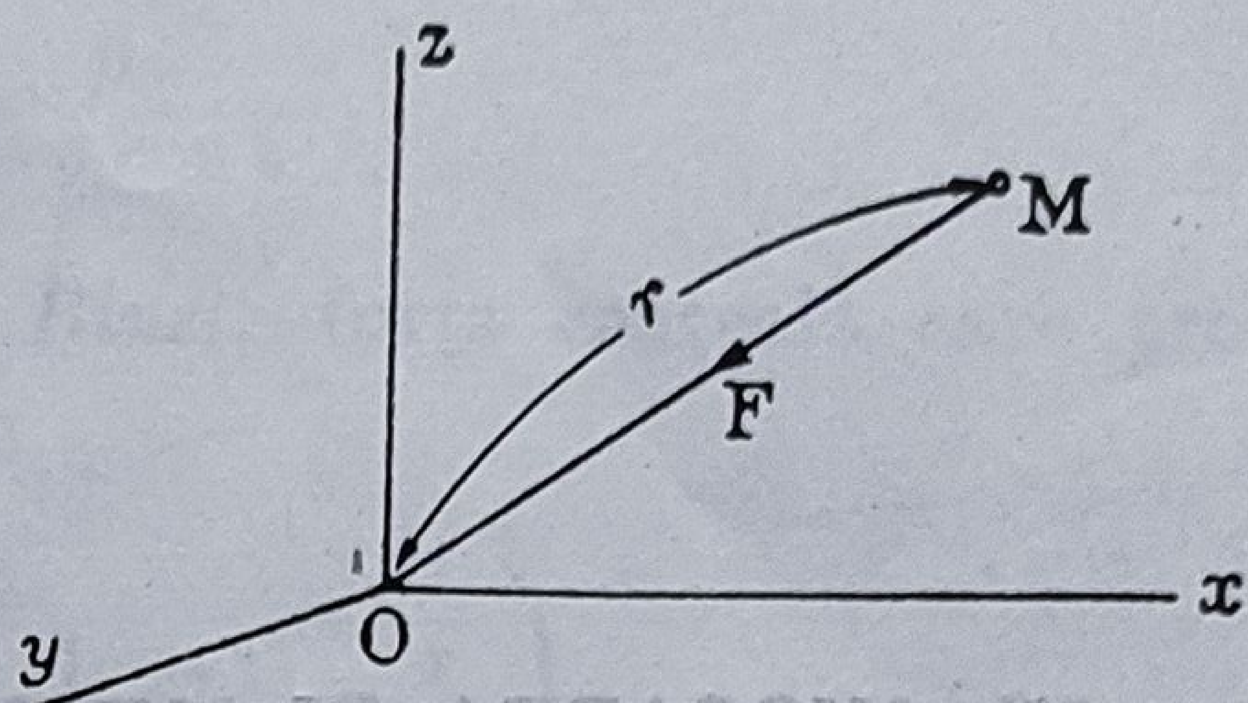


Fig. 58

Să cercetăm în particular cazul când $F = kr$.

Cosinusurile directoare ale lui F fiind $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$ ecuațiile mișcărei se scriu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kr\left(-\frac{x}{r}\right)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = kr\left(-\frac{y}{r}\right)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = kr\left(-\frac{z}{r}\right)$$

adică, punând $\frac{k}{m} = \omega^2$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \quad , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

ecuații pe cari le cunoaștem din Cinematică, dela mișcarea eliptică în spațiu. Integrațiunea ne dă

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \qquad y = b\cos(\omega t + \beta), \qquad z = c\cos(\omega t + \gamma)$$

$a, b, c; \alpha, \beta, \gamma$ fiind 6 constante arbitrare care se determină prin condițiile inițiale $x_0, y_0, z_0; x'_0, y'_0, z'_0$.

Așa dar mișcarea este eliptică, iar proecția ei pe axe dă trei mișcări vibratoare simple. Centrul elipsei este în punctul O.

VI. MIŞCAREA PLANETELOR. — GRAVITAŢIA UNIVERSALĂ.

1. Legile lui Képler. Legile mişcării planetelor au fost date de *Képler* în anul 1618. Aceste legi deduse din observaţiile astronomice ale lui *Tycho-Brahé* sunt în număr de trei şi se enunţă în felul următor, considerând planetele şi soarele ca simple puncte materiale:

1⁰. ***Planetele se mişcă în planuri trecând prin soare şi razele vectoare duse din soare descriu arii proporţionale cu timpul.***

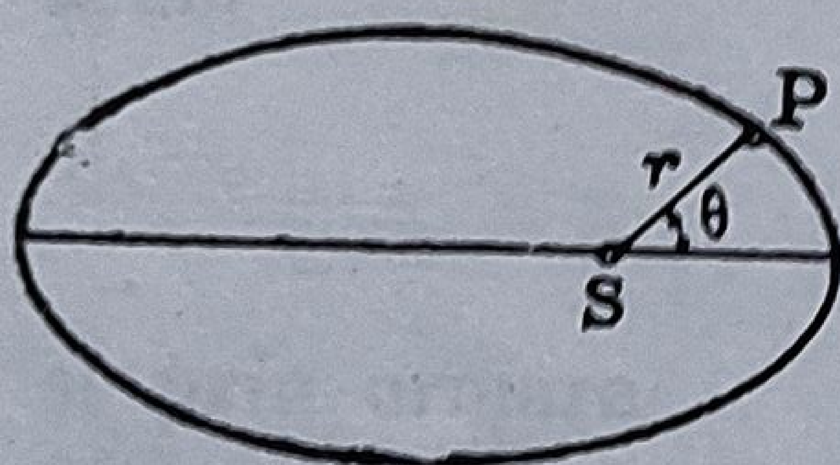


Fig. 59

2⁰. ***Orbitele planetelor sunt elipse, soarele ocupând unul din focare;***

3⁰. ***Patratele duratelor de revoluţie ale planetelor în jurul soarelui, sunt proporţionale cu cuburile axelor mari ale orbitelor ce descriu.***

Din aceste legi, *Newton* a dedus legea forţei care produce mişcarea în felul următor:

Consecinţa legii întâia. Ştim, că atunci când un punct se mişcă într'un plan în aşa fel că raza vectoare, care uneşte mobilul cu un centru fix din plan, descrie arii proporţionale cu timpurile, acceleraţia şi deci forţa care solicită mobilul trece necontenit prin punctul fix.

Din această teoremă şi din prima lege a lui Képler, rezultă că *forţa care solicită o planetă trece necontenit prin soare.*

Consecinţa legii a doua. După această lege, traectoria planetei este o elipsă, cu soarele într'unul din focare. Insemnând

prin p parametrul și prin e excentricitatea elipsei, avem deci ca ecuație a orbitei, în cordonate polare, luând polul în soare,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

Ori, potrivit formulei lui *Binet*, forța centrală care produce mișcarea are ca expresiune

$$F = -\frac{m c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \theta^2}\right)$$

c fiind constanta ariilor și m massa planetei.

Inlocuind în această expresiune pe

$$\frac{1}{r} \quad \text{și pe} \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \theta^2}$$

prin valorile ce rezultă din ecuația elipsei, adică

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos \theta}{p}, \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \theta^2} = -\frac{e \cos \theta}{p}$$

se obține

$$F = -\frac{m c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$$

valoare negativă, care corespunde prin urmare unei forțe atractive. Așa dar, în conclusiune: *Forța care solicită o planetă este atractivă și intensitatea ei variază în raport invers cu patratul distanței dela planetă la soare.*

Potrivit expresiunii forței, s'ar părea că coeficientul $\frac{c^2}{p}$ variază dela o planetă la alta; legea treia a lui Képler va stabili că acest coeficient rămâne acelaș ori care ar fi planeta considerată.

Consecința legii a treia. Fie a și b lungimile semi axelor elipsei descrisă de planetă; avem $p = \frac{b^2}{a}$.

Pe de altă parte știm că constanta ariilor, c, este egală cu îndoitul ariei descrisă de raza vectoare într'un timp oare

care t, divizată prin t. Dacă prin urmare însemnăm prin T durata unei revoluții complecte, avem

$$c = 2 \frac{\pi a b}{T}$$

și ca urmare

$$\frac{c^2}{p} = 4 \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\left(\frac{b^2}{a}\right) . T^2} = 4 \pi^2 \left(\frac{a^3}{T^2}\right) .$$

Ori, potrivit legii a treia a lui Képler, raportul $\frac{a^3}{T^2}$ este o constantă. In consecință, expresiunea lui F devine

$$F = - \frac{m k}{r^2}$$

însemnând prin k valoarea constantei $\frac{c^2}{p}$. Așa dar: *Forța care solicită ori ce planetă este o atracțiune proporțională cu massa planetei și invers proporțională cu patratul distanței dela planetă la soare.*

2. **Gravitația universală.** După ce a stabilit legea forței care produce mișcarea planetelor, Newton și-a pus problema următoare.

«*Să se afle traectoria ce descrie un punct material solicitat de o forță centrală și atractivă* $F = - \frac{km}{r^2}$ ».

Noi am tratat această problemă la capitolul precedent și am văzut că traectoria poate fi o elipsă, o parabolă sau o hiperbolă, după cum diferența $\frac{2 k}{r_0} - v_0{}^2$ este pozitivă, nulă sau negativă.

Cum cometele descriu în jurul soarelui elipse foarte alungite sau parabole, cu focarul în soare, Newton s'a întrebat atunci dacă legea forței care produce mișcarea cometelor nu este identică cu aceea a mișcării planetelor.

Ori, observațiile astronomice au probat că legea ariilor

are loc şi în cazul cometelor. Aşa dar expresiunea forţei motrice este şi pentru comete tot

$$F = -\frac{mc^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$$

iar raportul $\frac{c^2}{p}$ s'a dovedit pe de o parte a avea aceiaşi valoare pentru toate cometele, iar pe de altă parte a fi egal cu acela care corespunde mişcării planetelor.

Newton a găsit astfel că legea

$$F = -\frac{km}{r^2}$$

este o lege generală pentru planete şi comete, coeficientul k depinzând numai de soare şi reprezentând atracţiunea soarelui asupra unui punct de massă egală cu 1 aşezat la unitatea de distanţă.

Mergând mai departe, Newton a cercetat şi mişcarea sateliţilor în jurul planetelor. Considerate ca absolute, aceste mişcări sunt eliptice şi verifică şi ele destul de sensibil legea ariilor. Aşa dar ori-ce planetă atrage sateliţii săi proporţional cu massele lor şi invers proporţional cu patratul distanţei satelitului la planetă. Fie cărei planete îi corespunde un coeficient particular de atracţiune λ, aşa că forţa de atracţie a planetei asupra unui punct de masă m_1, aşezat la distanţa r_1 de planetă, este egală cu $\frac{\lambda m_1}{r_1^2}$.

Cum planetele atrag sateliţii şi ori-ce corp de pe suprafaţa lor, ele atrag desigur şi soarele.

Fie M massa soarelui şi m massa unei planete; k coeficientul de atracţie al soarelui şi λ acela al planetei. Soarele şi planeta fiind aşezate la distanţa r, atracţiunea soarelui asupra planetei este $\frac{km}{r^2}$ şi aceea a planetei asupra soarelui $\frac{\lambda M}{r^2}$. Ori, aceste două atracţii sunt egale între ele, potrivit principiului acţiunii şi reacţiunii; deci avem

$$km = \lambda M \qquad \text{sau} \qquad \frac{k}{M} = \frac{\lambda}{m}.$$

Asociind soarele altor planete de masse m', m'', ... şi caracterizate prin coeficienţii de atracţie λ', λ'', ... vom găsi un şir de raporturi egale

$$\frac{k}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda'}{m'} = \frac{\lambda''}{m''} = \ldots = f$$

însemnând prin f valoarea comună a raporturilor.

Atracţiunea mutuală dintre soare şi o planetă oarecare poate prin urmare să fie pusă sub forma

$$f \frac{M m}{r^2}$$

valoarea coeficientului f fiind aceiaşi pentru toate planetele.

Newton a generalizat acest rezultat, enunţând următorul principiu, cunoscut sub numele de *principiul atracţiunei sau gravitaţiunei universale:*

„In sistemul solar compus din soare, din comete, planete şi sateliţii lor, două puncte materiale oarecare se atrag proporţional cu masselor lor şi invers proporţional cu patratul distanţei dintre ele".

Constanta de atracţie f, care reprezintă atracţia unităţii de massă asupra unităţii de massă la unitatea de distanţă, nu este o constantă pur numerică; ea depinde de unităţile de lungime, de timp şi de forţă (sau de massă). In adevăr, dacă însemnăm prin F forţa de atracţiune mutuală între două masse m şi m', avem

$$F = f . \frac{m m'}{r^2} \text{ şi prin urmare } f = \frac{F . r^2}{m m'} .$$

Ori, dimensiunile unei masse în sistemul M. K. S. sunt $FL^{-1} T^2$; dimensiunile lui f sunt deci date de către raportul

$$\frac{FL^2}{F^2 L^{-2} T^4} \text{ adică } F^{-1} L^4 T^{-4} .$$

Determinarea lui f este o chestiune de Fizică experimentală. In sistemul C. G. S, avem

$$f = \left(\frac{1}{3862}\right)^2 .$$

VII. EXEMPLE DE MIŞCĂRI PE SUPRAFEŢE ŞI PE CURBE.

I. PENDULUL SFERIC.
(Mişcare pe o suprafaţă)

1. **Pendul sferic.** Să considerăm un punct material de greutate mg ataşat la extremitatea M a unui fir inextensibil şi fără massă, cealaltă extremitate O a firului fiind fixă.

Punctul este în echilibru când firul ocupă poziţia verticală OA. Greutatea mg face atunci echilibru tracţiunei exercitată de fir asupra punctului.

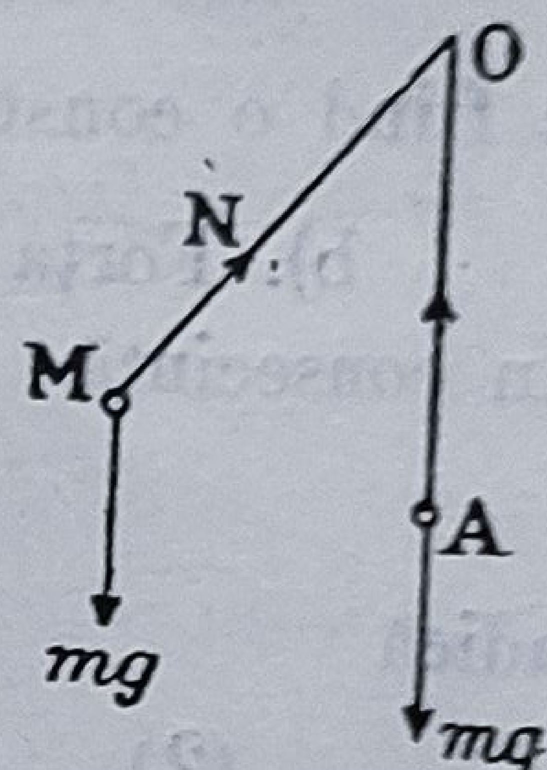


Fig. 60

Dacă depărtăm punctul de poziţia lui de echilibru şi-l abandonăm acţiunii greutăţii, după ce mai întâi i-am imprimat o viteză iniţială oarecare, punctul se va mişca aşa fel că distanţa sa la extremitatea fixă a firului rămâne constantă. Avem deci cazul mişcării unui punct pe suprafaţa unei sfere de centru O şi de rază OM.

Acţiunea suprafeţii asupra punctului este aceea pe care o exercită firul asupra punctului pentru a-l menţine pe sferă. Ea este îndreptată pe raza OM, normală sferei.

2. **Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării.** Sistem $Oxyz$, dreptunghiular, axul Oz vertical şi îndreptat în jos; N, acţiunea firului, l, lungimea sa. Avem:

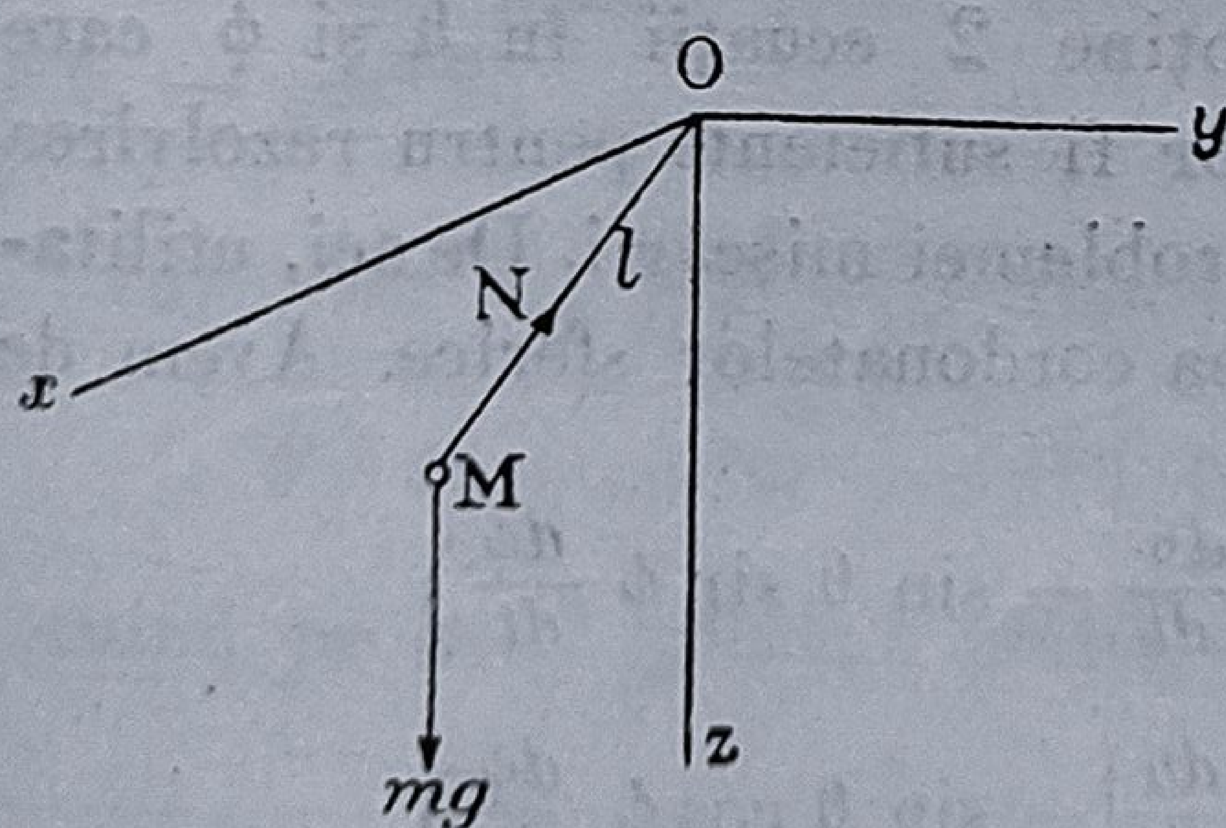


Fig. 61

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{l}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{l}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{l} + mg$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

deci 4 ecuaţii pentru determinarea necunoscutelor x, y, z, N în funcţie de t. Aplicaţiunea teoremelor generale şi întrebuin-

ţarea cordonatelor sferice ne permit de a înlocui acest sistem prin alte ecuaţii mai simple.

3. **Aplicaţiunea teoremelor generale.** a). Rezultanta forţelor mg şi N întâlneşte necontenit axul fix Oz. Momentul ei în raport cu acest ax fiind nul, teorema ariilor are deci loc pe planul xOy, adică avem

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c \tag{1}$$

c fiind o constantă arbitrară.

b). Forţa direct aplicată mg admite funcţia de forţe mgz. In consecinţă

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgz - mgz_0$$

adică

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\,gz + c' \tag{2}$$

c' fiind o nouă constantă arbitrară.

4. **Intrebuinţarea cordonatelor sferice.** Fie OP intersecţia planului vertical MOZ cu planul orizontal Oxy. Avem, pe figură, $(OH = l \sin\theta)$:

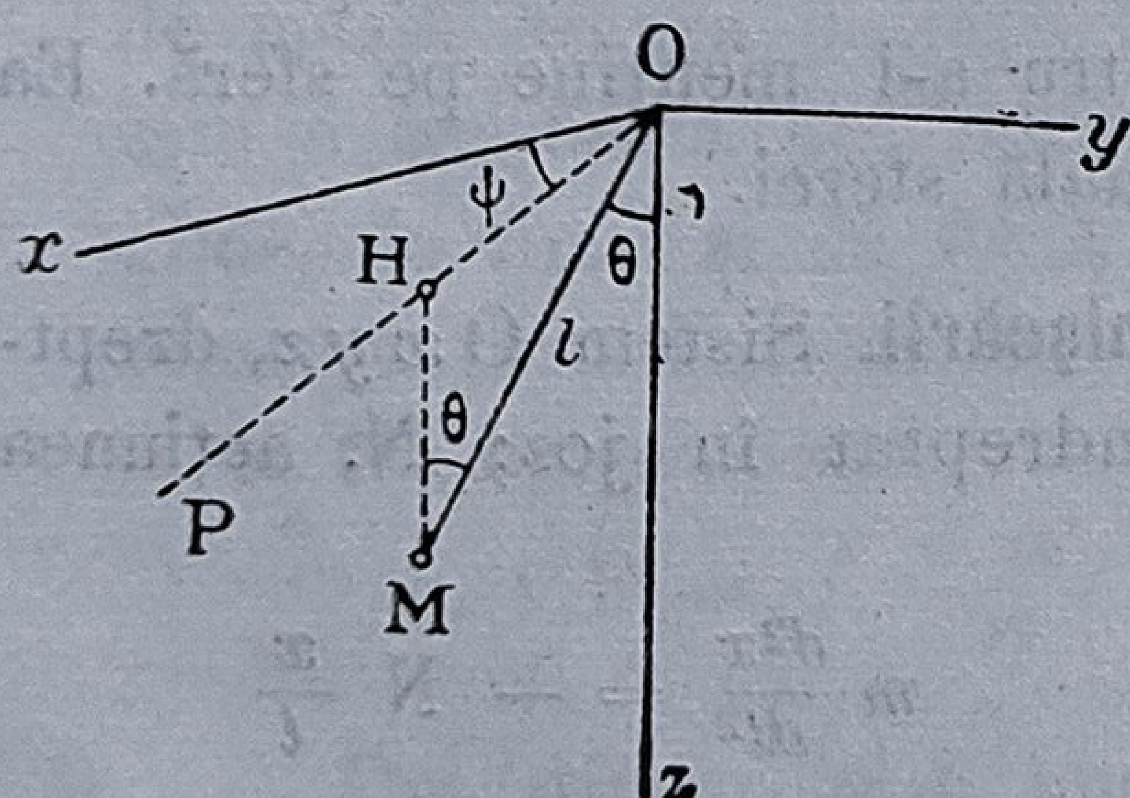


Fig. 62

$$x = l\sin\theta.\cos\psi$$
$$y = l\sin\theta.\sin\psi$$
$$z = l\cos\theta.$$

Inlocuind pe x, y, z prin aceste expresii în ecuaţiile (1) şi (2) vom obţine 2 ecuaţii în θ şi ψ care vor fi suficiente pentru rezolvirea problemei mişcării. De aci, utilitatea cordonatelor sferice. Avem de altfel

$$\frac{dx}{dt} = l\left(\cos\theta\cos\psi\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\sin\psi\frac{d\psi}{dt}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = l\left(\cos\theta\sin\psi\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = -l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Inlocuind pe $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ prin expresiunile de mai sus, în ecuaţiile (1) şi (2), se obţine sistemul de două ecuaţii

$$(1)^{\text{bis}} \qquad l^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = c^{1)}$$

$$(2)^{\text{bis}} \qquad l^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \right] = 2\, gl \cos\theta + c'$$

care se poate scrie, însemnând prin θ_0, θ'_0, ψ'_0, valorile iniţiale ale elementelor $\theta, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$:

$$(1)^{\text{ter}} \qquad \sin^2\theta . \frac{d\psi}{dt} = \sin^2\theta_0 . \psi'_0$$

$$(2)^{\text{ter}} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0) + \theta'^2_0 + \sin^2\theta_0 . \psi'^2_0 .$$

Eliminând pe $\frac{d\psi}{dt}$ obţinem ecuaţia

$$\sin^2\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0) \sin^2\theta + (\theta'^2_0 + \sin^2\theta_0\, \psi'^2_0) \sin\theta^2 - \sin^4\theta_0\, \psi'^2_0$$

care se mai poate scrie, observând că $\sin^2\theta - \sin^2\theta_0 = \cos^2\theta_0 - \cos^2\theta$,

$$(3) \quad \sin^2\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)(1 - \cos^2\theta) + \theta'^2_0 (1 - \cos^2\theta) + \sin^2\theta_0\, \psi'^2_0 (\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta).$$

Inlocuind pe $\cos\theta$ printr'o variabilă x, observăm că membrul

---

[1]) Ecuaţia aceasta se putea scrie imediat, căci potrivit legii ariilor avem $r^2 \frac{d\psi}{dt} = c$ şi $r = l \sin\theta$.

al doilea este un polinom de gradul al 3 [lea] în x, ale căruia 3 rădăcini sunt întotdeauna reale. In adevăr, dacă în acest polinom. înlocuim succesiv pe x prin

$$-\infty \quad , \quad -1 \quad , \quad \cos\theta_0 \quad , \quad +1$$

găsim rezultate ale cărora semne sunt, respectiv,

$$+ \quad , \quad - \quad , \quad + \quad , \quad - \quad .$$

Deci, o rădăcină negativă, în valoare absolută mai mare decât unitatea, şi două rădăcini coprinse între -1 şi $+1$:

$$-k \quad , \quad \cos\theta_1 \quad , \quad \cos\theta_2 \quad .$$

Ca urmare, polinomul se poate pune sub forma

$$-\frac{2g}{l}\cdot(x+k)\ (x-\cos\theta_1)\ (x-\cos\theta_2)$$

adică

$$(4) \qquad \frac{2g}{l}\ (\cos\theta+k)\ (\cos\theta-\cos\theta_1)\ (\cos\theta_2-\cos\theta).$$

5. **Reducerea problemei la cuadraturi.** Ecuaţia (3) în care înlocuim membrul al 2 [lea] prin expresiunea (4) ne dă

$$dt = \frac{\sin\theta\,.\,d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\ (\cos\theta+k)\ (\cos\theta-\cos\theta_1)\ (\cos\theta_2-\cos\theta)}}$$

şi ecuaţia $(1)^{\text{ter}}$ ne dă ca urmare

$$d\psi = \sin^2\theta_0\psi'_0\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{\frac{2g}{l}\ (\cos\theta+k)\ (\cos\theta-\cos\theta_1)\ (\cos\theta_2-\cos\theta)}}.$$

Integrând, cu începere dela momentul iniţial, avem

$$(5) \qquad t = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sin\theta\ d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}\ (\cos\theta+k)\ (\cos\theta-\cos\theta_1)\ (\cos\theta_2-\cos\theta)}}$$

$$(6) \quad \psi-\psi_0=\sin^2\theta_0\psi'_0\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{\frac{2g}{l}\ (\cos\theta+k)\ (\cos\theta-\cos\theta_1)\ (\cos\theta_2-\cos\theta)}}.$$

Relaţiunea dintre θ şi t se exprimă prin mijlocul funcţiunilor zise eliptice.

Din egalitatea (5) se vede că pentru ca t să fie real, unghiul θ trebue să rămână coprins între cele două unghiuri θ_1 şi θ_2 căci $\cos\theta + k$ fiind pozitiv, semnul polinomului de sub radical depinde numai de acela al productului $(\cos\theta - \cos\theta_1)$ $(\cos\theta_2 - \cos\theta)$. Aşa dar *extremitatea pendulului nu iasă din zona orizontală limitată de cele două mici cercuri care corespund unghiurilor* θ_1 *şi* θ_2.

6. **Cazuri particulare.** 1°. Să presupunem $\theta_1 = \theta_2$. In acest caz avem $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ şi $\theta = \theta_0$. Polinomul în x trebue să admită ca rădăcină dublă pe $x = \cos\theta_0$. Exprimând că atât acest polinom cât şi prima lui derivată se anulează pentru $x = \cos\theta_0$, se obţin condiţiile

$$\theta'_0 = 0 \qquad \text{şi} \quad \psi'^2_0 \cos\theta_0 = \frac{g}{l}.$$

Pendulul descrie un cerc orizontal, cu o viteză unghiulară $\frac{d\psi}{dt}$ constantă şi egală cu viteza unghiulară iniţială ψ'_0 (ecuaţia 1^{ter}).

2°. Să presupunem $\psi'_0 = 0$. Ecuaţia $(1)^{ter}$ arată că atunci $\frac{d\psi}{dt}$ este şi el nul şi prin urmare unghiul ψ rămâne constant, ceea ce înseamnează că mişcarea se efectuează într'un plan vertical. Formula (3) se reduce, după eliminarea lui $\sin^2\theta$, la următoarea

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \theta'^2_0}}$$

şi aceasta ne dă legile pendulului circular, pe care le vom studia mai jos ca exemplu de mişcare a unui punct pe o curbă fixă.

II. PENDULUL CIRCULAR.
(Mişcare pe o curbă)

1. Dacă depărtând punctul de poziţia lui de echilibru A, îl aducem în M_0, şi-l abandonăm apoi acţiunei greutăţii fără a-i imprima vre-o viteză iniţială, el se va mişca în planul vertical M_0OA pe un arc de cerc, descris din O ca centru.

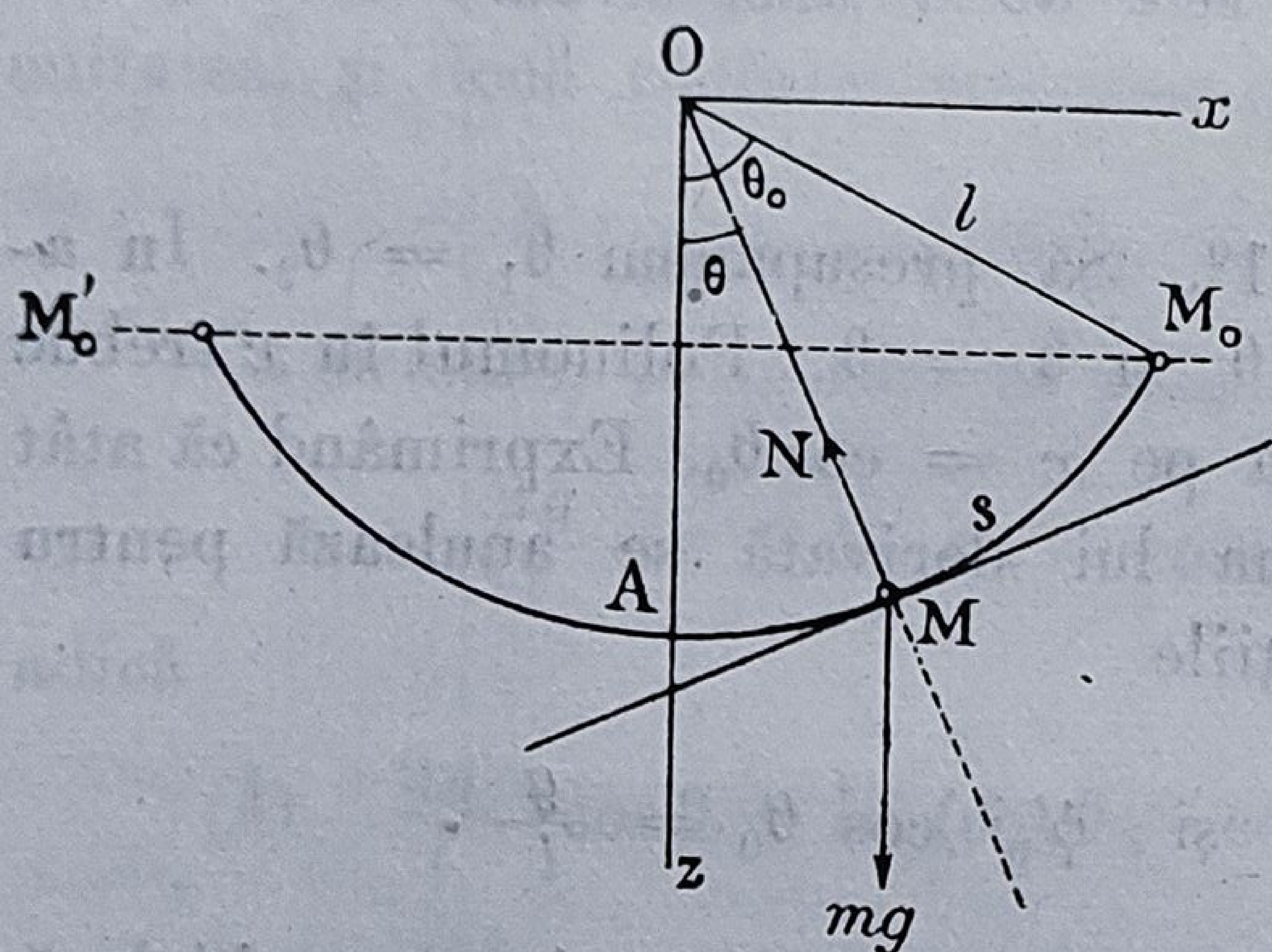


Fig. 63

Putem deci privi punctul material M ca fiind obligat de a se mişca pe un arc de cerc, sub efectul unei forţe egală cu greutatea sa.

Teorema forţelor vii ne dă

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = mg\,(z - z_0)$$

adică

$$(1) \qquad v^2 = 2g\,(z - z_0).$$

Această relaţiune arată că viteza, nulă în punctul M_0, redevine nulă în punctul M'_0, simetricul lui M_0 în raport cu verticala Oz. Rezultă că punctul va oscila indefinit dela M_0 la M'_0, apoi de la M'_0 la M_0 şi aşa mai departe. Toate aceste oscilaţii fiind identice, va fi suficient să studiem pe una singură dintre ele, sau chiar numai mişcarea dela M_0 la A.

2. **Reducerea problemei la cuadraturi.** In formula (1) să exprimăm variabilele v şi z, în funcţie de unghiul θ.

Figura ne dă

$$z = l \cos\theta, \qquad z_0 = l \cos\theta_0$$

şi însemnând cu s arcul M_0M, (dela M_0 la M)

$$s = l\,(\theta_0 - \theta) \qquad \text{deci} \qquad v = \frac{ds}{dt} = -\,l\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Formula (1) devine în consecinţă

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,gl\,(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

de unde deducem

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{d\,\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

luând înaintea radicalului semnul minus, de oare ce θ se micşorează când creşte t şi derivata $\frac{d\theta}{dt}$ este deci negativă.

Integrând cu începere dela momentul iniţial, avem

$$(2) \qquad t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Membrul al doilea este o integrală eliptică.

3. **Cazul micilor oscilaţii.** Să presupunem pe θ_0 foarte mic. Atunci şi θ este foarte mic şi avem destul de aproximativ

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \qquad \cos\theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$$

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_0^2 - \theta^2).$$

Formula de mai sus (2) devine

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}$$

şi integrând

$$(3) \qquad t = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \text{arc}\ \cos\frac{\theta}{\theta_0}.$$

Deducem

$$\theta = \theta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Făcând $\theta = 0$ în formula (3), se obţine $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$; acesta este timpul pe care-l pune mobilul ca să ajungă din M_0 în A. Deci durata T a oscilaţiei dela M_0 la M'_0 va fi

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Această durată este, după cum se vede, independentă de unghiul inițial θ_0, însă numai în ordinea de aproximație ce am admis.

Dacă într'o localitate de pe pământ, măsurăm direct valoarea lui T, formula precedentă ne permite de a calcula pe g. Avem în adevăr

$$g = l\left(\frac{\pi}{T}\right)^2.$$

Notă. Știm că teorema forțelor vii se deduce din proecția mișcării pe tangenta la traectorie. Dacă prin urmare ne servim de ecuația generală

$$m\frac{dv}{dt} = F_t$$

pe care ne-o dă această proecție, vom ajunge după o integrațiune tot la rezultatul pe care ni-l dă aplicațiunea directă a teoremei forțelor vii.

Astfel, în cazul de mai sus, proecția mișcării pe tangenta din M la arcul de cerc, ne dă, $\frac{dv}{dt}$ fiind egal cu $-l\frac{d^2\theta}{dt^2}$,

$$-ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\sin\theta$$

adică

$$\text{(4)} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

sau

$$2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}dt = -2\frac{g}{l}\sin\theta\,.\,d\theta$$

și integrând

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Deci aceiași ecuație la care conduce aplicația directă a teoremei forțelor vii.

Când θ este foarte mic, adică în cazul micilor oscilații, putem înlocui pe $\sin\theta$ prin θ și ecuația (4) devine atunci

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta.$$ [1]

Integrațiunea ne dă

$$\theta = a\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + \alpha\right)$$

a și α fiind constante arbitrare. Condițiile $\theta = \theta_0$ și $\frac{d\theta}{dt} = 0$ pentru $t = 0$, introduse în expresia lui θ și a derivatei sale

$$\frac{d\theta}{dt} = -a\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + \alpha\right)$$

ne dau

$$\begin{cases} \theta_0 = a\cos\alpha \\ -a\sin\alpha\sqrt{\frac{g}{l}} = 0 \end{cases}$$

adică $\alpha = 0$ și $a = \theta_0$. Regăsim astfel soluțiunea

$$\theta = \theta_0\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

4. **Cazul oscilațiilor oarecare.** Să calculăm acum durata oscilațiunii, în cazul când θ_0 ar fi oarecare.

Avem potrivit formulei (2)

$$T = -2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

sau

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Putem evita funcțiunile eliptice în felul următor: Potrivit relațiilor trigonometrice

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad 1 - \cos\theta_0 = 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

---

[1] Observând identitatea acestei ecuații cu ecuația diferențială a mișcării vibratoare simple, putem spune imediat că durata T a unei oscilații (M_0 la M'_0) este egală cu $\frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$ adică $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

avem

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Să schimbăm acum de variabilă, punând

$$(5) \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi$$

ceea ce este permis, deoarece de la o la θ_0, $\sin\frac{\theta}{2}$ rămâne tot timpul mai mic decât $\sin\frac{\theta_0}{2}$; unghiul φ va varia dela o la $\frac{\pi}{2}$ când θ variază dela o la θ_0.

Deducem

$$(6) \quad \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} = \sqrt{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}(1-\sin^2\varphi)} = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi . \sqrt{2}.$$

Pe de altă parte, diferenţiând relaţia (5) obţinem

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi . d\varphi$$

şi în consecinţă

$$(7) \qquad d\theta = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Ţinând seama de egalităţile (6) şi (7) expresiunea lui T devine

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}.\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi}\cdot\frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

adică

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Integrala poate fi exprimată sub formă de serie, după puterile lui $\sin\frac{\theta_0}{2}$. Avem, în adevăr, potrivit formulei binomului,

$$(8)\left(1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}\sin^4\frac{\theta_0}{2}$$

$$\sin^4\varphi+\cdots+\frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots 2n}\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}\cdot\sin^{2n}\varphi+\cdots.$$

Cum această serie este uniform convergentă, dacă punem pentru prescurtare

$$u_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi$$

avem, înmulţind egalitatea (8) cu $d\varphi$ şi integrând,

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\left[u_0+\frac{1}{2}u_2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{1.3}{2.4}u_4\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots 2n}u_{2n}\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}+\cdots\right].$$

Se cunoaşte însă din Analiză formula de recurenţă

$$u_{2n}=\frac{2n-1}{2n}u_{2n-2}$$

din care rezultă

$$u_{2n-2}=\frac{2n-3}{2n-2}u_{2n-4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_4=\frac{3}{4}u_2$$

$$u_2=\frac{1}{2}u_0.$$

Inmulţirea tuturor acestor egalităţi între ele ne procură formula generală

$$u_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2}u_0.$$

Insă

$$u_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi}{2}$$

deci, în definitiv,

$$u_{2n} = \frac{1.\,3.\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.\,4.\ldots(2n-2)\,2n} \cdot \frac{\pi}{2}\,.$$

Aplicaţiunea acestei formule ne dă

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_0}{2} + \cdots + \left(\frac{1.\,3.\,\ldots(2n-1)}{2.\,4.\,\ldots\,2n}\right)^2 \sin^{2n}\frac{\theta_0}{2} + \cdots\right].$$

Când unghiul θ_0 este foarte mic, se poate reduce paranteza la primul ei termen, ceea ce ne dă valoarea

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

pe care o cunoaştem. Obţinem însă o valoare şi mai apropiată, dacă luăm din paranteză primii doi termeni, ceea ce ne dă, înlocuind pe $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ prin $\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2$:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right).$$

5. **Mişcarea pendulului într'un mediu rezistent.** Să presupunem rezistenţa R a mediului proporţională cu viteza şi să reprezentăm intensitatea ei prin $2\,mhv$. Această forţă este îndreptată pe tangenta la traectorie şi în sensul invers al mişcării.

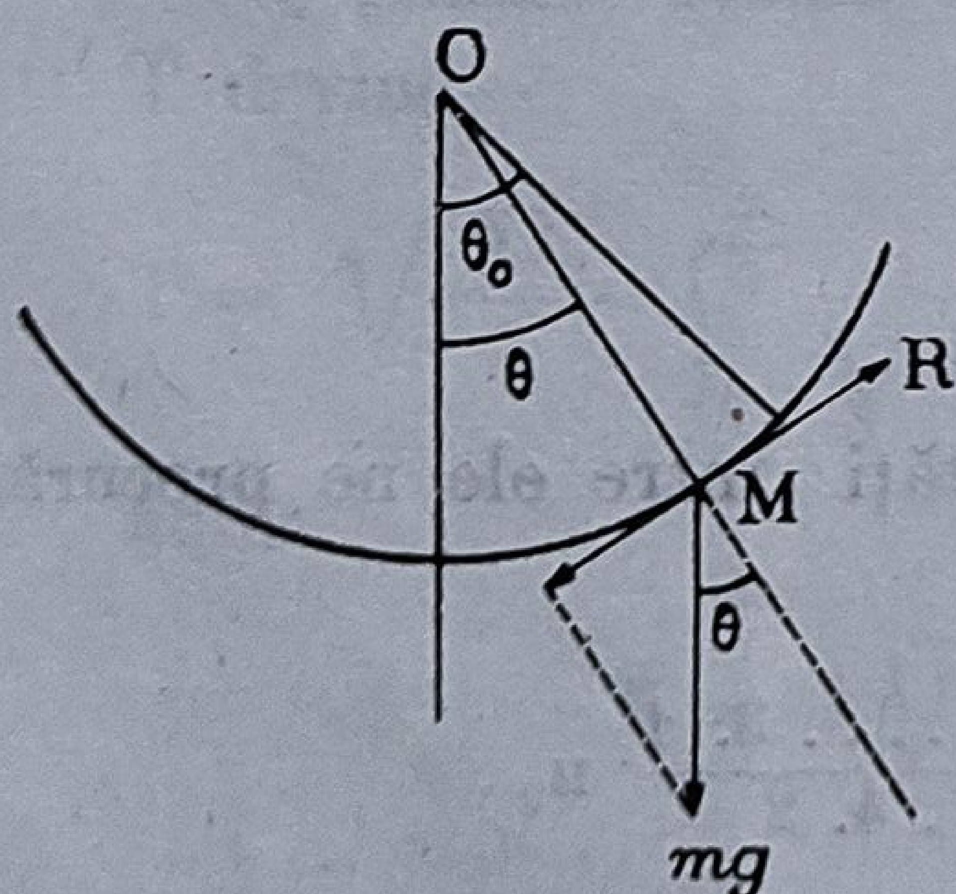


Fig. 64

Forţa tangenţială F_t având ca expresie

$$F_t = mg\sin\theta - 2\,m\,h\,v$$

aplicaţia formulei

$$m\,\frac{dv}{dt} = F_t$$

ţinând seama că $v = -\,l\,\frac{d\theta}{dt}$ ne dă

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,h\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

care este ecuaţia mişcării. *Dacă unghiul* θ *este foarte mic*, avem aproximativ

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2h\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este, după cum se ştie din Analiză,

$$(2) \qquad \theta = P e^{\alpha t} + Q e^{\beta t}$$

P şi Q fiind 2 constante arbitare iar α şi β rădăcinile ecuaţiei

$$X^2 + 2hX + \frac{g}{l} = 0$$

adică

$$\alpha = -h + \sqrt{h^2 - \frac{g}{l}}, \qquad \beta = -h - \sqrt{h^2 - \frac{g}{l}}.$$

Să presupunem rezistenţa mediului destul de mică pentru ca diferenţa $h^2 - \frac{g}{l}$ să fie negativă; rădăcinile α şi β sunt atunci imaginare şi, dacă punem,

$$(3) \qquad \frac{g}{l} - h^2 = a^2$$

putem scrie

$$\alpha = -h + ai, \qquad \beta = = h - ai$$

valori care substituite în expresia (2) ne dau

$$\theta = P e^{(-h+ai)t} + Q e^{(-h-ai)t}.$$

Însă

$$e^{ati} = \cos at + i \sin at$$

$$e^{-ati} = \cos at - i \sin at$$

deci

$$\theta = e^{-ht} \left| (P + Q) \cos at + i (P - Q) \sin at \right|$$

sau încă

$$(4) \qquad \theta = e^{-ht} \left(A \cos at + B \sin at \right)$$

punând

$$P + Q = A, \qquad i(P - Q) = B$$

A şi B fiind constante arbitrare. Valorile acestor constante sunt date de ecuaţia (4) şi următoarea dedusă prin derivare

$$(5) \qquad \frac{d\theta}{dt} = e^{-ht}\Big[(aB - hA)\cos at - (hB + aA)\sin at\Big]$$

în care vom face, potrivit condiţiilor iniţiale,

$$t = 0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Obţinem astfel

$$A = \theta_0, \qquad B = \frac{h}{a}\theta_0$$

şi introducând aceste valori în (4) şi (5) găsim

$$(4)^{bis} \qquad \theta = \theta_0 e^{-ht}\left(\cos at + \frac{h}{a}\sin at\right)$$

$$(5)^{bis} \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{h^2 + a^2}{a}\theta_0 e^{-ht}\sin at.$$

Aceste ecuaţii determină în fie-ce moment poziţia pendulului şi viteza sa unghiulară.

La sfârşitul fiecărei oscilaţii, avem $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ceea ce are loc pentru $at = n\pi$. *Oscilaţiile sunt deci izocrone*, ca şi în vid, şi durata unei oscilaţii este

$$T = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - h^2}}.$$

Vedem că această durată creşte odată cu h, deci este cu atât mai mare cu cât mediul este mai rezistent.

Amplitudinea oscilaţiilor descreşte necontenit. Fie α_n amplitudinea oscilaţiei a n^a, la sfârşitul căreia $at = n\pi$. Vom avea, în valoare absolută, potrivit formulei $(4)^{bis}$:

$$\alpha_n = \theta_0 e^{-\frac{nh\pi}{a}}$$

ceea ce arată că amplitudinele formează o progresie geometrică descrescătoare a căreia rație este $e^{-\frac{h\pi}{a}}$.

III. PENDULUL CICLOIDAL.

1. Să reamintim o proprietate a cicloidei, care se demonstrează în cursul de Analiză.

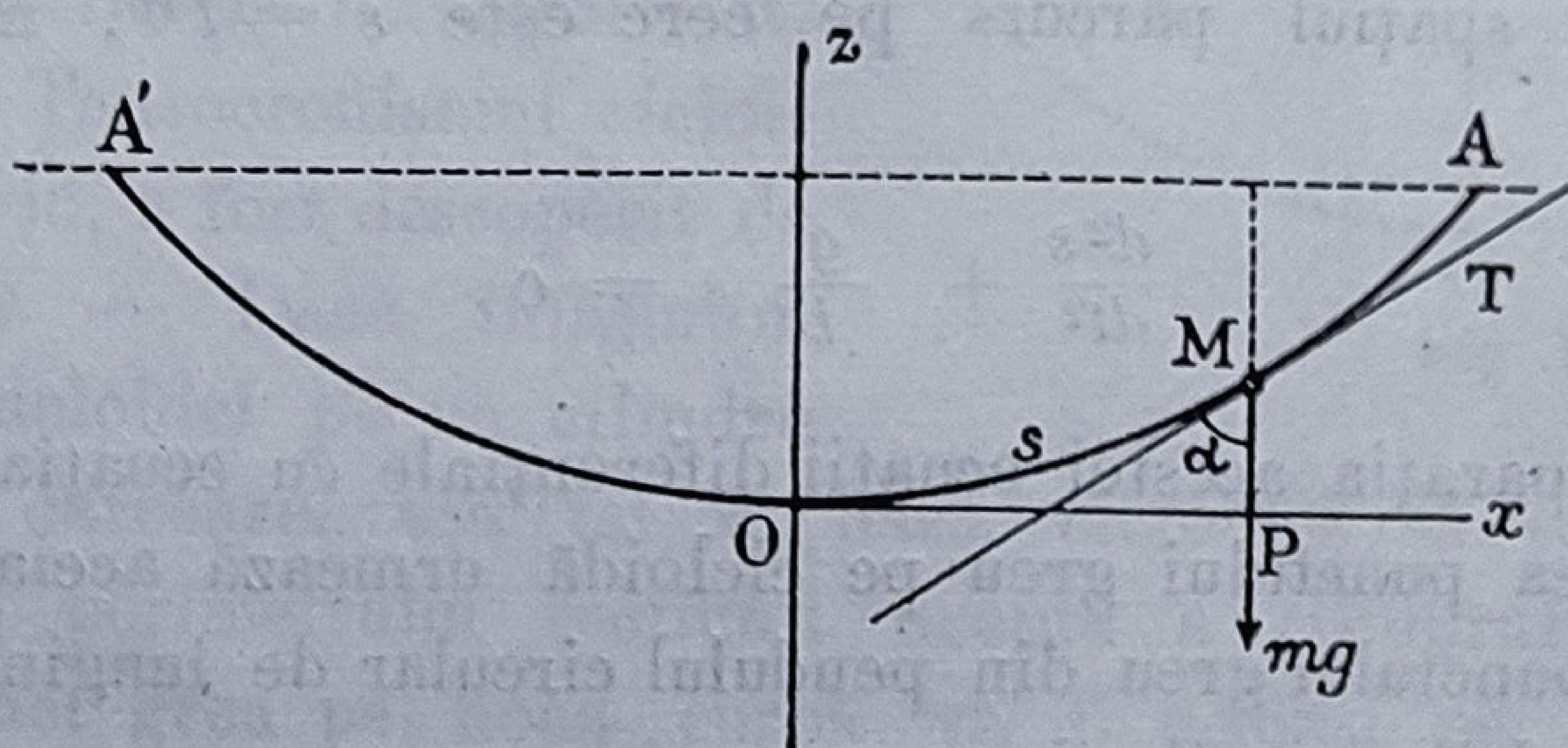


Fig. 65

Fie Oz axul cicloidei și Ox tangenta în punctul O.

Dacă însemnăm prin s arcul coprins între punctul O și un punct oarecare M al curbei, prin z ordonata MP a punctului M și prin a raza cercului generator, avem relația

$$(1) \qquad s^2 = 8az.$$

Să considerăm acum mișcarea unui punct greu pe cicloidă, axul Oz fiind presupus vertical. Vom lua punctul O ca origină a spațiurilor s parcurse de mobil.

Fie α unghiul pe care-l face tangenta în M la cicloidă, dusă în sensul arcurilor crescătoare, cu axul Oz. Proecția mișcării pe tangenta MT ne dă

$$(2) \qquad m \frac{d^2 s}{dt^2} = - mg \cos \alpha .$$

Insă

$\cos \alpha = \frac{dz}{ds}$ și din relația (1) rezultă $\frac{dz}{ds} = \frac{s}{4a}$;

Ecuaţia (2) se poate deci scrie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{4a} s = 0 . \tag{3}$$

Să considerăm pe de altă parte un pendul circular de lungime l. In cazul oscilaţiilor mici, ecuaţia diferenţială a mişcărei sale am văzut că este

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 .$$

Cum spaţiul parcurs pe cerc este $s = l\theta$, mai putem scrie

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l} s = 0 .$$

Comparaţia acestei ecuaţii diferenţiale cu ecuaţia (3) arată că mişcarea punctului greu pe cicloidă urmează aceiaşi lege ca mişcarea punctului greu din pendulul circular de lungime $l = 4a$, în cazul micilor oscilaţii.

Mai putem zice că mişcarea pe cicloidă se execută după legea mişcărei vibratoare simple, durata T a unui oscilaţii pendulare fiind

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}} .$$

Această durată este în mod riguros *independentă de poziţia iniţială a punctului pe cicloidă.* Aşa dar, ori din ce poziţie de pe cicloidă, punctul mobil, abandonat greutăţii fără viteză iniţială, va pune întotdeauna acelaşi timp pentru a ajunge în punctul cel mai de jos al curbei. Acest fapt a făcut să se dea cicloidei numele de *curbă tautocronă*.

Să observăm că lungimea $l = 4a$ este tocmai lungimea razei de curbură a cicloidei în vârful ei O.

2. Pendulul cicloidal poate fi realizat în felul următor: Construim desfăşuratele arcurilor AO şi A'O. Ele sunt două arcuri de cicloidă AI şi A'I, identice cu AO şi A'O şi tangente

în punctul I, centru de curbură în O al cicloidei primitive. Legăm punctul M de punctul I printr'un fir flexibil și inextensibil, de lungime egală cu IO. In poziția M de pe figură, porțiunea IT a firului se va aplica pe porțiunea IT a cicloidei IA, cealaltă porțiune TM fiind o linie dreaptă tangentă în T la arcul IA.

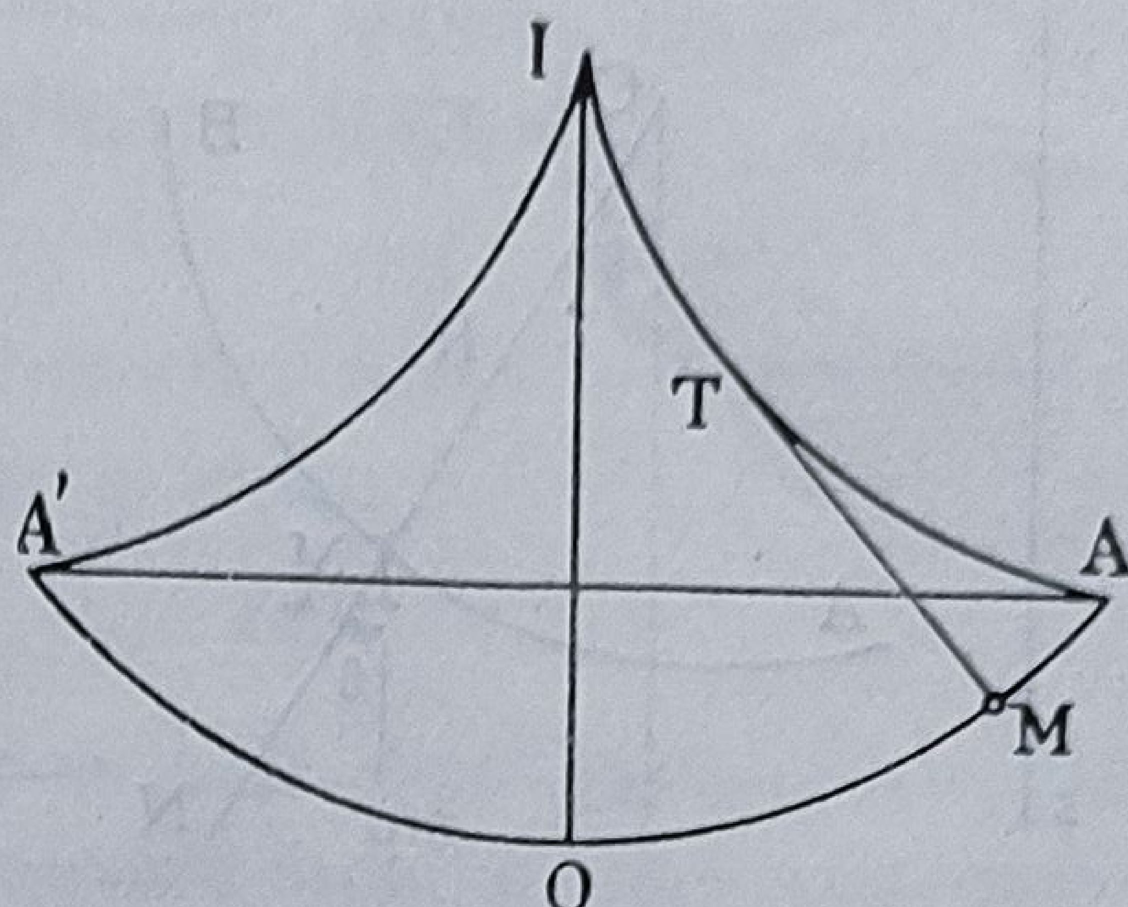


Fig. 66

3. Tautocronismul cicloidei, în vid, a fost descoperit de *Huyghens*. — Dacă înfășurăm planul cicloidei pe un cilindru vertical oarecare, așa fel ca baza cicloidei să coincidă cu o parte a perimetrului secțiunii drepte a cilindrului, mișcarea unui punct greu pe noua curbă va fi aceiași ca pe cicloidă; transformata cicloidei este deci tot o curbă tautocronă și există prin urmare o infinitate de curbe cu dublă curbură care se bucură de proprietatea tautocronismului, însă, după cum se poate demonstra, *cicloida este singura curbă tautocronă plană.*

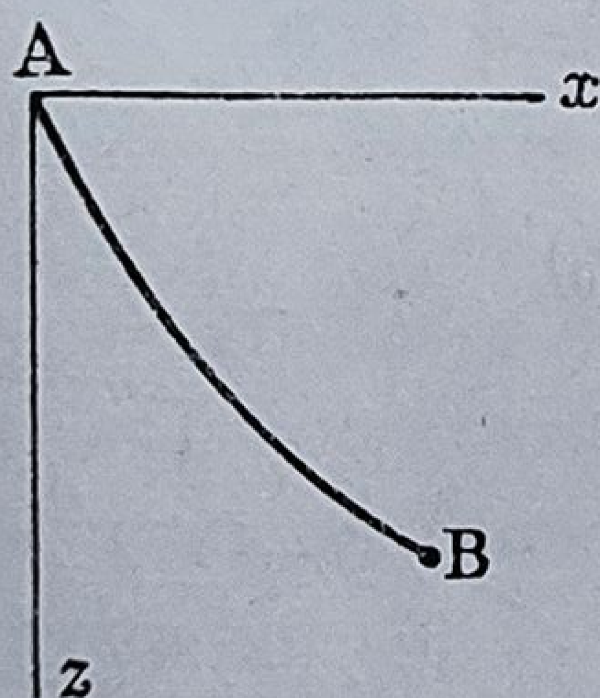


Fig. 67

Notă. Curba, dintr'un plan vertical, pe care alunecând fără frecare un punct greu, ce ar porni fără viteză inițială dintr'o poziție A pentru a ajunge *în minimum de timp*, într'o altă poziție B mai jos situată, se demonstrează că este tot o cicloidă. Astfel, cicloida mai este și o *curbă brahistocronă* (βραχὺς scurt, χρόνος timp).

IV. PRESIUNEA UNUI PUNCT GREU PE O CURBĂ CONȚINUTĂ INTR'UN PLAN VERTICAL.

1. **Problemă.** *Un punct greu este obligat de a se mișca pe o curbă într'un plan vertical; să se calculeze presiunea punctului pe curbă.*

Fie AB curba, conţinută în planul vertical xOz; vom presupune axul Oz vertical şi îndreptat în jos.

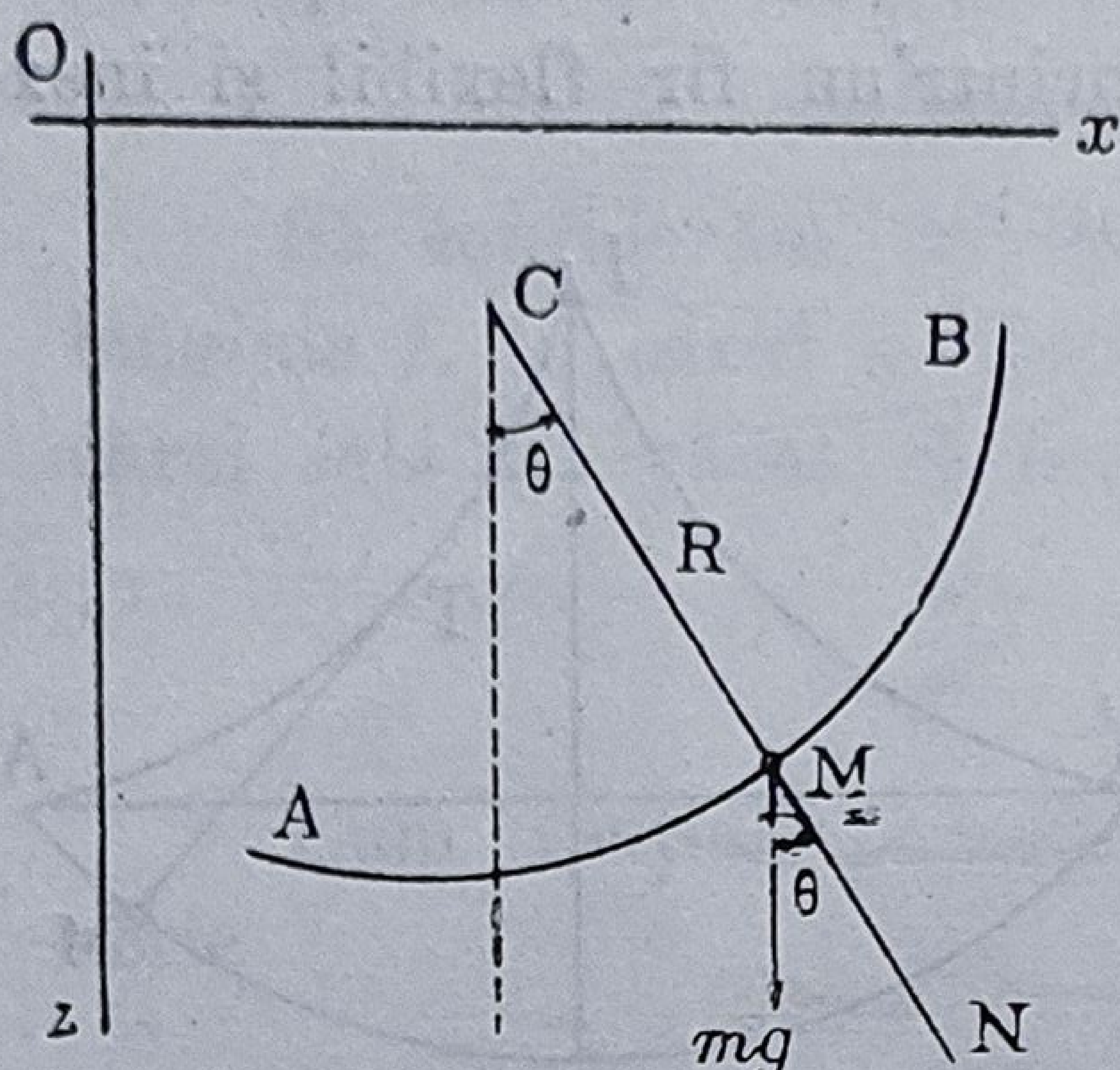


Fig. 68

Fie C centrul de curbură al curbei, corespunzător unei poziţii oarecare M a mobilului.

Să însemnăm prin θ unghiul normalei CM cu axul Oz şi prin R raza de curbură CM în punctul M.

Ştim că presiunea pe curbă este rezultanta componentei normale a greutăţii şi a forţei centrifuge, care îndreptată pe MN este egală cu $m\frac{v^2}{R}$. Deci, luând sensul MN ca sens pozitiv, presiunea are ca valoare

$$(1) \qquad P = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}$$

şi ea va fi îndreptată dela M spre N sau dela M spre C, după cum expresiunea (1) va fi pozitivă sau negativă.

Fie v_0, z_0 valorile iniţiale ale lui v şi z. Avem, prin teorema forţelor vii,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(z - z_0)$$

adică

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0)$$

sau încă

$$(2) \qquad v^2 = 2g(z + h)$$

punând pentru prescurtare

$$(3) \qquad v_0^2 - 2gz_0 = 2gh.$$

Purtând valoarea (2) a lui v^2 în formula (1) se obţine

$$(4) \qquad P = mg\left[\cos\theta + \frac{2(z + h)}{R}\right].$$

Dacă în loc de a fi complect legat curbei, punctul este numai aşezat pe ea, atunci pentru ca punctul să nu părăsească curba, o condiţie urmează a fi îndeplinită şi anume:
dacă punctul este aşezat pe concavitate, trebue ca presiunea să fie îndreptată în sensul MN şi deci să avem

$$\cos\theta + \frac{2(z+h)}{R} > o;$$

dacă punctul este aşezat pe convexitate, trebue ca presiunea să fie îndreptată în sensul MC şi prin urmare

$$\cos\theta + \frac{2(z+h)}{R} < o.$$

Punctele unde presiunea este nulă sunt acelea unde presiunea schimbă de semn şi prin urmare mobilul părăseşte curba. Aceste puncte satisfac condiţiei

$$\cos\theta + \frac{2(z+h)}{R} = o$$

sau potrivit lui (1)

$$mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

egalitate care exprimă că în punctele considerate componenta normală a greutăţii este egală şi direct opusă forţei centrifuge, adică se confundă cu forţa centripetă.

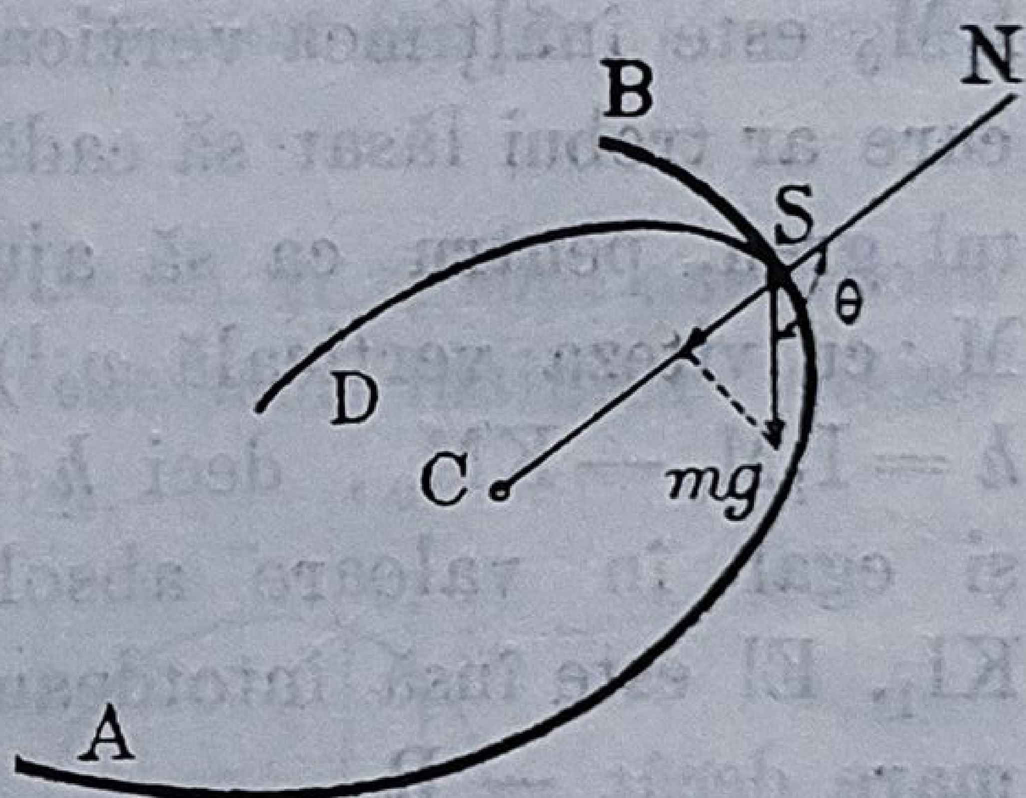


Fig. 69

Când punctul părăseşte curba AB, el descrie o parabolă SD care are cu curba în punctul S un contact de ordinul al doilea, pentrucă în acest punct ambele curbe au aceiaşi tangentă şi aceiaşi rază de curbură.

In adevăr, $m\frac{v^2}{R}$ are în punctul S aceiaşi valoare pentru amândouă curbele[1]), şi cum v este acelaşi, R trebue să fie şi el acelaşi.

---

[1]) Căci în punctul S al curbei AB, presiunea P fiind nulă, avem $-m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta$, iar în acelaşi punct S al mişcării libere pe parabola SD, însemnând prin R′ raza de curbură respectivă, forţa centripetă $-\frac{mv^2}{R'}$ fiind egală cu proecţia lui mg pe normală, are ca valoare tot $mg\cos\theta$.

2. Exemplu. ***Mişcarea unui punct greu, aşezat în concavitatea unui cerc vertical şi care pleacă dintr'un punct dat cu o viteză dată.***

Să aşezăm origina axelor în centrul cercului. Insemnând prin R raza cercului, avem

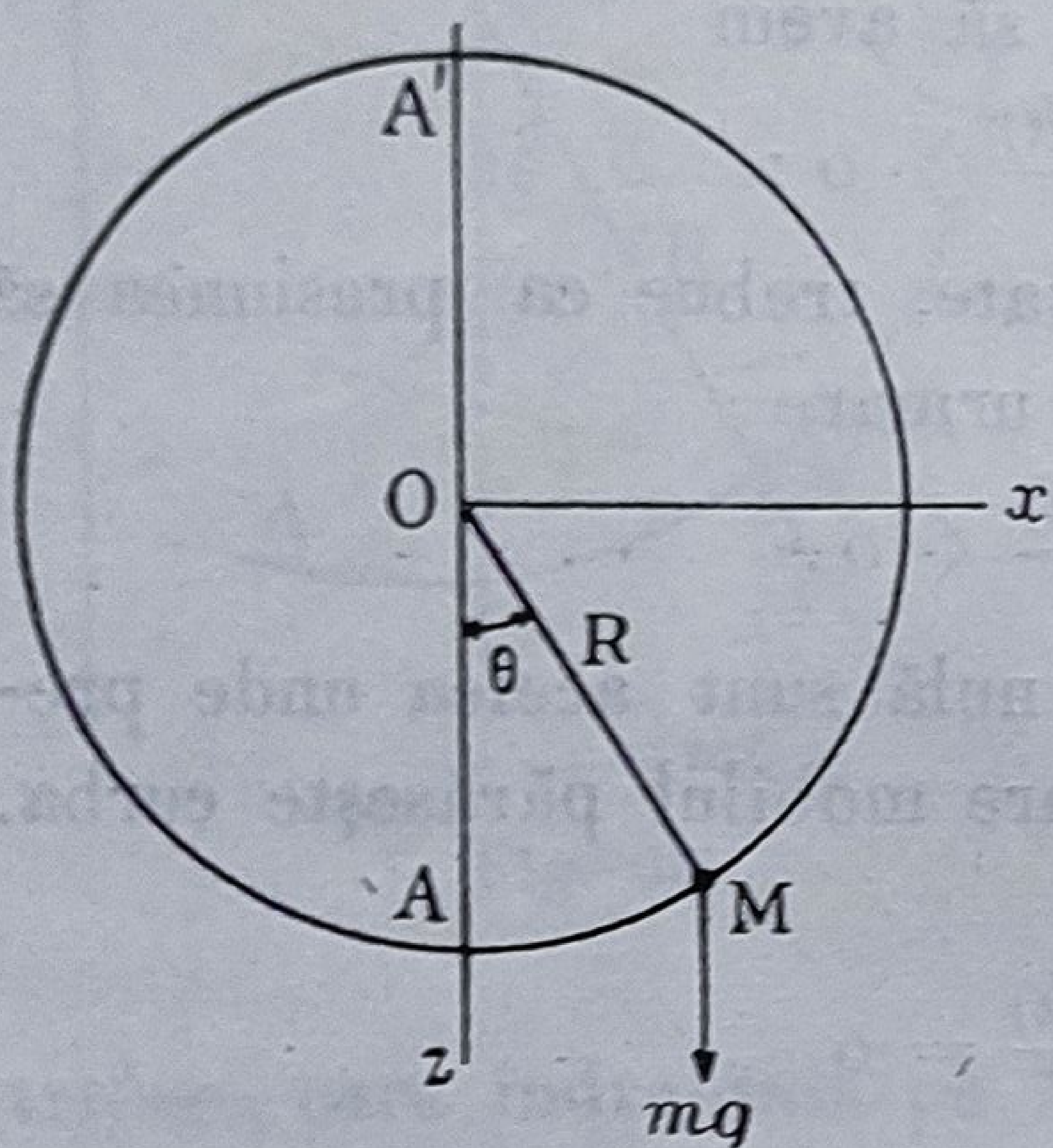


Fig. 70

$$z = R\cos\theta \qquad \text{deci} \qquad \cos\theta = \frac{z}{R}$$

şi, ca urmare, potrivit formulei (4)

$$(5) \qquad P = \frac{mg}{R}(3z + 2h)$$

cu relaţia de mai sus

$$(6) \qquad v^2 = 2g(z + h).$$

Cantitatea h care figurează în aceste expresiuni este egală, potrivit formulei (3) cu $\frac{v_0^2}{2g} - z_0$ şi poate fi pozitivă sau negativă.

Pe figura alăturată dacă I_1M_0 este înălţimea verticală dela care ar trebui lăsat să cadă punctul greu, pentru ca să ajungă în M_0 cu viteza verticală v_0[1]), avem $h = I_1M_0 - KM_0$, deci h negativ şi egal în valoare absolută cu KI_1. El este însă întotdeauna mai mare decât $-$ R.

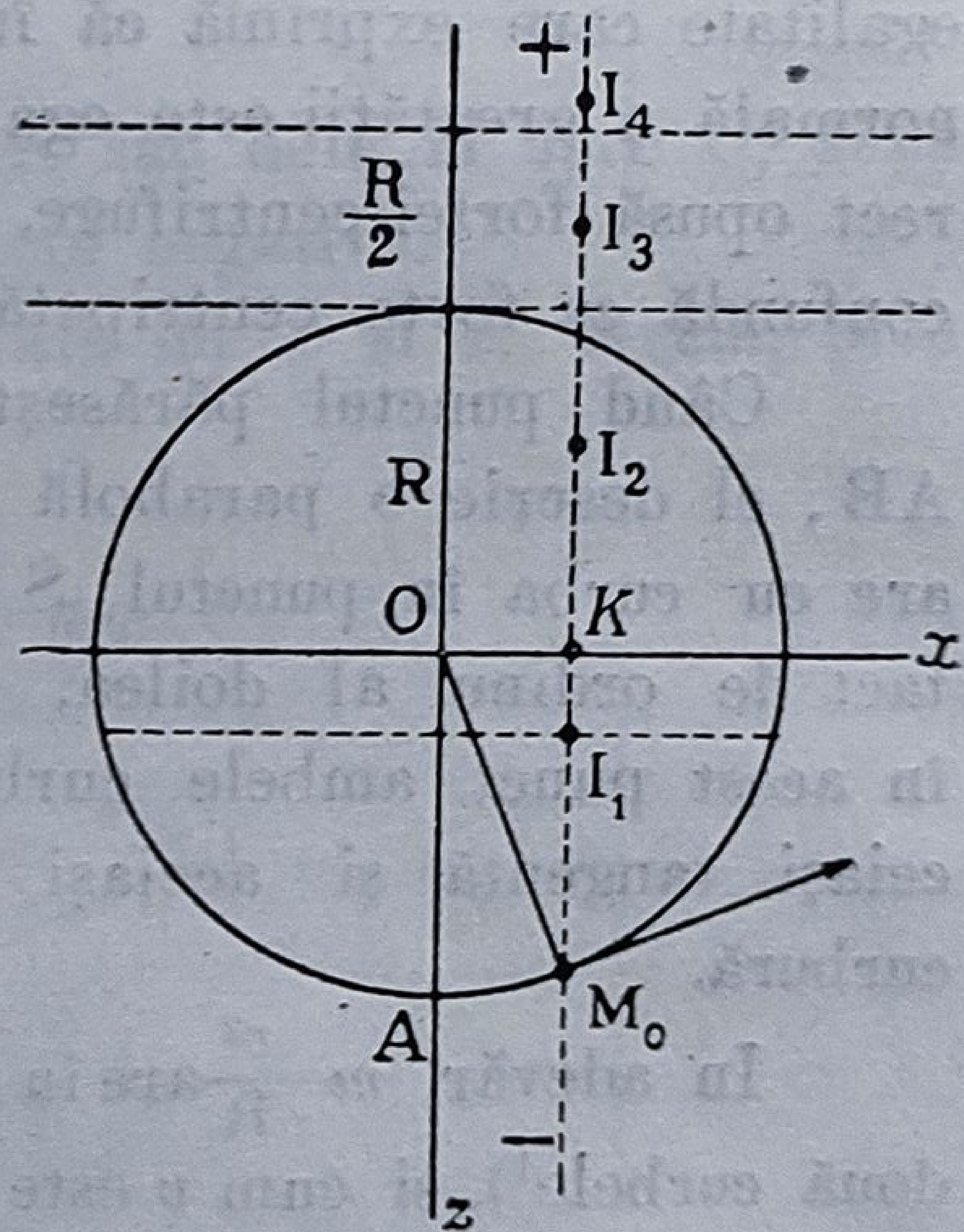


Fig. 71

Pentru celelalte puncte I_2, I_3, ..., situate deasupra lui Ox, h este pozitiv :

$$h = I_2M_0 - KM_0 = KI_2, \text{ etc.}$$

Luând deci ca origină punctul K, sensul KM_0 va corespunde, lui h negativ, iar sensul KI_2 lui h pozitiv.

Aceasta fiind stabilit, observăm mai întâi că v se anulează

---

[1]) Egală numai ca mărime cu v_0 din M_0.

pentru valoarea $z_1 = -h$ care, ca să existe ca ordonată de cerc, trebue să fie coprinsă între $-R$ şi $+R$, deci

$$-R < -h < R \qquad \text{sau} \qquad -R < h < R$$

ceea ce revine numai la condiţia $h < R$ deoarece h este mai mare ca $-R$.

Observăm de asemenea că presiunea P se anulează pentru valoarea $z_2 = -\frac{2}{3} h$ care, ca să existe ca ordonată a cercului, trebue să satisfacă condiţiei

$$-R < -\frac{2}{3} h < R \qquad \text{sau} \qquad -\frac{3}{2} R < h < \frac{3}{4} R$$

ceea ce revine numai la condiţia $h < \frac{3}{2} R$.

Sunt prin urmare 4 cazuri de examinat:

$$h < o, \qquad o < h < R, \qquad R < h < \frac{3}{2} R, \qquad h > \frac{3}{2} R.$$

1°. $h < o$. Punctul I_1. Valorile z_1 şi z_2 sunt amândouă pozitive şi $z_1 > z_2$. Deci viteza devine nulă mai înainte ca presiunea să se anuleze. Mobilul se întoarce prin urmare înapoi şi descrie o mişcare oscilatoare.

2°. $o < h < R$. Punctul I_2. Valorile z_1 şi z_2 sunt amândouă negative şi $z_2 > z_1$. Deci presiunea devine nulă înaintea vitezei şi prin urmare mobilul părăseşte curba.

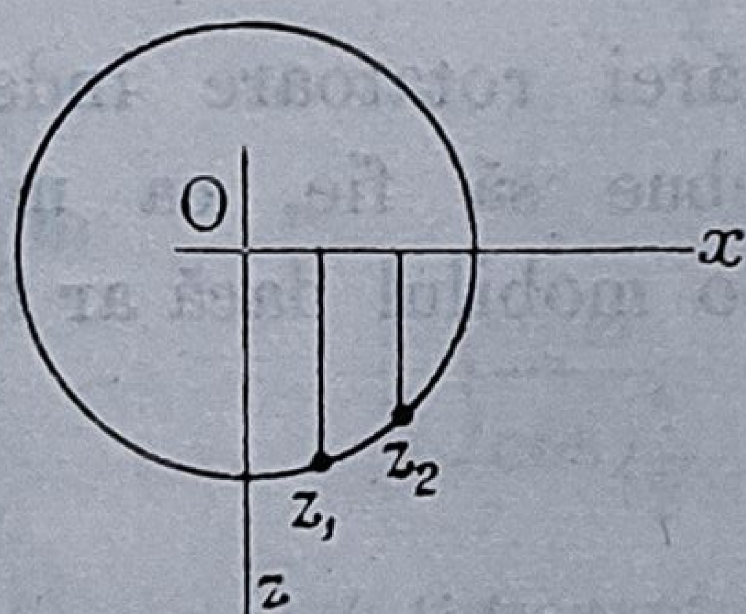


Fig. 72

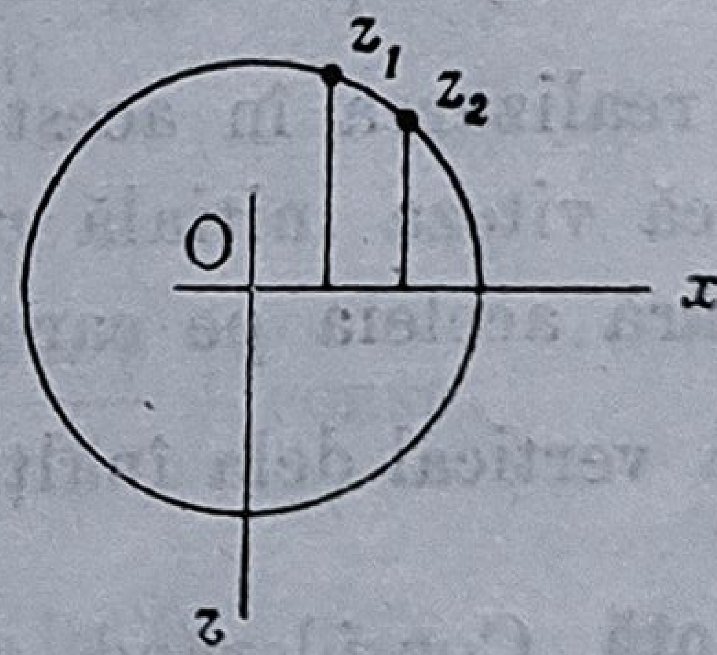


Fig. 73

3°. $R < h < \frac{3}{2} R$. Punctul I_3. Valoarea z_1 nu există, deoarece ea pretinde condiţia $h < R$. Viteza nu se anulează deci niciodată. Există însă z_2 şi pentru această valoare a lui z, presiunea anulându-se, mobilul părăseşte curba.

4°. $h > \frac{3}{2}$ R. Punctul I_4. Nu există nici z_1, nici z_2. Nici viteza, nici presiunea nu se anulează şi în consecinţă mobilul parcurge circonferinţa de un număr indefinit de ori.

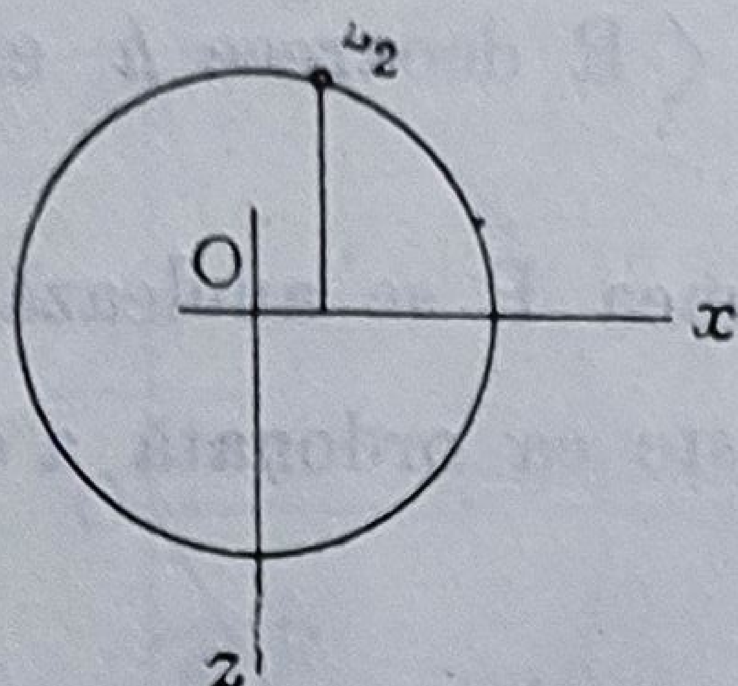


Fig. 74

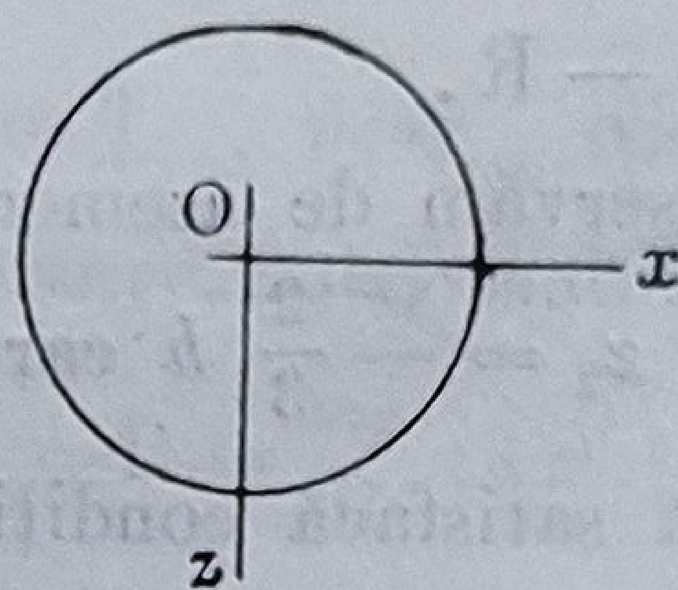


Fig. 75

In rezumat, putem spune că:

dacă $h < o$ mişcarea este oscilatoare,

„ $o < h < \frac{3}{2}$ R mobilul părăseşte curba,

„ $h > \frac{3}{2}$ R avem mişcare rotatoare indefinită.

In cazul particular când mobilul porneşte din punctul cel mai de jos A, cu viteza v_0, atunci

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - R$$

şi cele 3 feluri de mişcări vor avea loc după cum $\frac{v_0^2}{2g}$ va fi mai mic decât R, coprins între R şi $\frac{5}{2}$ R sau mai mare decât $\frac{5}{2}$ R. Pentru realizarea în acest caz a mişcărei rotatoare indefinite, vedem că viteza iniţială v_0 din A trebue să fie, ca mărime, superioară aceleia pe care ar dobândi-o mobilul dacă ar fi lăsat să cadă vertical dela înălţimea $\frac{5}{2}$ R.

Notă. Considerând tot cazul când mobilul porneşte din punctul A cu viteza v_0, vom observa, că dacă mobilul nu poate părăsi curba, atunci potrivit formulei

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - R)$$

viteza v se anulează pentru valoarea

$$z = R - \frac{v_0^2}{2g}$$

care, pentru a corespunde unei ordonate a cercului, trebue să fie mai mare sau cel puţin egală cu $-R$, deci

$$R - \frac{v_0^2}{2g} \geq -R$$

de unde

$$v_0^2 \leq 4gR.$$

In cazul contrariu, viteza nu se anulează niciodată [1]). Ea descreşte necontenit până în punctul A′, apoi creşte, trecând prin aceleaşi valori ca la suirea până în A′.

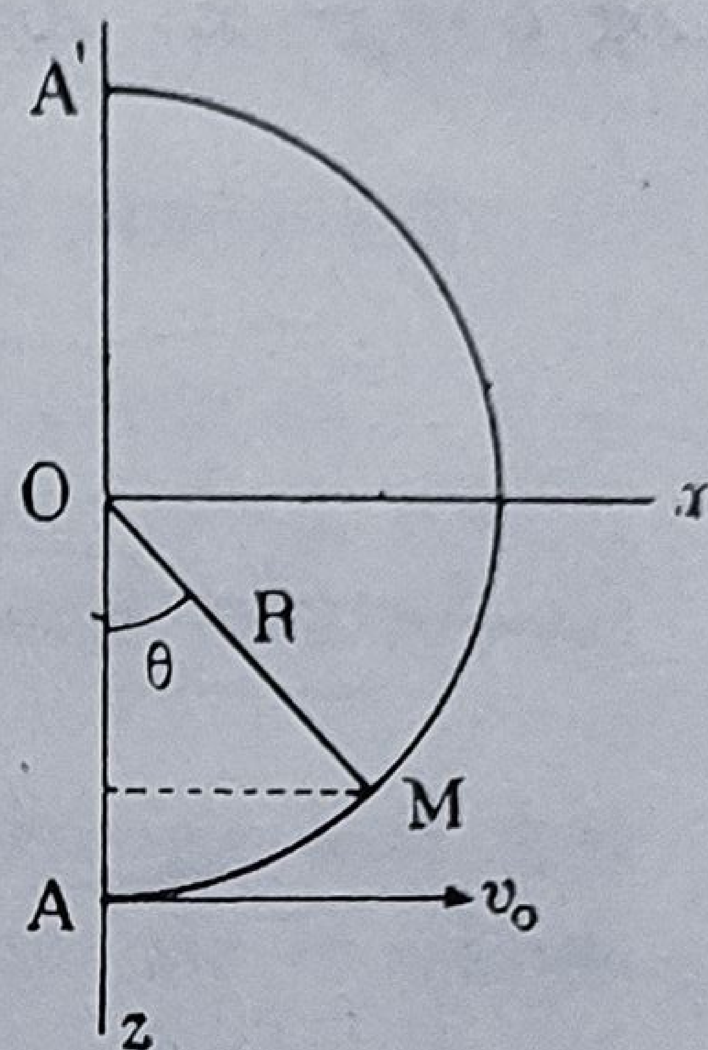


Fig. 76

Să considerăm în particular cazul când $v_0^2 = 4gR$.

In acest caz, viteza v se anulează în punctul A′ de ordonată $z = -R$. *Să calculăm timpul pe care îl va pune mobilul ca să se suie din* A *până în* A′.

Formula de mai sus ne dă

$$\left(R\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4gR + 2g(R\cos\theta - R)$$

adică

$$R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(1+\cos\theta) = 4g\cos^2\frac{\theta}{2}$$

deci

$$\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{g}{R}}.dt$$

şi, cum

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = -\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\pi-\theta}{4} + \text{const}.$$

rezultă, pentru intervalul dela $\theta = o$ la $\theta = \pi$,

$$-\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\pi-\theta}{4} + \operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{g}{R}}.t$$

---

[1]) Dând lui v_0 o valoare mai mare decât $4gR$ şi căutând valoarea lui z pentru care v se anulează, se găseşte un z negativ mai mic decât $-R$ care nu corespunde astfel nici-unui punct de pe cerc.

egalitate, care se reduce la

$$\sqrt{\frac{g}{R}} \cdot t = -\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{4}$$

de oarece $\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{Log} 1 = 0$.

Vedem, că dacă facem pe θ să tindă către π, ceea ce corespunde atingerii poziției A′, găsim $t = \infty$, căci $\operatorname{tg} 0 = 0$ şi $\operatorname{Log} 0 = -\infty$. *Aşa dar, mobilul nu va ajunge niciodată în A′.*

III. EXEMPLE DE ECHILIBRU ŞI MIŞCARE RELATIVĂ.

Echilibrul şi mişcarea unui punct la suprafaţa pământului.

1. **Consideraţiuni generale**. Pământul este animat de o mişcare de translaţie în jurul soarelui şi de o mişcare de rotaţie uniformă în jurul unui ax de direcţie fixă trecând prin centrul său.

Echilibrul unui punct la suprafaţa pământului este deci un echilibru relativ, după cum de asemenea mişcările ce observăm pe glob sunt mişcări relative.

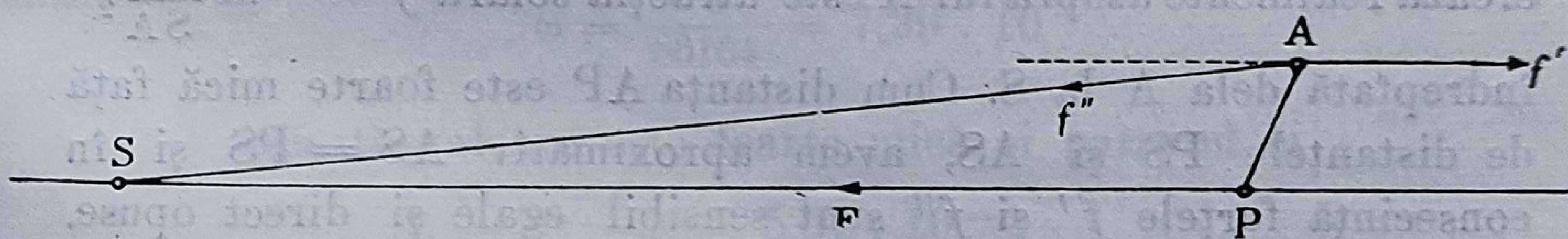


Fig. 77

Să căutăm care sunt forţele aparente ce trebuesc alăturate forţelor realmente aplicate, pentru ca să putem trata echilibrul şi mişcările relative despre care este vorba ca un echilibru şi mişcări absolute faţă de pământ.

Să considerăm mai întâi translaţiunea în jurul soarelui. Fie S soarele, P pământul concentrat în centrul său de greutate şi A un punct de pe pământ.

Pentru ca să putem trata mişcarea punctului ca o mişcare absolută faţă de un sistem de axe invariabil legate pământului, trebue să alăturăm forţelor care lucrează realmente asupra punctului, forţa de inerţie de antrenare şi forţa centrifugă compusă. Aceasta din urmă este însă nulă, de oare-ce mişcarea

sistemului mobil este o translaţie. Forţa de inerţie de antrenare este egală cu acceleraţia lui P, luată în sens contrariu, înmulţită cu massa punctului (căci în translaţie, toate punctele au aceiaşi acceleraţie). Cum forţa care lucrează asupra lui P este atracţia solară

$$F = -f \cdot \frac{M'. M}{\overline{SP}^2}$$

unde am însemnat prin M′ şi M massele soarelui şi pământului, acceleraţia lui P are ca valoare

$$w = \frac{F}{M} = -f \cdot \frac{M'}{\overline{SP}^2}$$

şi, în consecinţă, forţa de inerţie de antrenare corespunzătoare punctului A de massă m, este

$$f' = +f \cdot \frac{M' m}{\overline{SP}^2}$$

direcţia ei fiind paralelă cu SP. Ori, una din forţele care lucrează realmente asupra lui A este atracţia solară $f'' = -k \cdot \frac{M' m}{\overline{SA}^2}$, îndreptată dela A la S. Cum distanţa AP este foarte mică faţă de distanţele PS şi AS, avem aproximativ AS = PS şi în consecinţă forţele f' şi f'' sunt sensibil egale şi direct opuse.

Rezultă astfel, că pentru a ţine seama de mişcarea de translaţie a pământului, şi tot deodată de atracţia punctului de către soare, ar trebui să introducem o forţă extrem de mică rezultantă a celor 2 forţe f' şi f'' de mai sus; această rezultantă variază de altfel necontenit, în mărime şi în direcţie, căci poziţia punctului în raport de soare se modifică în fie ce moment; ea antrenează o variaţiune foarte mică a intensităţii greutăţii şi a direcţiei verticalei; se poate însă în majoritatea cazurilor să se neglijeze această forţă perturbatrice.

Raţionamentul pe care l'am făcut mai sus, poate fi repetat pentru a studia şi efectul atracţiei lunare. Luna are un efect foarte slab, este adevărat, asupra translaţiunii pământului, totuşi rezultanta celor două forţe analoage forţelor f' şi f'' de mai sus, care constitue o nouă forţă perturbatrice, deşi foarte

mică, este superioară rezultantei forţelor f' şi f'', din cauza distanţelor mai mici până la lună.

Cele două forţe perturbatrice nu produc decât variaţiuni insensibile asupra intensităţii greutăţii şi direcţiei verticalei; totuşi ele sunt acelea cărora se datorează fenomenul mareelor [1]), şi din cele spuse se înţelege dece atracţia lunară are în acest fenomen un rol mai important.

In rezumat: *este permis, în general, când se studiază echilibrul sau mişcarea unui punct la suprafaţa pământului, să neglijăm mişcarea de translaţie în jurul soarelui, odată cu atracţia solară şi lunară şi atunci, alături de forţele direct aplicate, nu vor mai fi de introdus decât atracţia terestră şi forţele fictive corespunzând mişcării de rotaţie în jurul liniei polurilor.*

2. **Viteza unghiulară de rotaţie a pământului**. Cum pământul pune 86164 secunde (durata zilei siderale) ca să facă o rotaţie întreagă în jurul liniei polurilor, avem

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7{,}29 \,.\, 10^{-5}.$$

Această valoare este foarte mică şi patratul ei

$$\omega^2 = 5{,}31 \,.\, 10^{-9}$$

este astfel că înmulţit cu o cantitate de ordinul acelora ce se întâlnesc în problemele terestre, dă o valoare tot foarte mică, al căreia patrat poate, în general, să fie neglijat.

Aşa spre exemplu, productul lui ω^2 cu raza terestră, are ca valoare $\omega^2 R = 3{,}385 \,.\, 10^{-2}$ şi patratul acestui număr $\omega^4 R^2 = 1{,}146 \,.\, 10^{-3}$ va putea fi, în general, neglijat.

I. ECHILIBRUL APARENT AL UNUI PUNCT MATERIAL.

1. Să considerăm un punct M în echilibru pe un plan orizontal. Pnnctul se găseşte în echilibru sub acţiunea:

---

[1]) Acest fenomen este cu deosebire datorit denivelării pe care o produce variaţiunea direcţiei verticalei.

1° a atracţiei terestre MP, îndreptată spre centrul pământului;

2° a acţiunei normale MN a planului asupra punctului;

3° a forţei de inerţie de antrenare MC (forţa centrifugă compusă fiind nulă în cazul echilibrului relativ).

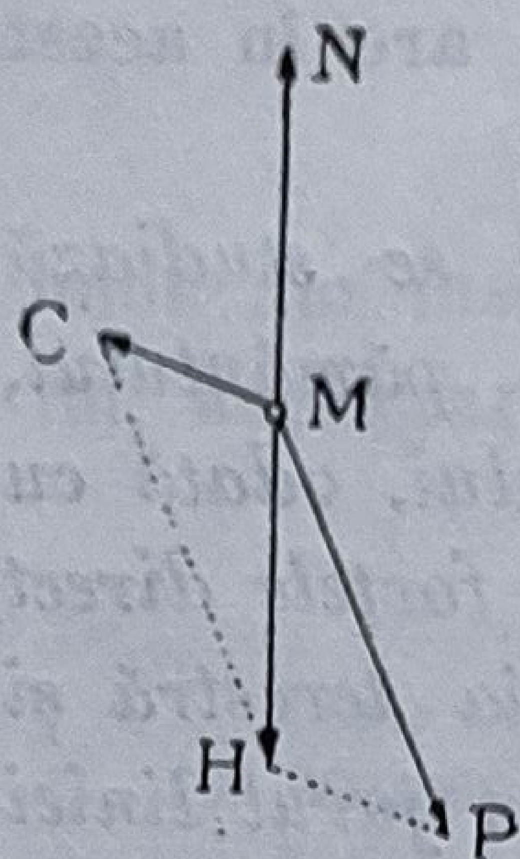


Fig. 78

Cum mişcarea de rotaţie este uniformă, acceleraţia de antrenare este centripetă şi egală cu $-r\omega^2$, r fiind raza paralelei pe care se află situat punctul, deci forţa de inerţie de antrenare este centrifugă şi egală cu $+mr\omega^2$. Greutatea fiind egală şi direct opusă acţiunii MN a planului asupra punctului, figura ne arată că valoarea ei, MH, este *rezultanta atracţiei terestre şi a forţei centrifuge.*

2. **Intensitatea şi direcţia greutăţii.** Să presupunem pământul ca sferic şi omogen. Fie:
O, centrul pământului,
M, un punct de la suprafaţa sa,
SN, linia polurilor,
EE', ecuatorul.

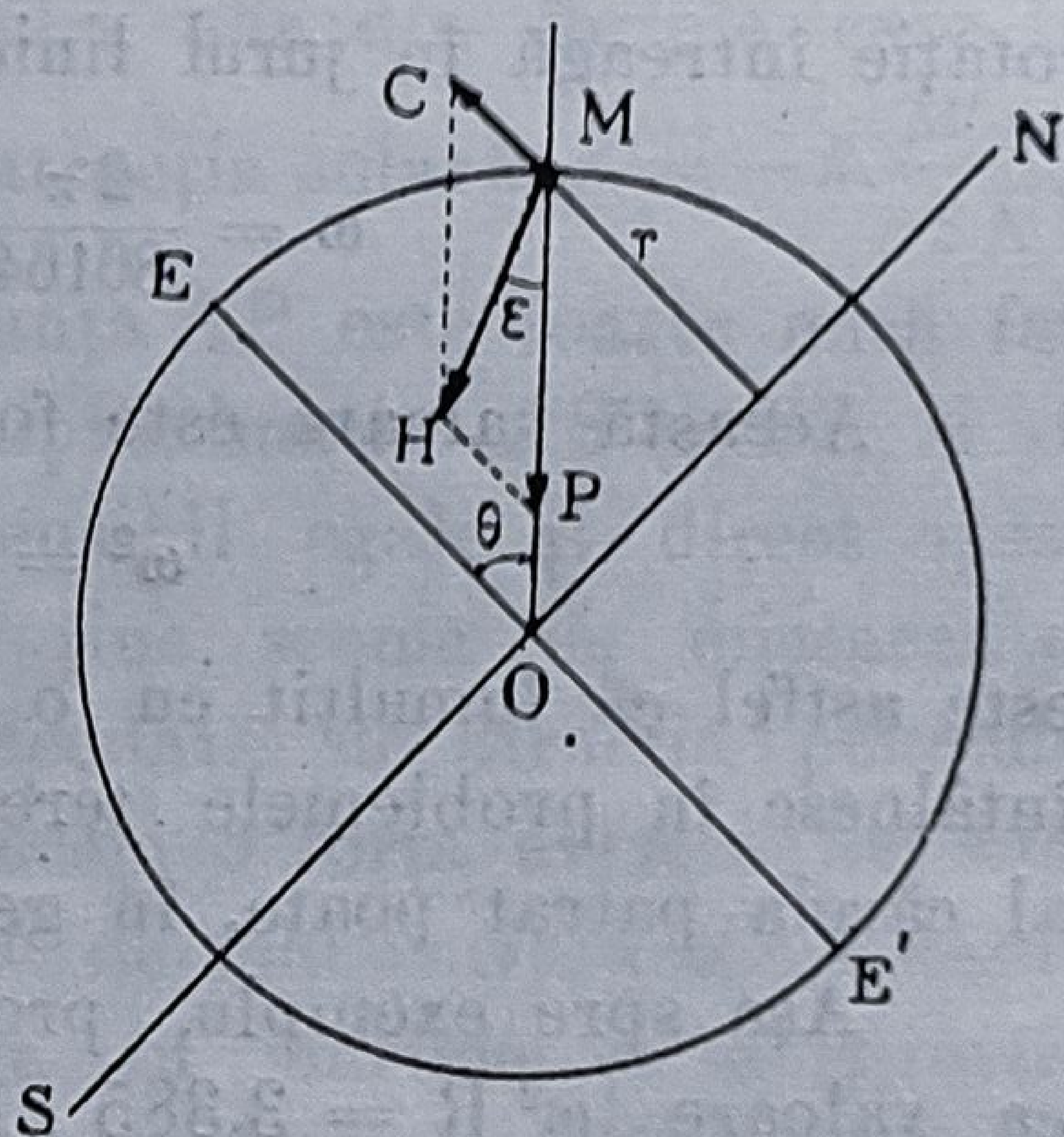


Fig. 79

Să însemnăm prin R raza terestră şi prin θ unghiul razei vectoare OM cu ecuatorul. Atracţia terestră MP trece prin O; fie mG intensitatea ei.

Forţa centrifugă MC este perpendiculară pe SN şi are ca valoare absolută $mr\omega^2$, r fiind distanţa punctului M la axul de rotaţie. Insfârşit greutatea este reprezentată prin rezultanta MH a vectoarelor MP şi MC; fie mg intensitatea ei.

In triunghiul MPH să considerăm ca cunoscute latura MP egală cu mG, latura PH egală cu $mr\omega^2$ sau $m\omega^2 R\cos\theta$, şi unghiul MPH egal cu θ. Avem

$$MH = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PH}^2 - 2\,MP.\,PH\cos\theta}$$

adică

$$g = \sqrt{G^2 + \omega^4 R^2 \cos^2\theta - 2G \, . \, \omega^2 R \cos^2\theta}$$

şi

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta} = \frac{\omega^2 R \cos\theta}{g}.$$

Dacă sub radical, înlocuim cantitatea neglijabilă $\omega^4 R^2 \cos^2\theta$ prin cantitatea tot neglijabilă $\omega^4 R^2 \cos^4\theta$ obţinem:

$$(1) \qquad g = G - \omega^2 R \cos^2\theta$$

şi pe de altă parte, unghiul ε fiind întotdeauna foarte mic, putem scrie

$$(2) \qquad \varepsilon = \frac{\omega^2 R \sin 2\theta}{2g}.$$

Această din urmă formulă ne dă direcţia verticalei în ori şi ce punct al globului. Ea nu coincide cu direcţia razei terestre şi prin urmare planul orizontal din M nu este tangent sferei terestre.

Cu privire la formula (1), observăm că la ecuator, forţa centrifugă fiind direct opusă atracţiunei terestre, avem *în mod riguros*

$$(3) \qquad g = G - \omega^2 R.$$

Pe de altă parte, observaţiunea oscilaţiilor pendulului la ecuator a procurat valoarea

$$g = 9^m, 7807$$

şi cum $\omega^2 R$ este egal cu 0, 0338, formula (3) ne dă

$$G = 9, 7807 + 0, 0338 = 9, 8145.$$

Cu această valoare, formula (1) ne permite de a calcula pe g în ori ce localitate de pe pământ.

Observaţie. Formula (3) se poate scrie

$$(4) \qquad g = G\left(1 - \frac{\omega^2 R}{G}\right).$$

Avem însă în mod foarte aproximativ

$$\frac{\omega^2 R}{G} = \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2}$$

de unde

$$1 - \frac{(17\,\omega)^2 R}{G} = 0.$$

Rezultă deci, potrivit formulei (4) că dacă pământul s'ar învârti de 17 ori mai repede, greutatea ar fi nulă la ecuator. Dacă iuţeala de rotaţie ar fi şi mai mare, forţa centrifugă ar deveni mai mare decât atracţia terestră şi corpurile situate la ecuator ar fi asvârlite în afară.

Influenţa forţei centrifuge, semnalată pentru prima oară de *Huyghens,* este cauza cea mai importantă a variaţiei greutăţii la suprafaţa pământului. O altă cauză, al căreia efect a fost calculat cu preciziune de către *Clairaut,* este turtirea pământului la poli.

II. MIŞCAREA APARENTĂ A UNUI PUNCT MATERIAL LIBER.

1. Să considerăm mişcarea unui punct raportată la un sistem de axe antrenat cu pământul în mişcarea sa de rotaţie.

Această mişcare poate să fie tratată ca absolută, dacă alăturăm forţelor reale, forţa de inerţie de antrenare şi forţa centrifugă compusă. Cum forţa de inerţie de antrenare se reduce în cazul rotaţiei uniforme la forţa centrifugă, vom avea deci de compus:

1° Forţele, care în afară de atracţia terestră, lucrează realmente asupra punctului; fie F rezultanta lor;

{ 2° Atracţia terestră,
{ 3° Forţa centrifugă;

4° Forţa centrifugă compusă.

Ori, atracţia terestră şi forţa centrifugă au ca rezultantă greutatea punctului; deci, mişcarea aparentă a punctului este datorită *forţei* F, *greutăţii* şi *forţei centrifuge compuse.*

2. **Ecuaţiile deferenţiale ale mişcării.** Intr'un loc de pe pământ, situat spre exemplu, *în emisfera boreală,* fie O origina fixă, în raport cu pământul, a unui sistem de cordonate dreptunghiulare.

Să luăm pe Oz îndreptat pe verticala punctului O, în sensul greutăţii; pe Ox orizonal, în planul meridian şi îndreptat spre sud; pe Oy orizontal, perpendicular pe planul meridian şi îndreptat spre est. Triedrul $Oxyz$ este un triedru direct.

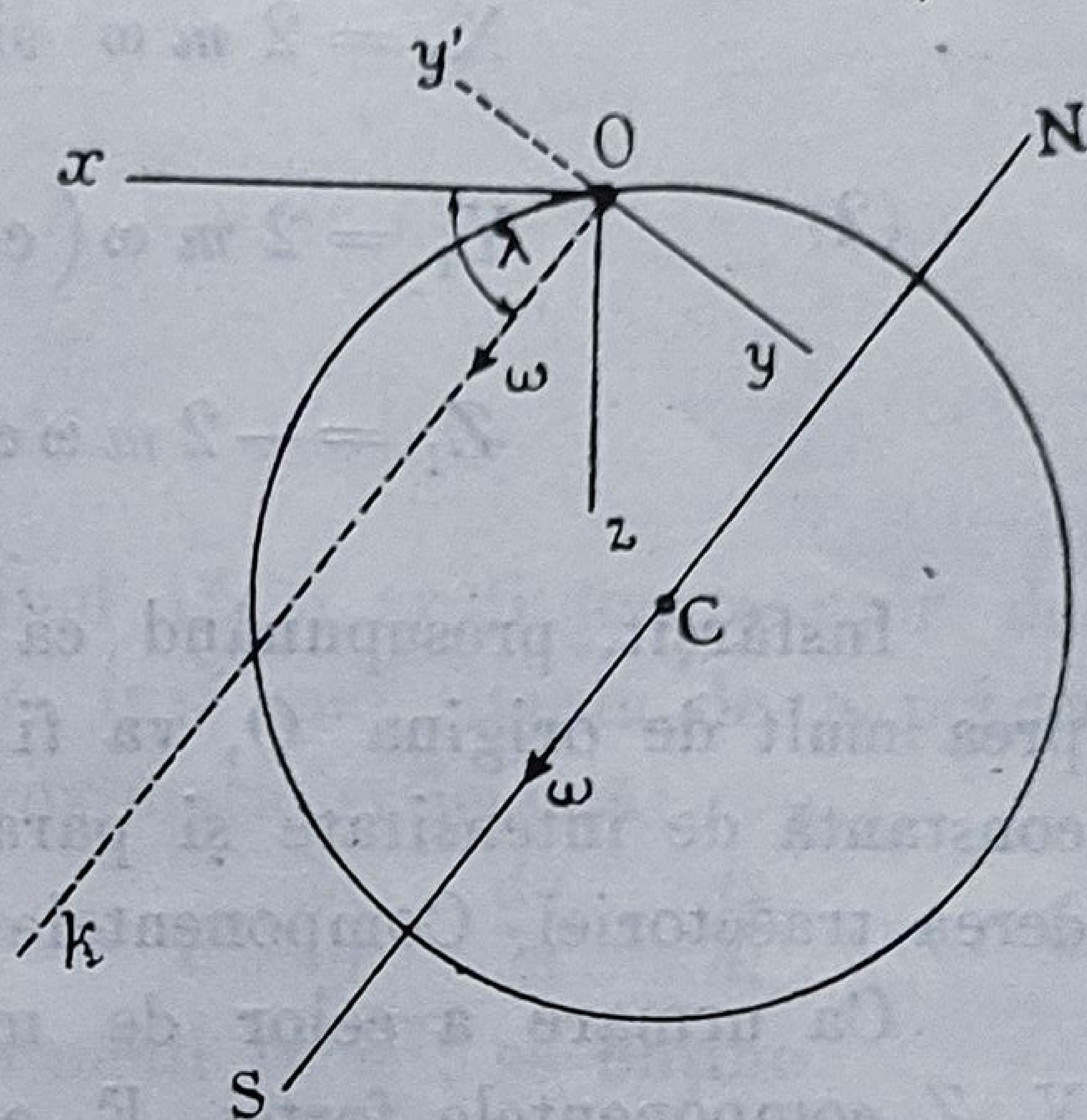


Fig. 80

Vectorul ω al rotaţiunii terestre este îndreptat de la C la S, observatorul aşezat cu picioarele în C şi cu capul în ω văzând astfel rotaţia pământului dela stânga spre dreapta (dela West spre Est). Mutând paralel acest vector în punctul O, vedem, că dacă însemnăm prin λ latitudinea punctului O, proecţiile lui ω pe cele 3 axe cordonate sunt:

$$(1) \qquad p = \omega \cos \lambda\,, \quad q = o\,, \quad r = \omega \sin \lambda\,.$$

Pe de altă parte, proecţiile pe aceleaşi axe ale acceleraţiei complimentare w_c fiind după cum se ştie din Cinematică [1]),

$$(w_c)_x = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right)$$

$$(w_c)_y = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right)$$

$$(w_c)_z = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right)$$

proecţiile X_1, Y_1, Z_1 ale forţei centrifuge compuse vor fi

$$X_1 = -2\,m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right)$$

$$(1) \qquad Y_1 = -2\,m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right)$$

$$Z_1 = -2\,m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right)$$

---

[1]) Cinematica, pag. 178.

expresiuni, care ţinând seamă de egalităţile (1) se reduc la

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
X_1 &= 2\,m\,\omega\ \sin\lambda\,\frac{dy}{dt}\\
Y_1 &= 2\,m\,\omega\left(\cos\lambda\,\frac{dz}{dt}-\sin\lambda\,\frac{dx}{dt}\right)\\
Z_1 &= -2\,m\,\omega\cos\lambda\,\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}
$$

Insfârşit, presupunând că punctul mobil nu se depărtează prea mult de origina O, va fi permis să privim greutatea ca constantă de intensitate şi paralelă cu Oz, pentru toată întinderea traectoriei. Componentele greutăţii vor fi deci o, o, mg.

Ca urmare a celor de mai sus, dacă însemnăm prin X, Y, Z componentele forţei F, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării vor fi

$$
(3)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
m\,\frac{d^2x}{dt^2} &= X + 2\,m\,\omega\ \sin\lambda\,\frac{dy}{dt}\\
m\,\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + 2\,m\,\omega\left(\cos\lambda\,\frac{dz}{dt}-\sin\lambda\,\frac{dx}{dt}\right)\\
m\,\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + mg - 2\,m\,\omega\cos\lambda\,\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}
\right.
$$

3. **Mişcarea aparentă a proectilelor în vid.** Forţa F neexistând, componentele ei X, Y, Z sunt nule. Să aşezăm origina O în poziţia iniţială a mobilului, pentru ca x, y, z să fie nuli pentru $t = o$ şi să însemnăm prin a, b, c, componentele iniţiale ale vitezei relative.

Ecuaţiile (3) de mai sus, în care nu rămân decât componentele greutăţii şi ale forţei centrifuge compuse, se scriu

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\,\omega\ \sin\lambda\,\frac{dy}{dt}\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= 2\,\omega\left(\cos\lambda\,\frac{dz}{dt}-\sin\lambda\,\frac{dx}{dt}\right)\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -2\,\omega\cos\lambda\,\frac{dy}{dt}+g
\end{aligned}
$$

şi obţinem printr'o primă integraţiune

$$\frac{dx}{dt} = 2\,\omega\, y \sin\lambda + a$$

$$(5) \qquad \frac{dy}{dt} = 2\,\omega\,(z\cos\lambda - x\sin\lambda) + b$$

$$\frac{dz}{dt} = -\,2\,\omega\, y\cos\lambda + gt + c\,.$$

Ecuaţiile (5) sunt de ordinul 1[u] şi ar fi foarte uşor de a le integra în mod riguros; este însă mai simplu de a proceda în felul următor care dă o aproximaţie suficientă:

In ecuaţiile (4) să înlocuim pe $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ prin expresiunile lor (5), neglijând termenii în ω^2; se obţine

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\omega\, b\sin\lambda$$

$$(6) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\omega\,(c\cos\lambda - a\sin\lambda) + 2\,\omega\, gt\cos\lambda$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\,2\,\omega\, b\cos\lambda + g$$

din care deducem, integrând de două ori,

$$(7) \qquad \begin{cases} x = at + \omega\, bt^2\sin\lambda \\ y = bt + \omega\,(c\cos\lambda - a\sin\lambda)\,t^2 + \frac{1}{3}\,\omega\, gt^3\cos\lambda \\ z = ct - \omega\, bt^2\cos\lambda + \frac{1}{2}\,gt^2\,. \end{cases}$$

Aceste ecuaţiuni conduc la concluziuni foarte importante. Să considerăm, în particular, următoarele trei cazuri:

a). *Proectil abandonat greutăţii fără viteză iniţială.* Componentele a, b, c, fiind în acest caz, nule, formulele (7) devin:

$$x = 0\,, \qquad y = \frac{1}{2}\,\omega\, gt^3\cos\lambda\,, \qquad z = \frac{1}{2}\,gt^2\,.$$

Aceste ecuaţiuni arată că *dacă se abandonează un punct material, fără viteză iniţială, la acţiunea greutăţii, mobilul va rămâne într'un plan perpendicular meridianului (planul yOz)*

deviând de verticală, către Est, de o cantitate mică; proecţia sa pe verticală va avea aceiaşi mişcare ca în cazul când pământul ar sta nemişcat.

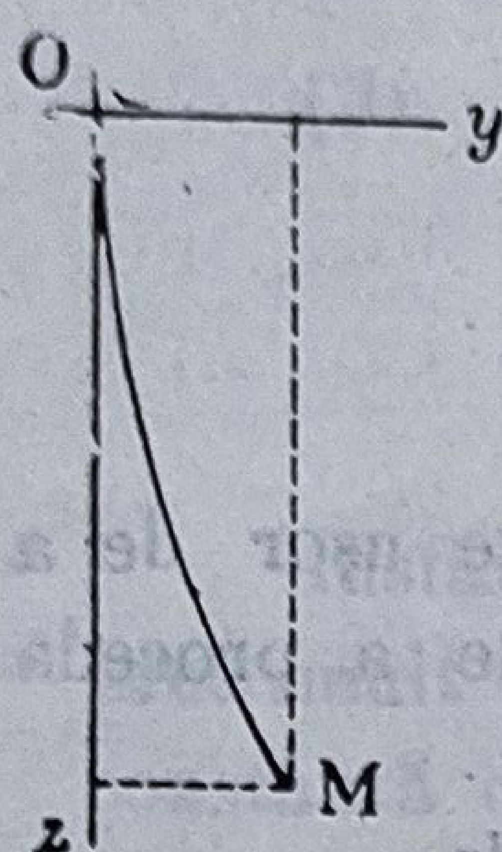


Fig. 81

Traectoria mobilului în planul yOz este o *parabolă cubică* având ca ecuaţie

$$(8) \qquad y = \frac{2\sqrt{2}\,.\,\omega\cos\lambda}{3\sqrt{g}}\,.\,z^{\frac{3}{2}}$$

curba fiind tangentă verticalei în origina mişcării.

Această expresiune a lui y ne permite a calcula deviaţiunea corespunzătoare unei înălţimi de cădere. Intr'o experienţă făcută într'un puţ de mină la *Freiberg*, înălţimea de cădere era 158,5 metri, latitudinea locului fiind de 51 grade. Introducând aceste date în formulă, alături de valorile lui ω şi g, se găseşte $y = 0{,}0276$ metri. Experienţa repetată un mare număr de ori a dat pentru deviaţie, prin măsurători directe, cifra mijlocie 0,0283 metri, care, după cum se vede, diferă foarte puţin de rezultatul teoretic.

Această deviaţie către Est este datorită forţei centrifuge compuse, care fiind proporţională vitezei relative, ca şi acceleraţia complimentară, produce efecte cu atât mai însemnate cu cât viteza relativă este mai mare. Cum mobilul nu se depărtează prea mult de Oz, fie M poziţia lui aproximativă considerată pe acest ax, $MA = \omega$ vectorul rotaţiei terestre transportat paralel în M, vector coprins în planul meridian xOz, şi $MB = 2\,v_r$ îndoitul vitezei relative a mobilului. Ştim din *Cinematică* (pag. 178) că acceleraţia complimentară w_c a punctului M este viteza cu care se mişcă în rotaţia $MA = \omega$ extremitatea B a vectorului $MB = 2\,v_r$. Cum rotaţia are loc dela stânga la dreapta, ve-

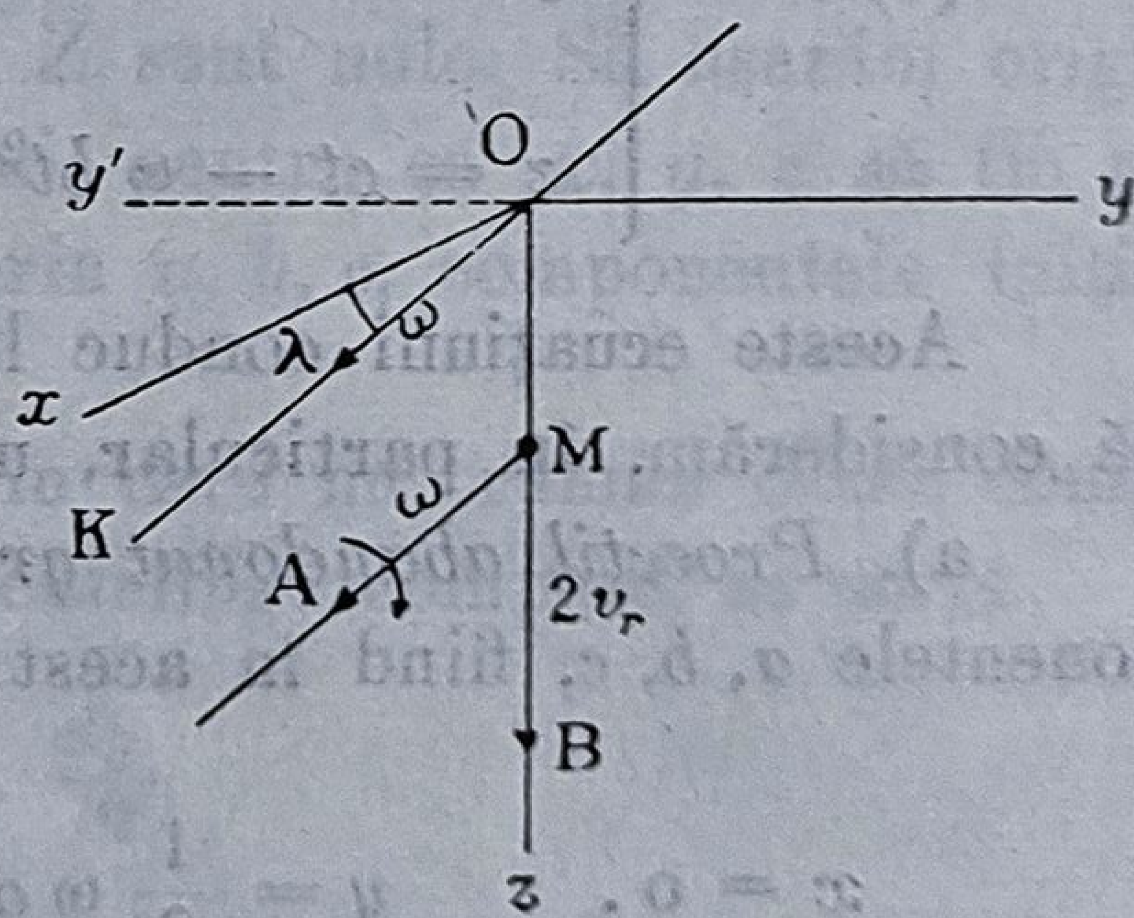


Fig. 82

dem că ea duce punctul B spre $O\,y'$ şi prin urmare forţa centrifugă compusă este îndreptată pe $O\,y$, adică spre Est.

b). ***Proectil asvârlit vertical de jos în sus, cu o viteză*** v_0. In acest caz, deviaţia până în punctul culminant S al traectoriei are loc către West, de oarece viteza relativă v_r fiind sensibil dirijată pe Oz', extremitatea vectorului $2\,v_r$ tinde a se deplasa în virtutea rotaţiei ω spre Oy şi deci forţa centrifugă compusă are direcţia Oy'.

Ecuaţiile mişcării se obţin făcând $a = o$, $b = o$, $c = -v_0$ în ecuaţiile (7). Găsim astfel

$$x = o, \qquad y = -\omega\, v_0\, t^2 \cos\lambda + \frac{1}{3}\,\omega\, g t^3 \cos\lambda$$

$$z = -v_0\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2 .$$

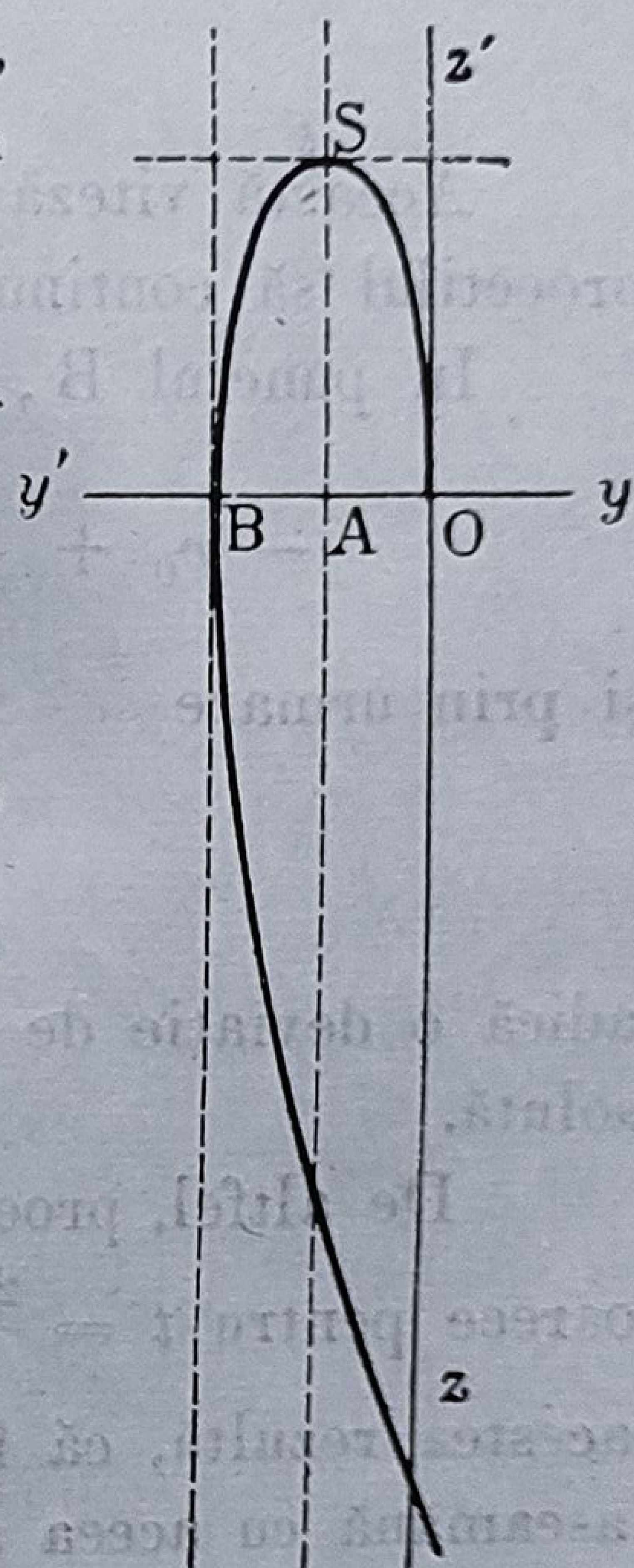


Fig. 83

In vârful S al traectoriei avem $\frac{dz}{dt} = o$ adică $-v_0 + g\,t = o$ de unde $t = \frac{v_0}{g}$ şi prin urmare, substituind această valoare în expresiile lui y şi z,

$$O\,A = -\frac{2\,v_0^3}{3\,g^2}\,\omega\cos\lambda, \qquad A\,S = -\frac{v_0^2}{2\,g}.$$

Insemnând prin h înălţimea ascensiunii, în valoare absolută, adică punând $h = \frac{v_0^2}{2\,g}$, deviaţiunea OA în funcţie de h are ca expresie

$$\text{(9)} \qquad OA = -\frac{2\,\omega\cos\lambda}{3\,g^2}\left(2\,gh\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{4\sqrt{2}\,\omega\cos\lambda}{3\sqrt{g}}\,h^{\frac{3}{2}}.$$

Comparaţia acestei valori cu aceea dată de formula (8) arată, că la egalitate de înălţime verticală h, proectilul aruncat de jos în sus s'a deviat de 2 ori mai mult când a încetat de a se mai sui, decât proectilul căzând fără viteză iniţială; mai

mult, deviaţiile au loc în sensuri contrarii, adică spre West dacă proectilul se suie şi spre Est dacă el coboară.

In punctul culminant S, viteza relativă v_r fiind orizontală, are ca valoare

$$v_r = \frac{dy}{dt} = -2\,\omega\,v_0\,t\cos\lambda + \omega\,gt^2\cos\lambda$$

adică, înlocuind pe t prin valoarea sa $\frac{v_0}{g}$,

$$v_r = -\frac{\omega\,v_0^2}{g}\cos\lambda\,.$$

Această viteză nefiind nulă şi având sensul Oy' face ca proectilul să continue de a devia spre West.

In punctul B, z fiind nul, avem

$$-v_0 + \frac{1}{2}\,gt = o \qquad \text{deci} \qquad t = \frac{2\,v_0}{g}$$

şi prin urmare

$$\mathrm{OB} = -\frac{4\,v_0^3}{3\,g^2}\,\omega\cos\lambda$$

adică o deviaţie de 2 ori mai mare decât OA în valoare absolută.

De altfel, proectilul soseşte în B cu viteza verticală v_0, deoarece pentru $t = \frac{2\,v_0}{g}$ avem $\frac{dy}{dt} = o$ şi $\frac{dz}{dt} = v_0$. Din toate acestea rezultă, că între O şi B traectoria are o formă care se aseamănă cu aceea a unei jumătăţi de elipsă, simetrică în raport de săgeata AS.

Din B mai departe, dacă punctul continuă să coboare dedesubtul nivelului său primitiv, deviaţia descreşte în valoare absolută, se anulează ($y = o$) pentru $t = \frac{3\,v_0}{g}$ când $z = \frac{3\,v_0^2}{2\,g}$ (de 3 ori săgeata AS) apoi creşte necontenit în direcţia Est.

In tragerile antiaeriene atmosferice, care se execută cu viteze iniţiale vecine de 1000 de metri pe secundă, trebue să se ţină seama de deviaţia spre West a proectilelor, care până în punctul culminant al traectoriei poate depăşi cifra de 100 de metri.

c). ***Proectil tras de un tun, cu viteză inițială conținută în planul perpendicular meridianului și în direcția Est.***

Fie v_0 viteza inițială, coprinsă prin ipoteză în planul yOz și α înclinarea ei pe axul Oy. Făcând în formulele (7)

$$a = o, \quad b = v_0 \cos \alpha, \quad c = - v_0 \sin \alpha$$

obținem ecuațiile

$$x = \omega v_0 t^2 \cos \alpha \sin \lambda$$

$$y = v_0 t \cos \alpha - \omega v_0 t^2 \sin \alpha \cos \lambda + \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \lambda$$

$$z = - v_0 t \sin \alpha - \omega v_0 t^2 \cos \alpha \cos \lambda + \frac{1}{2} g t^2 .$$

Timpul pe care-l pune mobilul ca să recadă pe sol este dat de valoarea lui t, diferită de zero, care anulează pe z, adică

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g - 2 \omega v_0 \cos \alpha \cos \lambda}$$

care se poate scrie

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g \left(1 - \frac{2 \omega v_0}{g} \cos \alpha \cos \lambda\right)} = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \left(1 - \frac{2 \omega v_0}{g} \cos \alpha \cos \lambda\right)^{-1}$$

și, neglijând termenii în ω^2,

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \left(1 + \frac{2 \omega}{g} v_0 \cos \alpha \cos \lambda\right).$$

Deducem, pentru valorile corespunzătoare ale lui x și y, cu aceiași aproximație

$$x = \frac{4 \omega v_0^3 \sin \lambda}{g^2} \cdot \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$y = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \alpha + \frac{4}{3} \frac{\omega v_0^3 \cos \lambda}{g^2} (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha .$$

Valoarea lui x reprezintă *deviația către Sud*; ea este pozitivă dacă α este mai mic decât 90 de grade.

Valoarea lui y reprezintă bătaia; primul termen este, după cum știm, valoarea bătăii în cazul când pământul ar sta nemișcat; termenul al doilea este pozitiv când $\sin^2 \alpha$ este mai mic

decât $\frac{3}{4}$, ceea ce corespunde la $\alpha < 60^0$. In consecinţă, *rotaţia pământului măreşte sau micşorează bătaia, după cum înclinarea vitezei iniţiale pe orizont este mai mică sau mai mare decât 60 de grade.*

4. **Mişcare pe un plan orizontal.** Să considerăm un punct material greu, care se mişcă la suprafaţa pământului pe un plan orizontal, sub simplul efect al unei viteze iniţiale v_0.

Singurele forţe reale care lucrează asupra mobilului fiind greutatea sa mg şi reacţiunea normală N a planului, avem potrivit ecuaţiilor (3) în care facem $X = o$, $Y = o$, $Z = - N$ şi $\frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = o$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\ \omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - 2\ \omega \sin\lambda \frac{dx}{dt}$$

$$o = - N + mg - 2\, m\, \omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}\ .$$

Ultima ecuaţie dă valoarea reacţiunii N, care după cum se vede diferă întru câtva de greutatea mg din cauza termenului în ω.

Cele două dintâi sunt ecuaţiile mişcării în planul xOy. Din ele deducem

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = o$$

deci

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \text{const}.$$

adică $v_r{}^2 = \text{const}$. Puteam ajunge şi mai direct la acest rezultat prin aplicaţiunea teoremei forţelor vii, care ne dă $d\left(\frac{1}{2}\, m v_r{}^2\right) = o$, travaliul elementar al forţelor mg şi N fiind în adevăr nul.

Viteza relativă a mişcării fiind astfel constantă este egală cu v_0. Fie α unghiul pe care îl face v_r cu Ox. Avem $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$

şi $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha$. Introducând aceste expresii în una sau alta din cele două ecuaţii ale mişcării, găsim

$$\frac{d\alpha}{dt} = - 2\,\omega \sin \lambda .$$

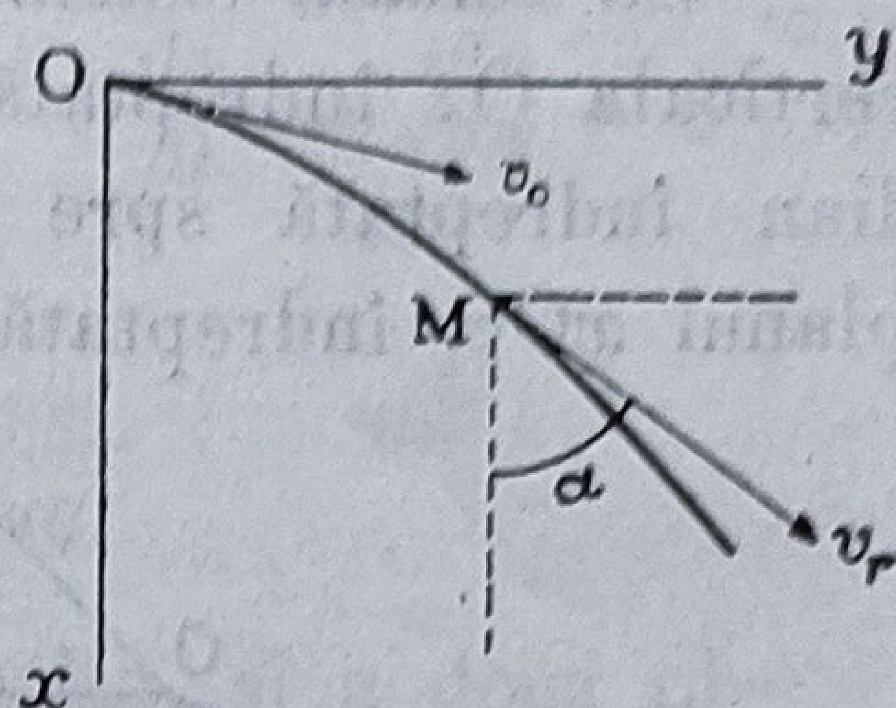


Fig. 84

Unghiul α descreşte deci când creşte timpul, aşa că traectoria este o curbă ce rămâne necontenit în dreapta vitezei mobilului. Dacă pe de altă parte însemnăm prin s arcul OM, avem pentru valoarea razei de curbură din M,

$$\rho = - \frac{ds}{d\alpha}{}^{1)} = - \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{v_0}{2\,\omega \sin \lambda} .$$

Raza de curbură fiind constantă, rezultă că traectoria este circulară, raza cercului fiind însă foarte mare din cauza micimii productului $\omega \sin \lambda$.

Astfel, în emisfera de Nord, un corp în mişcare pe un plan orizontal are tendinţa de a devia la dreapta vitezei sale. Fluviile care curg în această emisferă, sub mari latitudini [2]), exercită în mijlociu o presiune mai mare pe ţărmul lor drept decât pe cel stâng, aşa că malul lor drept va fi mâncat puţin câte puţin.

De asemenea cu privire la cicloane, când există în atmosferă un centru de aspiraţie C, moleculele gazoase tind a înainta în linie dreaptă către acest centru; însă forţa centrifugă compusă dă fie căreia dintre ele, M, o deviaţie care, în emisfera de Nord, se produce spre dreapta vitezei, aşa încât raza vectoare MC este obligată de a se învârti în jurul centrului C, în sensul invers al acelor unui ceasornic. Acesta este în adevăr sensul rotaţiei cicloanelor în emisfera de Nord. Sensul este invers în emisfera de Sud şi acest fapt se explică în mod analog.

III. PENDULUL FOUCAULT.

Foucault a pus în evidenţă printr'o experienţă celebră

1) Luăm semnul minus, căci s creşte când α se micşorează şi ρ trebue să fie pozitiv.

2) Când ρ este mai mic.

influenţa forţei centrifuge compuse, datorită rotaţiei pământului, asupra oscilaţiilor unui pendul.

Să reluăm sistemul de axe dreptunghiulare constituit din verticala Oz îndreptată în jos, orizontala Ox din planul meridian îndreptată spre Sud şi orizontala Oy perpendiculară pe planul xOz, îndreptată spre Est.

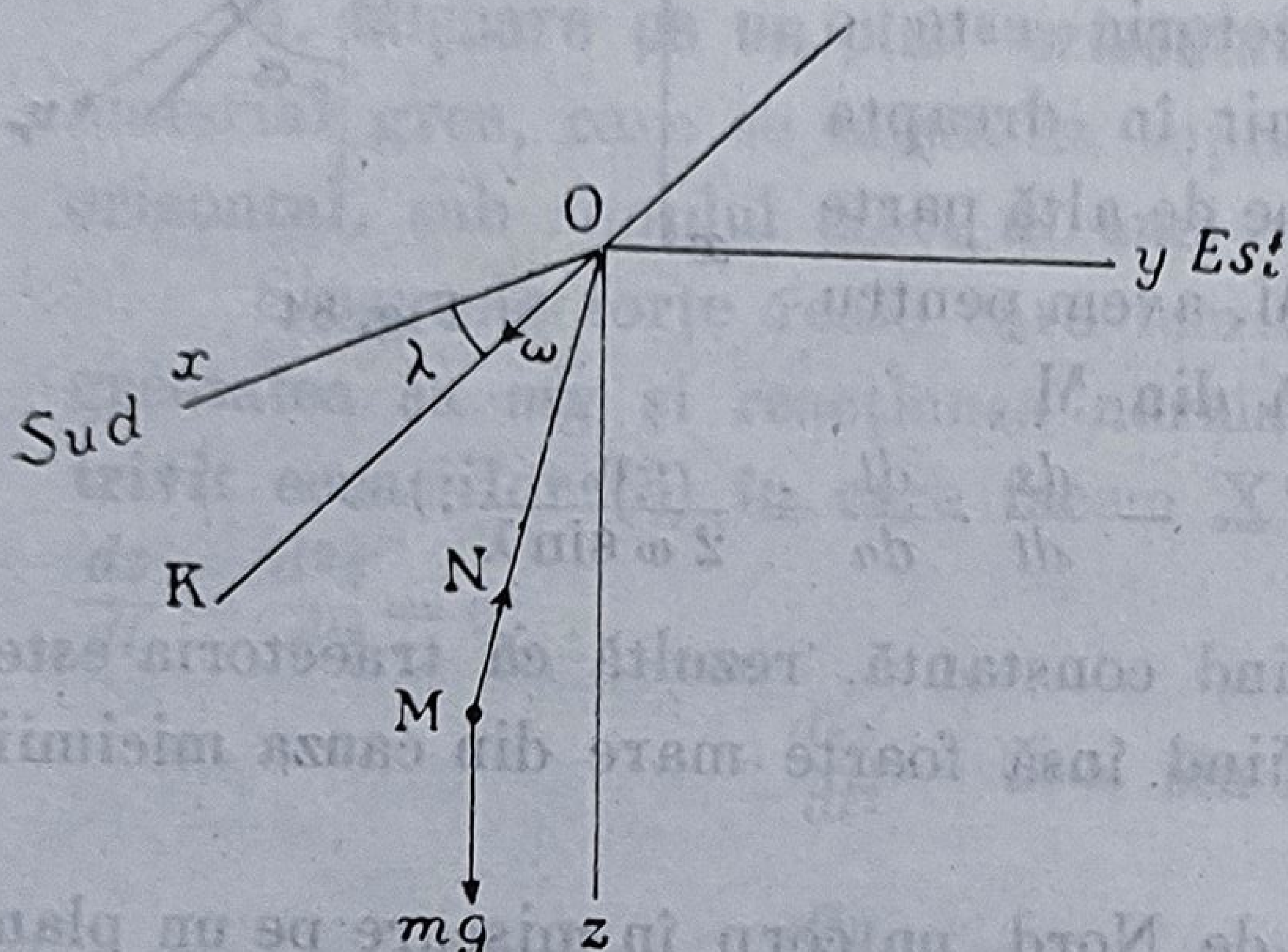


Fig. 85

Punctul O fiind punctul de suspensiune al pendulului, l lungimea sa şi N acţiunea firului asupra greutăţii mg susţinută de fir, ecuaţiile mişcării punctului M vor fi tot ecuaţiile (3) de mai sus, în care vom locui pe X, Y, Ż prin componentele acţiunii firului

$$-\mathrm{N}\frac{x}{l}, \quad -\mathrm{N}\frac{y}{l}, \quad -\mathrm{N}\frac{z}{l}$$

mai adăogând ecuaţia care exprimă că lungimea OM rămâne invariabilă şi egală cu l. Obţinem astfel sistemul de patru ecuaţii:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{N}\frac{x}{l} + 2\,m\,\omega\,\sin\lambda\,\frac{dy}{dt}$$

$$(10)\qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\mathrm{N}\frac{y}{l} + 2\,m\,\omega\left(\cos\lambda\,\frac{dz}{dt} - \sin\lambda\,\frac{dx}{dt}\right)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\mathrm{N}\frac{z}{l} + mg - 2\,m\,\omega\,\cos\lambda\,\frac{dy}{dt}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = l.$$

Cazul micilor oscilaţii. Integraţiunea acestui sistem de ecuaţii dă loc la mari dificultăţi. Noi ne vom mărgini la cazul când pendulul nu se depărtează decât foarte puţin de verticală; atunci raporturile $\frac{x}{l}$ şi $\frac{y}{l}$ sunt destul de mici pentru ca să

putem neglija în calcule patratele lor ca și productele lor cu ω. In această ordine de idei, vom avea:

$$\frac{z}{l} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}} = 1, \qquad z = l, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \, .$$

Ecuația a treia ne dă

$$-\mathrm{N} = 2\, m\, \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} - mg$$

și substituind această valoare în ecuațiile întâia și a doua obținem, neglijând termenii care conțin în factor pe $\frac{x}{l}\,\omega$ și $\frac{y}{l}\,\omega$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\, x + 2\, \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}\, y - 2\, \omega \sin \lambda \frac{dx}{dt} \, .$$

Punând pentru simplificare

$$\omega \sin \lambda = r \, , \qquad \frac{g}{l} = a^2$$

avem în cele din urmă

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2\, r \frac{dy}{dt} + a^2\, x = 0 \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2\, r \frac{dx}{dt} + a^2\, y = 0 \, . \end{aligned}$$

Aceste două ecuații sunt suficiente pentru determinarea mișcării proecției M′ a punctului M pe planul orizontal xOy.

Integrațiune. Pentru a integra ecuațiile (11) vom înmulți mai întâi ecuația a doua cu $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ și apoi le vom aduna pe una cu alta. Obținem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + i \frac{d^2y}{dt^2} + 2\, r\, i \left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) + a^2 (x + y\, i) = 0$$

sau, dacă punem $x + yi = u$,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\, r\, i \frac{du}{dt} + a^2 u = 0 \, .$$

Această ecuație este analoagă cu aceea pe care am întâl-

nit-o când am studiat mişcarea unui pendul simplu într'un mediu rezistent; soluţia sa generală este

$$u = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \tag{12}$$

A şi B fiind două constante iar α şi β rădăcinile ecuaţiei

$$X^2 + 2ri X + a^2 = o.$$

Avem

$$X = -ri \pm \sqrt{-r^2 - a^2}$$

însă r^2 fiind egal cu $\omega^2 \sin^2 \lambda$ şi ω^2 fiind după cum ştim neglijabil, cele două rădăcini α şi β sunt

$$\alpha = (a - r)\, i, \qquad \beta = -(a + r)\, i.$$

Constantele A şi B se determină prin condiţiile iniţiale. Fie $u_0 = x_0 + y_0 i$ valoarea iniţială a lui u şi să presupunem că *viteza iniţială a punctului* M *este nulă.* Făcând în (12) $t = o$ şi $u = u_0$, obţinem

$$A + B = u_0. \tag{13}$$

Pe de altă parte, derivata lui u fiind

$$\frac{du}{dt} = \alpha\, Ae^{\alpha t} + \beta\, Be^{\beta t}$$

avem, exprimând că pentru $t = o$ această derivată, egală cu $\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$, este nulă,

$$A\alpha + B\beta = o$$

sau, înlocuind pe α şi β prin expresiile lor de mai sus,

$$A(a - r) - B(a + r) = o. \tag{14}$$

Cele două relaţii (13) şi (14) determină pe A şi pe B. Putem să le punem sub forma următoare:

$$\frac{A}{a + r} = \frac{B}{a - r} = \frac{u_0}{2a}. \tag{15}$$

Să introducem acum valorile α, β, A, şi B în expresia (12) a lui u. Avem, mai întâi,

$$u = A e^{(a - r)ti} + Be^{-(a + r)ti}$$

sau

$$u = e^{-rti}\left(A e^{ati} + B e^{-ati}\right)$$

sau încă [1])

$$u = e^{-rti}\left[(A+B)\cos at + (A-B)\, i \sin at)\right].$$

Inlocuind acum pe A și B prin valorile lor deduse din (15) obținem

$$u = u_0\, e^{-rti}\left(\cos at + \frac{ri}{a}\sin at\right).$$

Insă

$$u = x + y\,i,\quad u_0 = x_0 + y_0\,i = \rho_0(\cos\psi_0 + i\sin\psi_0) = \rho_0\, e^{\psi_0 i}$$

deci

$$(16)\qquad x + y\,i = \rho_0\, e^{(\psi_0 - rt)i}\left(\cos at + \frac{ri}{a}\sin at\right).$$

Dacă în această relație separăm părțile reale și părțile imaginare, obținem pe x și pe y în funcție de t. Soluția problemei este deci complectă.

Interpretare. Relația (16) este susceptibilă de o interpretare remarcabilă. Să punem

$$\psi_0 - rt = \varphi$$

$$(17)\qquad x' = \rho_0\cos at,\qquad y' = \rho_0\frac{r}{a}\sin at.$$

Avem atunci

$$x + y\,i = e^{\varphi i}(x' + y'i)$$

sau

$$x + y\,i = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(x' + y'i)$$

de unde, separând părțile reale și cele imaginare,

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Aceste ecuații arată că x' și y' sunt cordonatele punctului M$'$, proecție al lui M, în raport de sistemul de axe $x'Oy'$ care face cu sistemul primitiv xOy un unghiu φ în sensul dela Ox către Oy.

Relația $\varphi = \psi_0 - rt$ arată că sistemul $x'Oy'$ se învâr-

---

[1]) Reamintim formulele cunoscute din Analiză:

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x,\qquad e^{-xi} = \cos x - i\sin x.$$

teşte în jurul verticalei Oz cu o viteză unghiulară $\frac{d\varphi}{dt} = -r =$ $-\omega \sin \lambda$ adică în sensul dela Oy către Ox, care este sensul dela Est spre Sud.

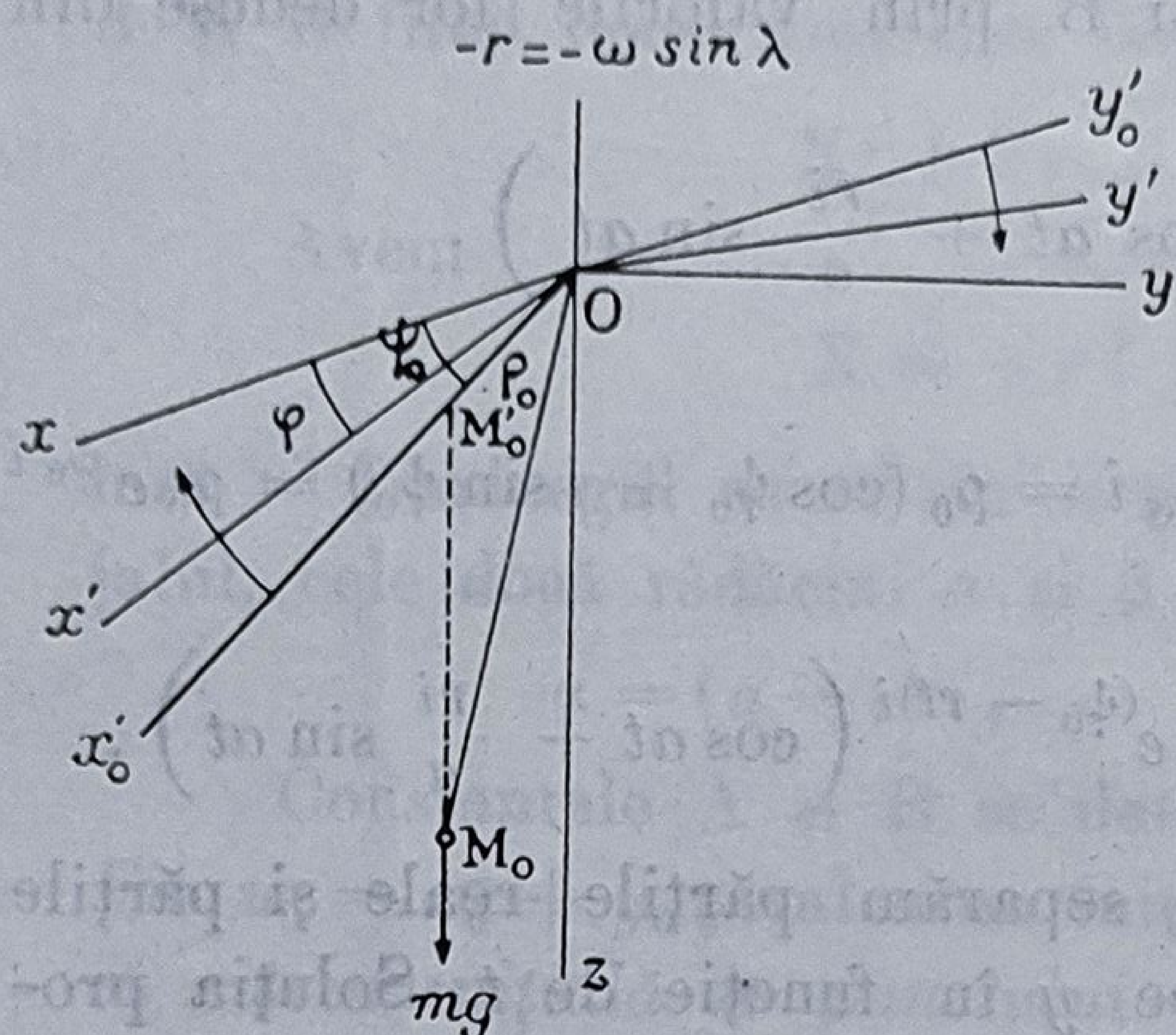


Fig. 86

Valorile (17) ale lui x' şi y' în funcţie de t determină mişcarea lui M$'$ în raport de sistemul de comparaţie x'Oy'. Această mişcare este periodică; durata perioadei fiind

$$T = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\sqrt{\frac{y}{l}}$$

este egală cu aceea a unei oscilaţii complecte a pendulului simplu de lungime l în planul vertical.

Ecuaţia traectoriei punctului M$'$ în raport de x'Oy' se obţine prin eliminarea lui t între ecuaţiile (17); această traectorie este o elipsă cu centrul în O, ale căreia semi-axe îndreptate pe Ox' şi Oy' sunt respectiv egale cu ρ_0 şi $\rho_0 \frac{r}{a}$. Semiaxul de pe Oy' este însă foarte mic faţă de celălalt, din cauza micimii factorului r.

In rezumat, din ceea ce precedă se conchide că *în mişcarea aparentă a pendulului la suprafaţa pământului, proecţia orizontală a punctului greu descrie o elipsă mobilă foarte alungită, al căreia ax mare se învârteşte în jurul verticalei punctului de suspensiune în sensul dela Est spre Sud, în emisfera boreală, cu o viteză unghiulară constantă, egală cu aceea a rotaţiei terestre înmulţită cu sinusul latitudinii locului de observaţie.*

Elipsa pe care o descrie punctul M$'$ fiind foarte alungită în sensul axului Ox', acest punct nu se depărtează mai de loc de ax, aşa că pendulul pare a descrie un plan mobil care se învârteşte în jurul verticalei punctului de suspensiune cu viteza unghiulară $\omega \sin \lambda$.

Foucault a verificat acest rezultat suspendând un pendul de centrul cupolei Panteonului din Paris, pendulul fiind constituit dintr'un fir de oţel de 67 metri lungime, care susţinea la partea de jos o bulă masivă de aramă prevăzută cu un vârf ascuţit. Acest vârf însemna direcţia mişcării pendulului pe două moviliţe de nisip aşezate pe sol de o parte şi de alta a verticalei punctului de suspensie.

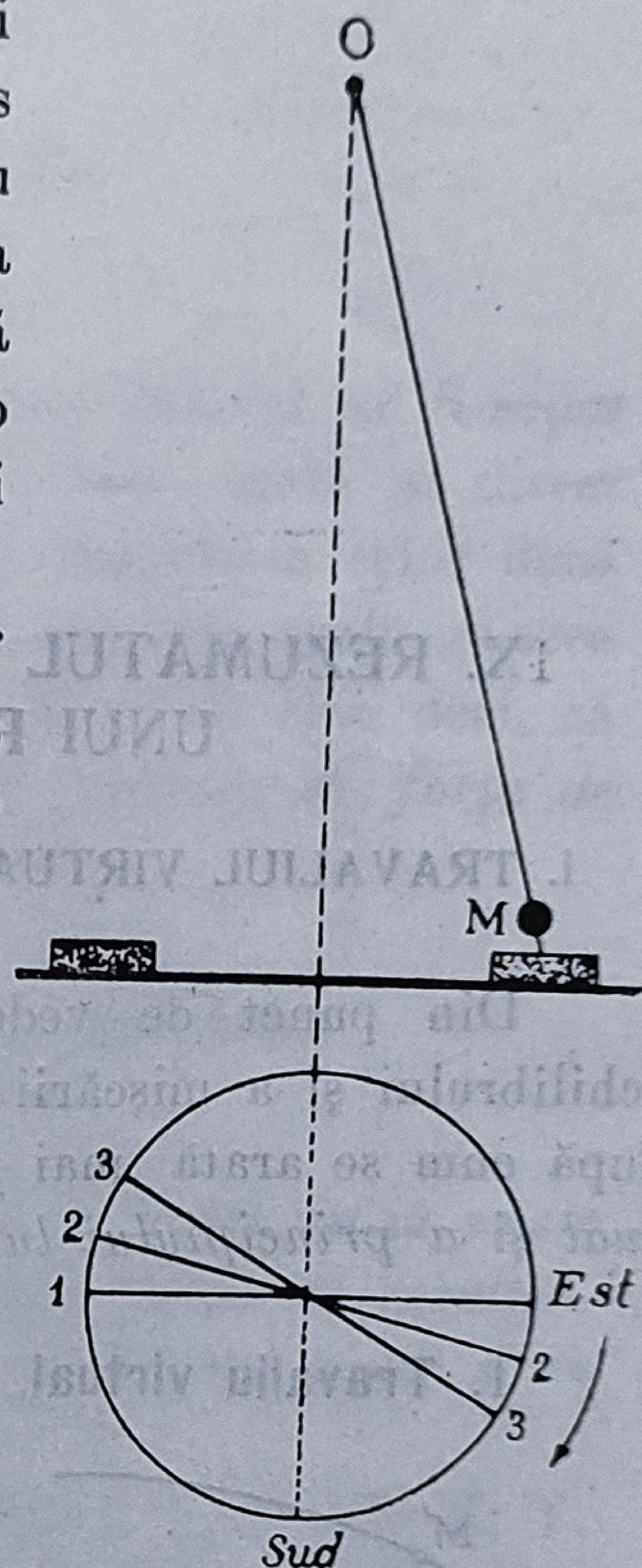


Fig. 87

Notă. Aplicaţia teoremei forţelor vii, atât în cazul mişcării proectilelor, cât şi în cazul pendulului conduce la simpla egalitate

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = mgz - mgz_0$$

adică

$$v^2 - v_0{}^2 = 2\ g\,(z - z_0)$$

aceasta din cauză că forţa centrifugă compusă şi acţiunea firului de pendul fiind şi una şi alta perpendiculare pe viteza relativă a mobilului, travaliurile lor sunt nule şi nu intră în calculul travaliului total, care rămâne astfel datorit numai acţiunei greutăţii punctului.

IX. REZUMATUL ECHILIBRULUI ŞI MIŞCĂREI UNUI PUNCT MATERIAL.

I. TRAVALIUL VIRTUAL ŞI PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT.

Din punct de vedere al *unităţii de metodă*, chestiunea echilibrului şi a mişcării unui punct material, poate fi rezumată după cum se arată mai jos, prin consideraţia *travaliului virtual* şi *a principiului lui d'Alembert.*

1. **Travaliu virtual.** Să considerăm traectoria unui punct material şi două poziţiuni M şi M′ infinit vecine. Fie F_1 una din forţele care lucrează asupra punctului şi ds diferenţiala arcului MM′.

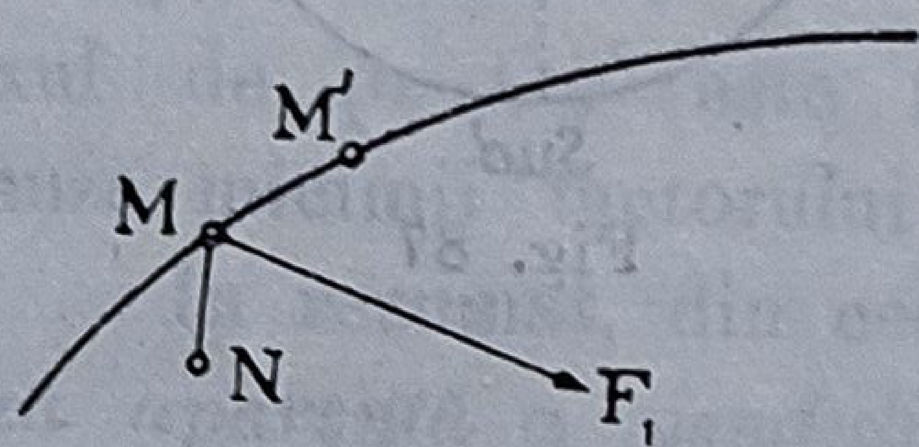


Fig. 88

Travaliul forţei F_1 în deplasarea elementară MM′ este $F_1\, ds \cos (F_1, ds)$. Acesta este un travaliu real.

Să imaginăm însă o deplasare elementară fictivă MN. Travaliul forţei F_1 pentru această deplasare va fi

$$F_1\, \delta s \cos (F_1, \delta s)$$

însemnând prin δs elementul MN. Un asemenea travaliu se numeşte *travaliu virtual.*

Dacă punctul M ar fi în echilibru, atunci deplasarea reală ds fiind nulă, orice travaliu ar fi virtual. — Se rezervă notaţiunea δ pentru diferenţialele travaliurilor virtuale.

2. **Principiul lui d'Alembert.** Fie R rezultanta forţelor care lucrează asupra unui punct material M, adică forţa motrice. Avem:



Fig. 89

$R = mw$, w fiind acceleraţia mişcării. Dacă punctul ar fi supus în acelaşi timp forţei R şi unei forţe $-mw$, egală şi direct opusă lui R, punctul ar fi în echilibru, rezultanta celor două forţe considerate fiind nulă. Ori, forţa $-mw$ este egală cu ceea ce am numit forţa de inerţie a punctului M. Vom zice, deci, că *există echilibru între rezultanta forţelor aplicate şi forţa de inerţie*. Acesta este principiul lui *d'Alembert*.

II. REZUMATUL ECHILIBRULUI ŞI MIŞCĂREI UNUI PUNCT MATERIAL.

1. **Echilibru.** a). *Punct liber.* Teorema I. ***Pentru ca să existe echilibru, este necesar şi suficient ca travaliul virtual al rezultantei forţelor ce lucrează asupra punctului, să fie nul în ori şi ce deplasare elementară.***

Necesar. In adevăr, dacă există echilibru, proecţiile X, Y, Z ale rezultantei forţelor pe trei axe cordonate dreptunghiulare sunt nule şi avem

$$(1) \qquad \delta\mathfrak{T} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$$

ori care ar fi deplasările virtuale δx, δy, δz.

Suficient. Dacă egalitatea (1) are loc ori cari ar fi δx, δy, δz trebue să avem $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ şi punctul este în echilibru.

b). *Punct supus la legături,* adică obligat de a rămâne pe o suprafaţă sau pe o curbă. Teorema II: ***Pentru ca să existe echilibru, este necesar şi suficient ca travaliul virtual al rezultantei forţelor direct aplicate să fie nul pentru ori ce deplasare elementară compatibilă cu legătura, adică pentru ori ce deplasare elementară a punctului pe suprafaţă sau pe curbă.***

Necesar. Fie, în adevăr, F rezultanta forţelor direct aplicate, X, Y, Z proecţiile sale pe trei axe cordonate dreptunghiulare şi δx, δy, δz proecţiile pe aceleaşi axe ale unei deplasări elementare virtuale pe suprafaţă sau pe curbă. Dacă există echilibru, forţa F este normală suprafeţii sau curbei şi avem

$$\delta \mathfrak{T} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0 \tag{2}$$

ecuaţie care exprimă perpendicularitatea forţei.

Suficient. Dacă egalitatea (2) are loc pentru δx, δy, δz compatibili cu legătura, forţa F este normală suprafeţii sau curbei şi există echilibru.

Aplicaţie. *Echilibru pe o suprafaţă dată* $f(x, y, z) = 0$. Avem ca primă ecuaţie potrivit teoremei precedente,

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0$$

însă δx, δy, δz fiind deplasări pe suprafaţă verifică ecuaţia

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z = 0\,.$$

Rezultă deci că

$$\frac{X}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

şi sistemul acesta de 2 ecuaţii împreună cu ecuaţia suprafeţii $f(x, y, z) = 0$ ne permite a calcula cordonatele poziţiei de echilibru, în cazul când X, Y, Z depind numai de x, y, z.

2. Mişcare. a). *Punct liber*. Aplicăm teorema I a travaliului virtual celor două forţe R şi $-mw$ care îşi fac echilibru.

Fie X, Y, Z proecţiile rezultantei R; acelea ale forţei de inerţie sunt $-m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $-m\dfrac{d^2y}{dt^2}$, $-m\dfrac{d^2z}{dt^2}$.

Avem

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

ori care ar fi δx, δy, δz. Rezultă că coeficienţii lui δx, δy, δz sunt nuli şi prin urmare

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

care sunt ecuaţiile mişcării.

b). *Punct supus la legături.* Aplicăm teorema II a travaliului virtual forţelor direct aplicate, printre care socotim şi forţele de inerţie.

Avem deci

$$\left(X - m\,\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\,\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\,\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

δx, δy, δz fiind deplasări pe suprafaţă sau pe curbă.

Aplicaţie. *Mişcare pe o suprafaţă dată* $f(x, y, z) = 0$. La ecuaţia precedentă trebue să alăturăm ecuaţia

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z = 0 .$$

Deducem, pentru compatibilitatea sistemului,

$$(\alpha)\qquad \frac{X - m\,\dfrac{d^2 x}{dt^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - m\,\dfrac{d^2 y}{dt^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - m\,\dfrac{d^2 z}{dt^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

ecuaţii care împreună cu $f(x, y, z) = 0$ determină pe x, y, z în funcţie de t.

Odată această determinare realizată, putem calcula şi forţa de legătură, adică acţiunea normală a suprafeţii asupra punctului. Ecuaţiile (α) ne dau în adevăr, dacă egalăm raporturile cu $-\lambda$:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m\,\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

ceea ce arată că forţa de legătură are ca componente

$$\lambda\,\frac{\partial f}{\partial x}\,,\qquad \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y}\,,\qquad \lambda\,\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Se vor putea deci calcula aceste componente, dacă s'au putut obţine expresiunile cordonatelor x, y, z în funcţie de t. Astfel

$$\lambda\,\frac{\partial f}{\partial x} = m\,\frac{d^2x}{dt^2} - X .$$

Valoarea forţei de legătură este

$$\lambda\,\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} .$$

III. MIŞCAREA UNUI PUNCT PE O SUPRAFAŢĂ SAU PE O CURBĂ MOBILĂ.

Fie, spre exemplu, C, o curbă plană mobilă, adică o curbă care să varieze de poziţie şi chiar de formă odată cu timpul:

$$f(x, y, t) = 0 .$$

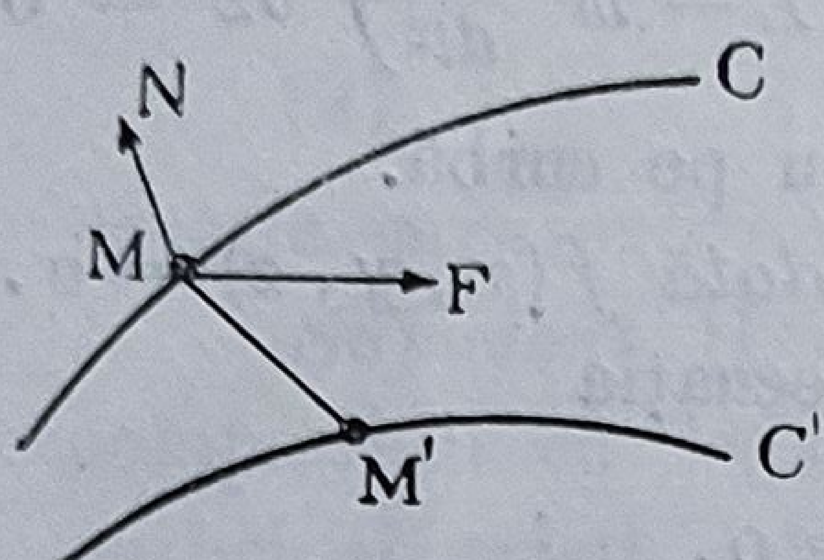


Fig. 90

In momentul t mobilul se găseşte în M pe curba C, iar după timpul dt el ocupă poziţia M' pe curba C' infinit apropiată de C.

Fie F rezultanta forţelor direct aplicate mobilului şi N acţiunea curbei C asupra lui. Dacă voim a aplica teorema forţelor vii trebue să calculăm nu numai travaliul forţei F în deplasarea MM' dar şi travaliul acţiunei N în acestă deplasare, care nu mai este nul ca în cazul curbelor fixe. Cum N este necunoscut, aceasta revine a zice că teorema în chestiune nu se poate aplica.

Din potrivă, teorema II a travaliului virtual se aplică şi în cazul acesta, fără nici o deosebire de cazul curbelor fixe, căci în aceea teoremă este vorba numai de deplasările compatibile cu legătura *aşa cum există ea în momentul t*, potrivit definiţiei însăşi a travaliului virtual. Cum în exemplul luat, singura deplasare compatibilă cu legătura în momentul t este o deplasare elementară pe curba C, considerată ca fixă, travaliul forţei N este nul pentru această deplasare, aşa că teorema se aplică *considerând pe t ca constant.* Vom avea deci ecuaţiile

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = 0$$

care împreună cu ecuaţia curbei vor rezolvi chestiunea determinării mişcării.

Vom da exemple de mişcarea unui punct pe o suprafaţă sau pe o curbă mobilă în Partea III-a a Cursului de faţă.

PARTEA II.

ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE

I. TEORIA CENTRELOR DE GREUTATE.

I. DEFINIŢIA ŞI CORDONATELE CENTRULUI DE GREUTATE.

1. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale. Fie un sistem de n puncte materiale: A_1, A_2,... A_n de masse m_1, m_2,... m_n.

Se numeşte *centru de greutate* al sistemului, punctul G pentru care suma geometrică [1])

$$(m_1 \, GA_1) + (m_2 \, GA_2) + \ldots + (m_n \, GA_n)$$

sau $\Sigma (m \, GA)$ este nulă.

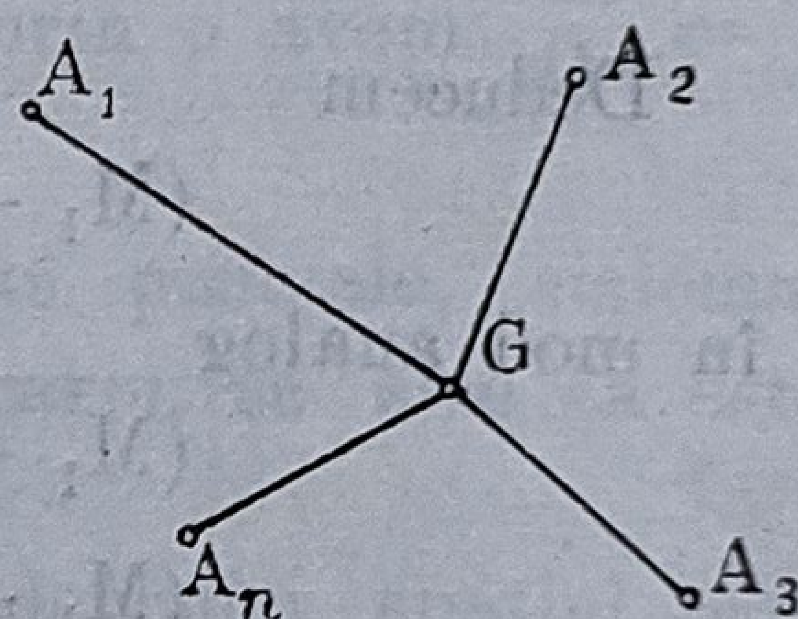


Fig. 91

Fie în raport de 3 axe cordonate: a, b, c cordonatele lui G şi x, y, z cordonatele unuia oarecare din punctele date. Vom avea în proecţiune pe axe:

$$\Sigma \, m \, (x - a) = 0 \,, \quad \Sigma \, m \, (y - b) = 0 \,, \quad \Sigma \, m \, (z - c) = 0$$

adică

$$\Sigma \, m \, x = a \, \Sigma \, m \,, \quad \Sigma \, m \, y = b \, \Sigma \, m \,, \quad \Sigma \, m \, z = c \, \Sigma \, m$$

---

[1]) *Cinematica*, pag. 12.

și în consecință

$$(1) \qquad a = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \qquad b = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \qquad c = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

care sunt expresiunile cordonatelor punctului G. Dacă punem $\Sigma m = M$, adică dacă însemnăm prin M massa sistemului, formulele precedente se scriu

$$M a = \Sigma m x, \qquad M b = \Sigma m y, \qquad M c = \Sigma m z.$$

2. **Centrul de greutate a două sisteme.** Fie un sistem material de massă M_1 având ca centru de greutate G_1 (cordonate a_1, b_1, c_1) și un al doilea sistem material de massă M_2 având ca centru de greutate G_2 (cordonatele a_2, b_2, c_2). Se cere a se determina centrul de greutate G (cordonate a, b, c) al sistemului total de massă $M_1 + M_2$.

Avem, deosebind prin indicii 1 și 2 literile care se raportă la cele două sisteme

$$M_1 a_1 = \Sigma m_1 x_1, \qquad M_1 b_1 = \Sigma m_1 y_1, \qquad M_1 c_1 = \Sigma m_1 z_1$$
$$M_2 a_2 = \Sigma m_2 x_2, \qquad M_2 b_2 = \Sigma m_2 y_2, \qquad M_2 c_2 = \Sigma m_2 z_2$$

iar pe de altă parte

$$(M_1 + M_2)\, a = \Sigma m x = \Sigma m_1 x_1 + \Sigma m_2 x_2.$$

Deducem

$$(M_1 + M_2)\, a = M_1 a_1 + M_2 a_2$$

și în mod analog

$$(M_1 + M_2)\, b = M_1 b_1 + M_2 b_2$$
$$(M_1 + M_2)\, c = M_1 c_1 + M_2 c_2$$

egalități care determină pe a, b, c.

Dacă luăm dreapta $G_1 G_2$ drept ax Ox, avem

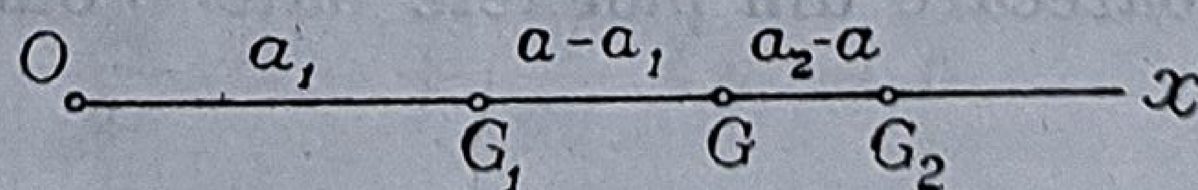


Fig. 92

$$b_1 = 0, \quad c_1 = 0; \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0$$

și prin urmare

$$b = 0, \quad c = 0$$
$$M_1 (a - a_1) = M_2 (a_2 - a).$$

Conchidem că centrul de greutate G se găseşte pe dreapta G_1G_2 şi că distanţele GG_1 şi GG_2 sunt invers proporţionale cu massele M_1 şi M_2.

3. **Determinarea centrului de greutate al unui sistem continuu de puncte materiale.** Să considerăm un sistem de puncte materiale infinit apropiate unele de altele. Acest sistem va forma un *spaţiu material*, o *suprafaţă materială* sau o *linie materială*, după cum va prezenta trei, două sau o singură dimensiune. Căutarea centrului de greutate al unui asemenea sistem, revine după cum se va vedea, la efectuări de cuadraturi.

a). *Spaţiuri materiale.* Fie un spaţiu material de volum V şi de massă M. Să considerăm un punct P din acest spaţiu; fie ΔV un volum infinit de mic coprinzând punctul P şi ΔM massa materiei ce conţine. Raportul $\frac{\Delta M}{\Delta V}$ reprezintă densitatea mijlocie a volumului ΔV; dacă facem pe ΔV să descrească necontenit, fără a înceta însă de a conţine punctul P, acest raport va tinde către o limită fixă [1]), care va fi *densitatea volumului* V *în punctul* P. Insemnând această densitate prin ρ avem $\frac{dM}{dV} = \rho$ sau $dM = \rho\, dV$.

Când densitatea este aceiaşi în toate punctele, sistemul material este zis *omogen*; în cazul contrariu, se zice că este *eterogen*.

Să descompunem în elemente infinit de mici spaţiul material considerat şi să însemnăm prin x, y, z cordonatele unui punct P al sistemului, ρ densitatea în acest punct, dV, dM volumul şi massa elementului care conţine punctul P.

Aplicaţia formulelor (1) ne dă pentru cordonatele centrului de greutate

$$a = \frac{\int x\, dM}{\int dM}, \qquad b = \frac{\int y\, dM}{\int dM}, \qquad c = \frac{\int z\, dM}{\int dM}$$

---

[1]) Adică, presupunem că această limită există.

sau, findcă dM este egal cu $\rho\, dV$,

$$(2) \qquad a = \frac{\int \rho x\, dV}{\int \rho\, dV}, \qquad b = \frac{\int \rho y\, dV}{\int \rho\, dV}, \qquad c = \frac{\int \rho z\, dV}{\int \rho\, dV}.$$

Dacă raportăm sistemul la 3 axe cordonate dreptunghiulare, avem $dV = dx\, dy\, dz$ şi prin urmare

$$M = \int \rho\, dV = \iiint \rho\, dx\, dy\, dz$$

$$M a = \iiint \rho x\, dx\, dy\, dz, \qquad M b = \iiint \rho y\, dx\, dy\, dz,$$

$$M c = \iiint \rho z\, dx\, dy\, dz.$$

Când sistemul este omogen, ρ fiind constant dispare din formulele (2) aşa că avem

$$a = \frac{\int x\, dV}{V}, \qquad b = \frac{\int y\, dV}{V}, \qquad c = \frac{\int z\, dV}{V}.$$

b). *Suprafeţe materiale.* Densitatea suprafeţii în punctul P va fi limita raportului $\frac{\Delta M}{\Delta S}$, în care ΔS reprezintă elementul de suprafaţă care conţine pe P şi ΔM massa acestui element. Deci $\frac{dM}{dS} = \rho$ sau

$$dM = \rho\, dS.$$

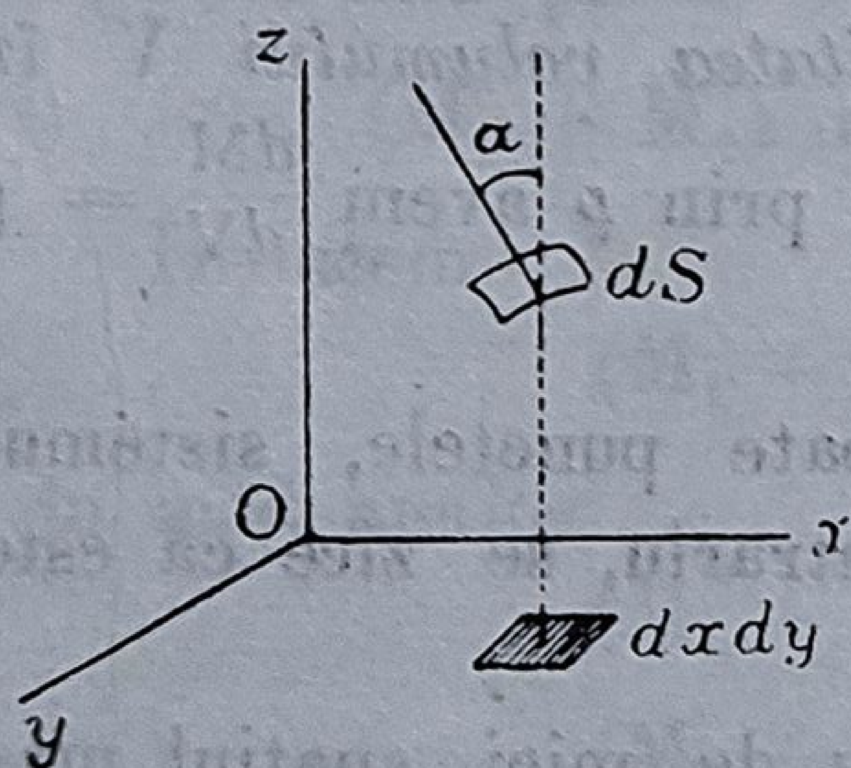


Fig. 93

Cordonatele centrului de greutate, au ca expresiuni

$$(3) \qquad a = \frac{\int \rho x\, dS}{\int \rho\, dS}, \qquad b = \frac{\int \rho y\, dS}{\int \rho\, dS}, \qquad c = \frac{\int \rho z\, dS}{\int \rho\, dS}.$$

Dacă suprafaţa este raportată la 3 axe dreptunghiulare, putem lua ca dS elementul de suprafaţă care are ca proecţie dreptunghiul $dx\, dy$ pe planul xOy.

Insemnând prin α unghiul normalei la elementul dS cu axul Oz, avem deci $dS \cos \alpha = dx\, dy$. Insă, după cum se ştie din

Analiză, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, p şi q fiind derivatele parţiale ale lui z în raport de x şi y din ecuaţia suprafeţii: $z = f(x, y)$. Aşa dar

$$d\,S = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\,dx\,dy$$

şi formulele cordonatelor centrului de greutate se scriu

$$M\,a = \iint \rho\, x \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\,dx\,dy$$

$$M\,b = \iint \rho\, y \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\,dx\,dy$$

$$M\,c = \iint \rho\, z \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\,dx\,dy$$

în care

$$M = \int \rho\, dS = \iint \rho \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\,dx\,dy\,.$$

Când suprafaţa este omogenă, formulele (3) devin

$$a = \frac{\int x\, dS}{S}, \qquad b = \frac{\int y\, dS}{S}, \qquad c = \frac{\int z\, dS}{S}\,.$$

c). *Linii materiale.* Densitatea liniei într'un punct P se defineşte prin limita raportului $\frac{\Delta M}{\Delta L}$, în care ΔL reprezintă elementul linear care conţine pe P şi ΔM massa elementului. Aşa dar $dM = \rho\, dL$ şi avem formulele

$$(4) \qquad a = \frac{\int \rho\, x\, dL}{\int \rho\, dL}, \qquad b = \frac{\int \rho\, y\, dL}{\int \rho\, dL}, \qquad c = \frac{\int \rho\, z\, dL}{\int \rho\, dL}\,.$$

Dacă raportăm linia la un sistem de 3 axe dreptunghiulare, cordonatele x, y, z sunt funcţiuni de un parametru α şi avem

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2}\,.\,d\alpha\,.$$

Inlocuind pe dL prin această expresiune în formulele (4) determinarea cordonatelor a, b, c se reduce la efectuări de cuadraturi.

Când linia este omogenă, avem

$$a = \frac{\int x\, dL}{L}, \qquad b = \frac{\int y\, dL}{L}, \qquad c = \frac{\int z\, dL}{L}$$

L fiind lungimea respectivă a liniei.

4. Teoreme care uşurează găsirea centrului de greutate. Fie un sistem de n puncte materiale de aceiaşi massă m. Expresiunile (1) ale cordonatelor centrului de greutate, devin în asemenea caz, prin reducerea factorului m,

$$(5) \qquad a = \frac{\Sigma x}{n}, \qquad b = \frac{\Sigma y}{n}, \qquad c = \frac{\Sigma z}{n}.$$

Centrul de greutate se confundă deci cu centrul distanțelor medii. Avem astfel următoarele 3 teoreme care se aplică şi sistemelor continue în care densitatea este aceiaşi în toate punctele:

Teorema I. ***Când un sistem are un centru de simetrie, acest centru de simetrie este centrul de greutate al sistemului.***

Luând, în adevăr, acest centru de simetrie ca origină a unui sistem de axe, la ori ce punct x, y, z corespunde un punct de cordonate $-x$, $-y$, $-z$; deci sumele Σ din expresiunile (5) sunt toate nule şi centrul de greutate se confundă cu origina.

Teorema II. ***Când un sistem are un plan de simetrie, centrul de greutate este în acest plan.***

Dacă luăm, în adevăr, planul de simetrie drept plan xOy, la orice punct x, y, z corespunde un punct de cordonate x, y, $-z$ aşa că $c = o$.

Teorema III. ***Când un sistem are un ax de simetrie, centrul de greutate este pe acel ax.***

Dacă luăm, în adevăr, axul de simetrie drept ax Oz, la orice punct x, y, z corespunde un punct de cordonate $-x$, $-y$, z deci $a = o$, $b = o$.

Exemplu. *Centrul de greutate al unei jumătăți de sferă, presupusă omogenă.*

Acest centru se găsește pe axul Oz. Insemnând prin c cota sa, avem

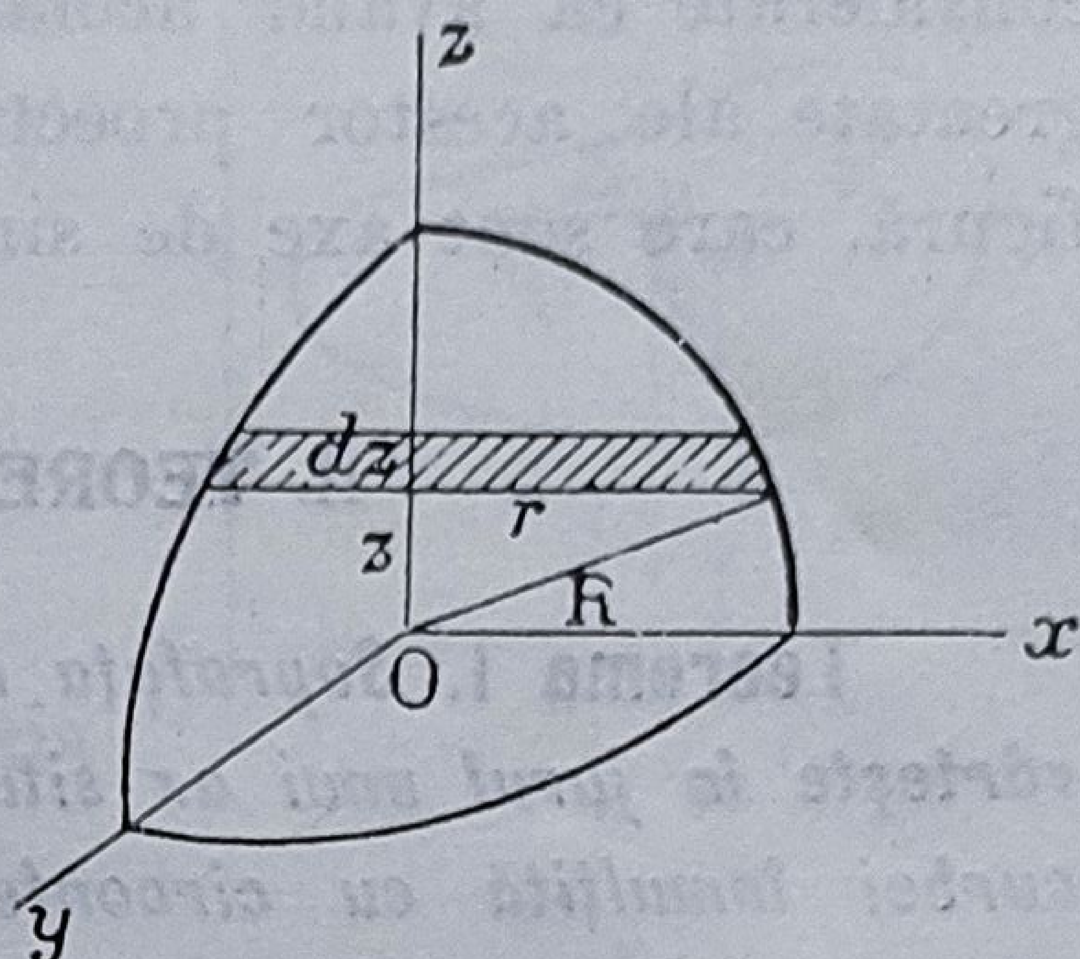


Fig. 94

$$c = \frac{\int z\, dV}{V}.$$

Ori, după cum se vede pe figură,

$$r^2 + z^2 = R^2$$

$$dV^{1)} = \pi r^2 dz = \pi (R^2 - z^2)\, dz$$

deci

$$\int z\, dV = \pi \int_o^R z\,(R^2 - z^2)\, dz = \pi \left[R^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_o^R = \pi \frac{R^4}{4}$$

și, cum V ca jumătate de volum de sferă este egal cu $\frac{2}{3}\pi R^3$, obținem prin diviziune,

$$c = \frac{3}{8} R.$$

Notă. Cele trei teoreme precedente sunt adevărate și în cazul când sistemul material nu este omogen însă prezintă particularitatea că *punctele sale care se corespund în mod simetric au aceiași massă*. Astfel, în cazul teoremei I, dacă la un punct de massă m corespunde în mod simetric un punct tot de massă m, sumele $\Sigma m x$, $\Sigma m y$, $\Sigma m z$ sunt toate nule și prin urmare

$$a = \frac{\Sigma m x}{M} = o, \qquad b = \frac{\Sigma m y}{M} = o, \qquad c = \frac{\Sigma m z}{M} = o$$

și tot asemenea pentru celelalte două teoreme.

Un exemplu de astfel de sisteme materiale îl prezintă proectilele de artilerie încărcate cu explosiv. Ele nu sunt cor-

---

[1]) Luăm ca element de volum dV volumul cilindrului de rază r și de înălțime dz.

puri omogene, însă, în mod destul de sensibil, punctele care se corespund simetric faţă de axul de figură al proectilului pot fi considerate ca având aceiaşi massă. In consecinţă, centrele de greutate ale acestor proectile se află situate pe axele lor de figură, care sunt axe de simetrie.

II. TEOREMELE LUI GULDIN.

Teorema I. ***Suprafaţa născută de o curbă plană care se învârteşte în jurul unui ax situat în planul ei, esta egală cu lungimea curbei înmulţită cu circonferinţa pe care o descrie centrul de greutate al curbei, presupusă omogenă.***

Să raportăm, în adevăr, curba plană la axul de rotaţie luat drept ax Ox şi la o perpendiculară Oy. Un element dL al curbei, având ca ordonată y, naşte prin învârtire un element de suprafaţă care putând fi asimilat suprafeţii unui trunchiu de con are ca expresie

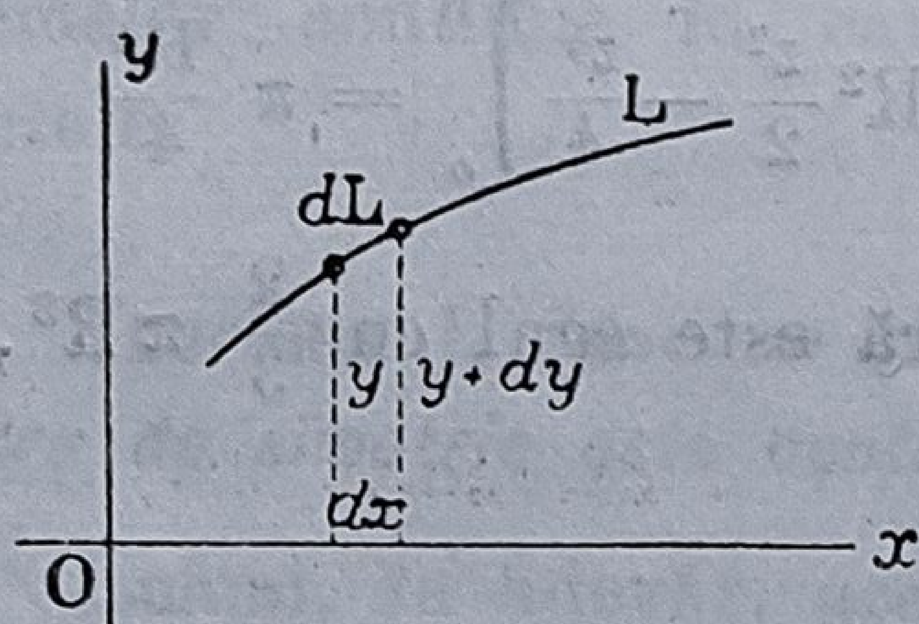


Fig. 95

$$\pi\, dL \left[\, y + (\, y + dy\,)\,\right]$$

adică în valoare principală $2\pi y\, dL$, aşa că suprafaţa totală născută de curbă va fi

$$A = 2\pi \int y\, dL\,.$$

Insă, dacă b este ordonata centrului de greutate al curbei, ştim că avem

$$b\,L = \int y\, dL$$

deci

$$A = L \times 2\pi b\,.$$

Teorema II. ***Volumul născut de o arie plană care se învârteşte în jurul unui ax situat în planul ei, este egal cu suprafaţa ariei înmulţită cu circonferinţa descrisă de centrul de greutate al ariei, presupusă omogenă.***

In adevăr, un element dx, dy al ariei S naşte prin rotaţia sa în jurul axului Ox un element de volum care, fiind diferenţa volumelor celor 2 cilindri născuţi de ariile $A'B'CD$ şi ABCD, are ca expresie

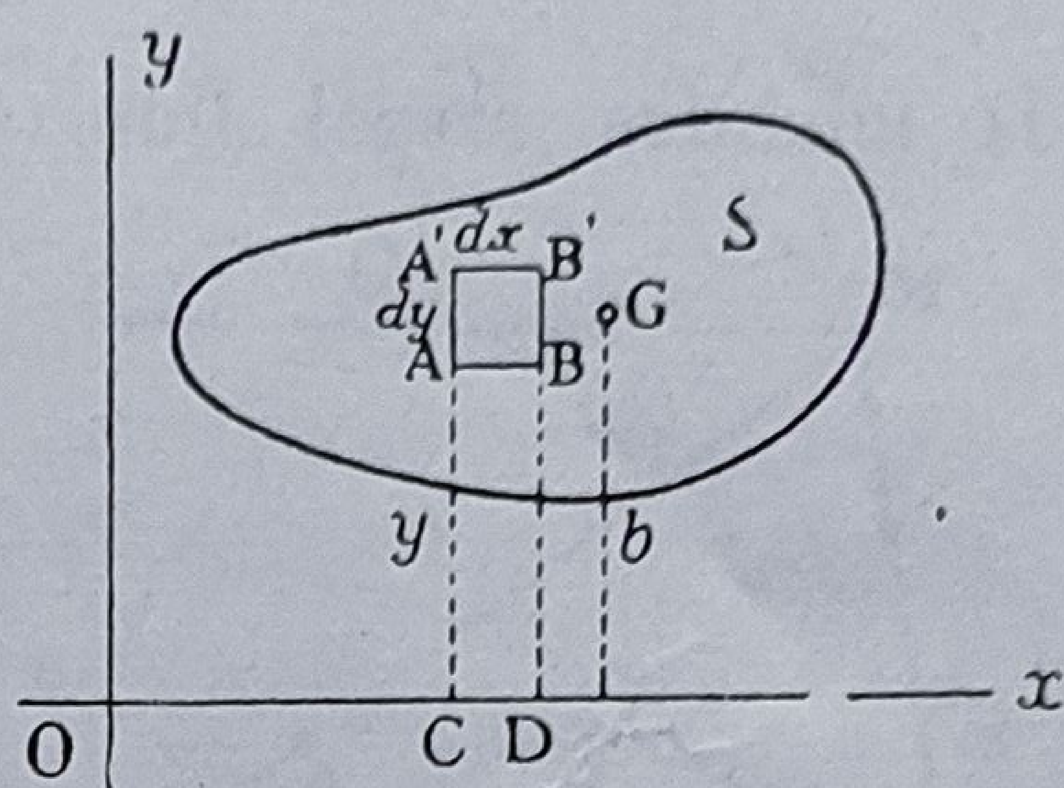


Fig. 96

$$\pi (y + dy)^2 dx - \pi y^2 dx$$

adică, în valoare principală,

$$2 \pi y \, dx \, dy$$

aşa încât volumul V născut de aria S este

$$V = 2 \pi \iint y \, dx \, dy .$$

Insă, după cum s'a văzut mai înainte, avem

$$bS = \int y \, dS = \iint y \, dx \, dy$$

deci

$$V = S \times 2 \pi b .$$

Aplicaţii. 1. *Centrul de greutate al unei semicirconferinţe.* Insemnând prin b ordonata sa, avem, potrivit teoremei I a lui Guldin,

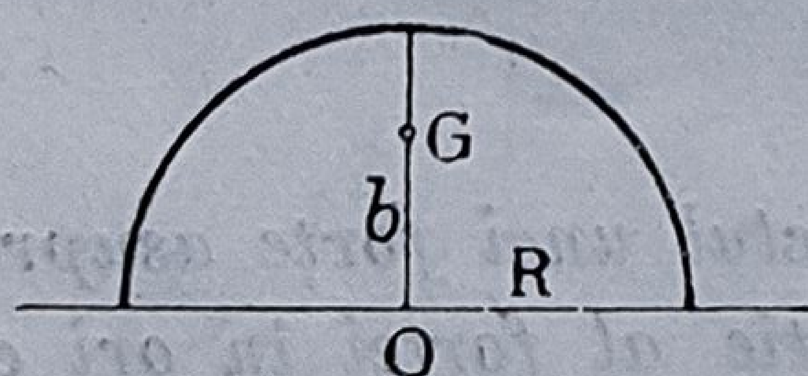


Fig. 97

$$4 \pi R^2 = \pi R . 2 \pi b$$

deci

$$b = \frac{2}{\pi} R .$$

2. *Centrul de greutate al suprafeţii unei jumătăţi de cerc.* Teorema II a lui Guldin ne dă

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \, 2 \pi b$$

deci

$$b = \frac{4 R}{3 \pi} .$$

II. ECHILIBRUL UNUI SOLID INVARIABIL.

I. REDUCEREA FORŢELOR APLICATE UNUI SOLID INVARIABIL.

1. **Principiu.** *Pentru ca două forţe aplicate unui solid să-şi facă echilibru, este necesar şi suficient ca ele să fie egale şi direct opuse.*

Din acest principiu considerat ca o axiomă, rezultă propoziţiunea următoare:

Corolariu. Putem fără a schimba efectul unei forţe asupra unui solid, să mutăm punctul de aplicaţie al forţei în ori ce punct de pe direcţia sa.

Fie F o forţă aplicată în punctul A. Să luăm un punct oarecare B pe direcţia forţei F şi să aplicăm în acest punct, considerat ca invariabil legat solidului, două forţe, una F' echipolentă cu F şi alta F'' egală şi direct opusă lui F. Prin aceasta n'am modificat starea solidului, căci forţele F' şi F'' îşi fac echilibru. Cum însă, pe de altă parte, forţele F şi F'' îşi fac şi ele echilibru, fiind egale şi direct opuse, ele pot fi suprimate şi rămâne atunci forţa F' aplicată în B. Această forţă poate deci înlocui forţa F aplicată în A.

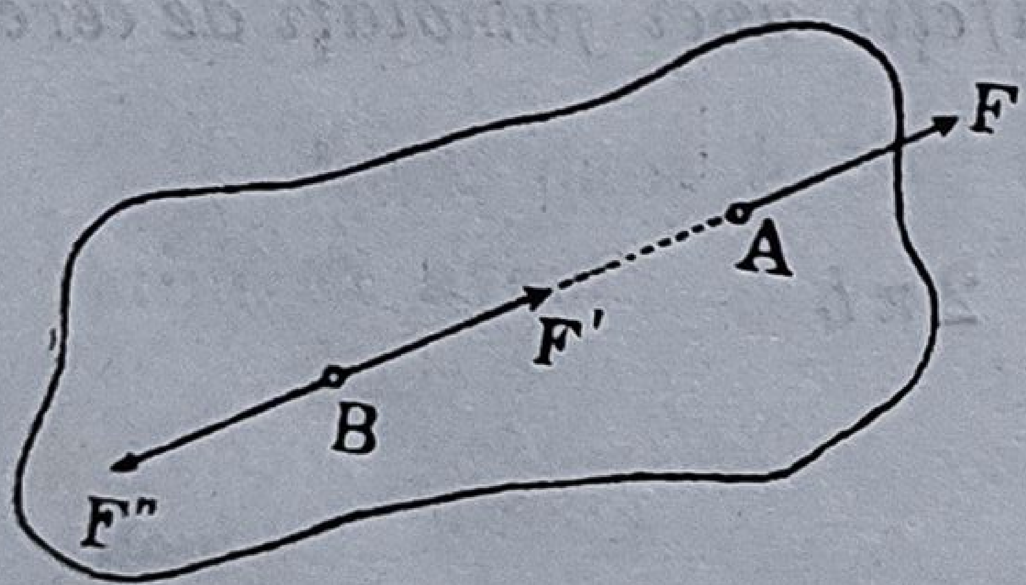


Fig. 98

2. **Teorema I.** *Un sistem oarecare de forțe aplicate unui solid, poate fi înlocuit prin două forțe, dintre care una, aplicată într'un punct arbitrar.*

Fie A, B, C trei puncte invariabil legate solidului și M un punct în care lucrează o forță F. Putem uni punctul M cu punctele A, B, C și descompune forța F în 3 componente îndreptate pe direcțiile MA, MB, MC, pe care le vom transporta pe direcțiile lor în A, B, C. Executând această operație pentru fiecare din forțele sistemului, obținem 3 grupuri de forțe, aplicate în A, B, C. Fiecare grup dă o rezultantă așa că prin procedeul urmat am redus întregul sistem la 3 forțe P, Q, R aplicate respectiv în punctele A, B, C arbitrar alese.

Fig. 99

Să considerăm acum cele două planuri determinate de punctul A și cele două forțe Q și R. Pe linia lor de intersecție AX să luăm un punct arbitrar D și să unim punctele B, C cu A și D. Descompunând forța Q în Q' și Q'' pe direcțiile DB și BA și forța R în R' și R'' pe direcțiile DC și CA, să mutăm forțele Q' și R' pe direcțiile lor în D și forțele Q'' și R'' pe direcțiile lor în punctul A. Vom obține astfel, în cele din urmă două forțe S și T aplicate în punctele A și D.

Fig. 100

Să observăm că punctul A este arbitrar și că poziția dreptei AX depinde de alegerea punctelor B și C. Variind poziția acestor două puncte variem și poziția dreptei AX și, pe fiecare dreaptă AX, putem lua punctul D în mod arbitrar. Așa

dar există o infinitate de moduri de a reduce sistemul de forţe la 2 forţe dintre care una aplicată în A, însă la o poziţie determinată a punctului D pe dreapta AX răspund două forţe bine determinate S şi T aplicate în A şi D.

3. **Teorema II.** ***Momentul unui sistem de forţe aplicate unui solid, în raport de ori şi ce punct al spaţiului, este egal cu momentul celor 2 forţe la care se poate reduce sistemul.***

In adevăr, putem fără a modifica momentul unui sistem de forţe, să transportăm punctul de aplicaţie al unei forţe pe direcţia sa, să înlocuim mai multe forţe concurente prin rezultanta lor şi să descompunem o forţă în mai multe altele aplicate în acelaşi punct. Cum pentru găsirea forţelor S şi T noi n'am întrebuinţat decât aceste moduri de transformări, rezultă că momentul sistemului de forţe nu se găseşte modificat când înlocuim forţele F_1, F_2, $F_3 \ldots$ care lucrează asupra solidului prin cele două forţe S şi T.

II. ECHILIBRUL UNUI SOLID INVARIABIL LIBER.

1. **Lemă.** ***Pentru ca două vectoare să fie egale şi direct opuse, este necesar şi suficient ca momentul lor să fie nul în raport de ori şi ce punct al spaţiului.***

Necesar. Fie în adevăr O un punct din spaţiu. Dacă două vectoare $A_1 B_1$ şi $A_2 B_2$ sunt egale şi direct opuse, planurile $OA_1 B_1$ şi $OA_2 B_2$ coincid, aşa că perpendiculara ridicată în punctul O pe unul din planuri este perpendiculară şi pe celălalt plan. Cum pe de altă parte distanţa lui O la ambele vectoare este aceiaşi, momentele vectoarelor în raport de O sunt egale şi direct opuse, aşa că momentul lor rezultant este nul.

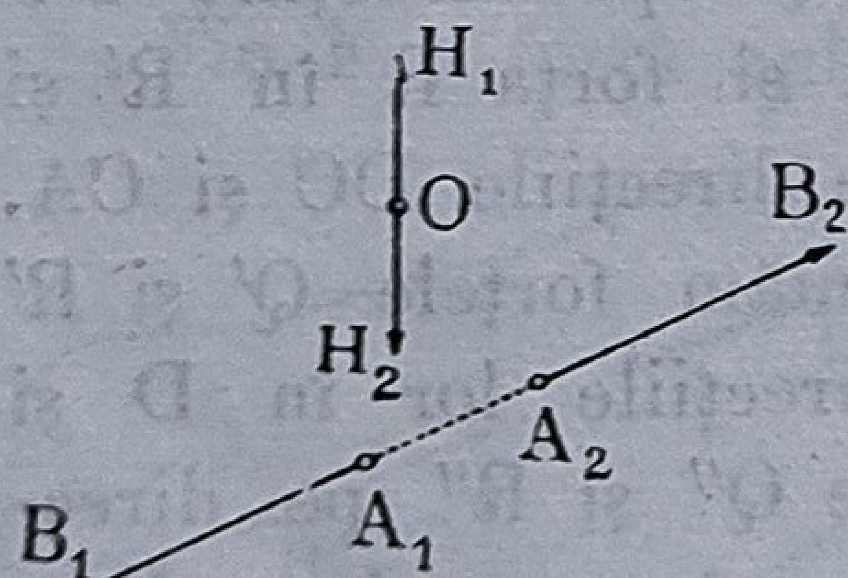


Fig. 101

Suficient. In adevăr, dacă momentul rezultant a două vectoare $A_1 B_1$ şi $A_2 B_2$ în raport de un punct O este nul, momentele OH_1 şi OH_2 ale vectoarelor sunt egale şi direct opuse, deci ele sunt purtate pe aceiaşi dreaptă şi în consecinţă pla-

nurile OA_1B_1 și OA_2B_2 coincid unul cu altul. Dar, pentru ca aceste planuri să coincidă *ori care ar fi punctul* O, trebue ca vectoarele să fie în linie dreaptă. Insfârșit momentele OH_1 și OH_2 fiind egale și de semne contrarii trebue ca vectoarele A_1B_1 și A_2B_2 să fie egale și direct opuse.

2. **Teoremă.** ***Pentru ca un solid să fie în echilibru, este necesar și suficient ca momentul sistemului de forțe ce-i sunt aplicate, să fie nul în raport de ori și ce punct al spațiului.***

In adevăr, pentru ca solidul să fie în echilibru este necesar și suficient ca cele două forțe S și T, care pot înlocui sistemul de forțe aplicate, să fie egale și direct opuse. Ori, pentru aceasta este necesar și suficient ca momentul acestor forțe în raport de ori și ce punct al spațiului să fie nul. Insă acest moment este identic cu acela al sistemului de forțe aplicate, deci momentul sistemului de forțe aplicate trebue să fie nul în raport de ori și ce punct al spațiului.

3. **Ecuațiile care exprimă echilibrul unui solid.** In raport cu un sistem de trei axe cordonate dreptunghiulare, fie x, y, z cordonatele punctului de aplicație al uneia dintre forțe și X, Y, Z proecțiile forței.

Momentul sistemului de forțe, în raport de un punct x', y', z' din spațiu, are ca proecții pe axe[1]).

$$(1)\quad L' = L - (y'R - z'Q), \qquad M' = M - (z'P - x'R),$$
$$N' = N - (x'Q - y'P)$$

în care

$$L = \Sigma(yZ - zY), \qquad M = \Sigma(zX - xZ), \qquad N = \Sigma(xY - yX)$$
$$P = \Sigma X, \qquad Q = \Sigma Y, \qquad R = \Sigma Z.$$

Cum pentru echilibru trebue ca L', M', N' să fie nuli, oricare ar fi x', y', z', formulele (1) arată că condițiile necesare și suficiente echilibrului sunt

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0; \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

---

[1]) *Cinematica*, pag. 27.

adică, trebue să avem următoarele 6 identităţi:

$$(2) \begin{cases} \Sigma X = o, & \Sigma Y = o, & \Sigma Z = o; \\ \Sigma(yZ - zY) = o, & \Sigma(zX - xZ) = o, & \Sigma(xY - yX) = o. \end{cases}$$

Primele trei ecuaţii exprimă că vectorul rezultant al forţelor este nul, iar celelalte trei, că momentul sistemului de forţe în raport cu origina aleasă este nul, această origină fiind de altfel un punct arbitrar.

4. **Aplicaţiuni.** a). *Echilibrul forţelor dintr'un acelaşi plan.* Când forţele care lucrează asupra unui solid sunt toate situate într'un acelaşi plan, putem lua acest plan drept plan xOy şi atunci pentru ori ce forţă avem $z = o$, $Z = o$ şi cele 6 ecuaţii de echilibru se reduc în consecinţă la următoarele trei:

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o \quad ; \quad \Sigma(xY - yX) = o.$$

Primele două exprimă că vectorul rezultant al forţelor este nul, iar cea de a treia, că momentul forţelor în raport de un punct al planului este nul.

b). *Echilibrul forţelor concurente.* Putem lua ca punct comun de aplicaţie al forţelor, punctul lor de întâlnire. Fie x, y, z cordonatele sale. Cele trei din urmă ecuaţii ale sistemului (2) se pot scrie atunci

$$y\Sigma Z = z\Sigma Y, \qquad z\Sigma X = x\Sigma Z, \qquad x\Sigma Y = y\Sigma X$$

şi vedem că aceste egalităţi se găsesc satisfăcute dacă avem

$$\Sigma X = o, \qquad \Sigma Y = o, \qquad \Sigma Z = o.$$

Aşa dar condiţiile de echilibru se reduc numai la aceste 3 ultime ecuaţii, care exprimă că vectorul rezultant al sistemului de forţe este nul. Puteam raţiona şi astfel: Momentul sistemului de forţe fiind egal cu momentul rezultantei, trebue ca acesta să fie nul în raport de ori şi ce punct al spaţiului, ceea ce nu poate avea loc decât dacă rezultanta este nulă, deci $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$. — Obţinem deci aceleaşi condiţii ca în cazul echilibrului unui punct material, după cum este şi logic să fie.

c). *Echilibrul unui sistem de forţe paralele.* Fie F una dintre forţe şi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ cosinusurile sale directoare. Avem, pentru proecţiile pe cele trei axe:

$$X = F\cos\alpha, \quad Y = F\cos\beta, \quad Z = F\cos\gamma.$$

Pentru forţele care lucrează în sens contrariu, ar trebui să schimbăm semnele cosinusurilor. In loc de aceasta, să dăm acelor forţe semnul minus şi să păstrăm pe α, β, γ neschimbaţi. Cu asemenea convenţie, cele 6 ecuaţii de echilibru devin

$$\cos\alpha\,\Sigma F = o, \quad \cos\beta\,\Sigma F = o, \quad \cos\gamma\,\Sigma F = o;$$

$$\cos\gamma\,\Sigma F y - \cos\beta\,\Sigma F z = o, \qquad \cos\alpha\,\Sigma F z - \cos\gamma\,\Sigma F x = o,$$

$$\cos\beta\,\Sigma F x - \cos\alpha\,\Sigma F y = o.$$

Cele dintâi trei se reduc la $\Sigma F = o$ care exprimă că vectorul rezultant al sistemului este nul. Celelalte trei se reduc la următoarele două:

$$\frac{\Sigma F x}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma F y}{\cos\beta} = \frac{\Sigma F z}{\cos\gamma}.$$

Acest rezultat ne este cunoscut de la teoria momentelor, când am căutat condiţia ca un sistem de vectoare paralele să aibe în raport de un punct O momentul nul, în ipoteza $\Sigma F = o$.

Să presupunem că forţele sunt toate paralele cu axul Oz. In acest caz, cele 6 ecuaţii de echilibru se reduc la

$$\Sigma F = o, \quad \Sigma F x = o, \quad \Sigma F y = o$$

căci $\cos\alpha = o$, $\cos\beta = o$ iar $\cos\gamma = 1$.

Dacă însfârşit forţele sunt toate coprinse în planul xOy şi sunt paralele cu Oy, avem

$$\Sigma F = o, \quad \Sigma F x = o$$

de oarece $\cos\alpha = o$ iar $\cos\beta = 1$.

5. **Notă.** Să notăm în treacăt, că ori-ce alte condiţii de echilibru nu pot fi decât consecinţe ale ecuaţiilor generale de mai sus.

Astfel, dacă este adevărat că *în cazul când momentele unui sistem de forţe coprinse într'un plan, în raport de 3*

puncte ale planului ne situate în linie dreaptă, sunt nule, sistemul este în echilibru, aceasta rezultă imediat din ecuaţiile dela N^0 precedent, în felul următor:

Fie O, O', O'' cele trei puncte date, dintre care pe O să-l luăm ca origina axelor cordonate. Momentele în raport de aceste 3 puncte fiind nule avem

$$(1) \quad \begin{aligned} N &= \Sigma(xY - yX) = 0 \\ N' &= N - (x'Q - y'P) = 0 \\ N'' &= N - (x''Q - y''P) = 0 \end{aligned}$$

adică

$$\Sigma(xY - yX) = 0$$

$$x'Q - y'P = 0, \qquad x''Q - y''P = 0.$$

Ori, dacă dreapta $O'O''$ nu trece prin origina O, atunci nu avem proporţia $\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''}$ şi, ca urmare, cele două din urmă ecuaţii nu pot avea loc decât dacă

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Sistemul de ecuaţii (1) revine deci la cele 3 ecuaţii generale de echilibru dela pagina 160:

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

III. SISTEME DE FORŢE ECHIVALENTE.

1. **Definiţie.** Două sisteme de forţe care lucrează asupra unui solid sunt zise echivalente, dacă le putem înlocui, unul prin celălalt, fără a schimba starea solidului.

2. **Teorema I.** *Dacă două sisteme de forţe* S_1 *şi* S_2 *sunt echilibrate fiecare în parte de un al* 3 lea *sistem* S_3, *ele sunt echivalente.*

In adevăr, sistemului S_1 putem să-i adăogăm cele două sisteme S_2 şi S_3 care îşi fac echilibru. Insă în sistemul (S_1, S_2, S_3) putem să suprimăm sistemele S_1 şi S_3 care îşi fac echilibru. Rămâne atunci sistemul S_2, care este deci echivalent lui S_1.

3. **Teorema II.** ***Pentru ca două sisteme de forţe să fie echivalente, este necesar şi suficient ca ele să aibe acelaşi moment în raport de ori şi ce punct al spaţiului.***

In adevăr, pentru ca solidul să fie în echilibru sub acţiunea sistemului de forţe (S_1, S_3) este necesar şi suficient ca momentul acestui sistem să fie nul în raport de ori şi ce punct al spaţiului, şi aceasta pretinde ca momentul lui S_1 să fie totdeauna egal şi direct opus momentului lui S_3.

Ori, aceiaşi condiţie trebue îndeplinită pentru ca solidul să fie în echilibru sub acţiunea sistemului de forţe (S_2, S_3). Rezultă atunci imediat că momentul sistemului S_1 trebue să fie totdeauna egal în mărime, direcţie şi sens cu momentul sistemului S_2.

4. **Ecuaţii care exprimă echivalenţa a două sisteme de forţe.**

Fie L'_1, M'_1, N'_1, şi L'_2, M'_2, N'_2 proecţiile momentelor a două sisteme echivalente de forţe S_1 şi S_2 în raport cu un punct de cordonate x', y', z'.

Potrivit teoremei precedente trebue să avem, ori care ar fi x', y', z' următoarele trei egalităţi:

$$L'_1 = L'_2, \qquad M'_1 = M'_2, \qquad N'_1 = N'_2$$

adică, explicitând,

$$L_1 - (y' R_1 - z' Q_1) = L_2 - (y' R_2 - z' Q_2)$$
$$M_1 - (z' P_1 - x' R_1) = M_2 - (z' P_2 - x' R_2)$$
$$N_1 - (x' Q_1 - y' P_1) = N_2 - (x' Q_2 - y' P_2).$$

Ori, aceste 3 egalităţi nu pot avea loc ori care ar fi x', y', z' decât dacă

$$P_1 = P_2, \qquad Q_1 = Q_2, \qquad R_1 = R_2;$$
$$L_1 = L_2, \qquad M_1 = M_2, \qquad N_1 = N_2.$$

Aceste condiţii exprimă că ambele sisteme de forţe au acelaşi vector rezultant şi acelaşi moment în raport de un punct.

5. **Condiţie pentru ca un sistem de forţe să se reducă la o forţă unică.**

Un sistem de forţe aplicat unui solid este în general reductibil la două forţe, şi numai în mod excepţional el poate

fi redus la o forţă unică. Să căutăm condiţia acestei din urmă reducţii. Fie: P, Q, R componentele vectorului rezultant al sistemului de forţe şi L, M, N componentele momentului sistemului de forţe în raport de un punct pe care-l luăm ca origină a axelor cordonate.

Pentru ca o forţă X_0, Y_0, Z_0 aplicată într'un punct x_0, y_0, z_0 să fie echivalentă sistemului, este necesar şi suficient să avem

$$X_0 = P, \qquad Y_0 = Q, \qquad Z_0 = R;$$

$$y_0 Z_0 - z_0 Y_0 = L, \qquad z_0 X_0 - x_0 Z_0 = M, \qquad x_0 Y_0 - y_0 X_0 = N.$$

Cele dintâi 3 ecuaţii determină pe X_0, Y_0, Z_0; celelalte 3 se scriu, înlocuind pe X_0, Y_0, Z_0 prin P, Q, R:

$$\begin{aligned} & y_0 R - z_0 Q = L \\ (1) \qquad & z_0 P - x_0 R = M \\ & x_0 Q - y_0 P = N. \end{aligned}$$

Aceste 3 ecuaţii în x_0, y_0, z_0 nu sunt însă independente, determinantul lor fiind nul. De altfel, dacă înmulţim respectiv ecuaţiile cu P, Q, R şi le adunăm, obţinem ecuaţia

$$(2) \qquad PL + QM + NR = o$$

care neconţinând necunoscutele, reprezintă condiţia de compatibilitate adică condiţia[1]) pentru ca să poată exista valori x_0, y_0, z_0 care să verifice sistemul celor trei ecuaţii. Dacă această condiţie este satisfăcută, sistemul (1) se reduce numai la 2 ecuaţii care reprezintă o dreaptă Δ. Ori ce punct de pe această dreaptă poate fi luat drept punct x_0, y_0, z_0 de aplicaţie, pentru forţa X_0, Y_0, Z_0. De altfel dreapta Δ este paralelă cu vectorul rezultant al sistemului, şi deci cu forţa X_0, Y_0, Z_0, căci paralela lui Δ dusă prin origină, are ca ecuaţii, potrivit sistemului (1):

$$\frac{x_0}{P} = \frac{y_0}{Q} = \frac{z_0}{R}.$$

---

[1]) **Ea exprimă că determinantul caracteristic al sistemului (1) este nul.**

Insfârşit, condiţia (2) exprimând că vectoarele P, Q, R şi L, M, N sunt perpendiculare unul pe altul dă loc la următoarea propoziţiune:

Pentru ca forţele aplicate unui solid să se reducă la o forţă unică, este necesar şi suficient ca vectorul rezultant al sistemului de forţe şi momentul acestui sistem în raport de un punct să fie perpendiculari unul pe altul.

Reamintim că suma $PL + MQ + NR$ este un invariant[1]), aşa că dacă această sumă este nulă pentru punctul ales ca origină, ea este nulă pentru ori ce alt punct al spaţiului.

Forţa unică la care se reduce sistemul de forţe ia numele de *rezultantă*. Pentru ca ea să existe, trebue bineînţeles, în primul rând, ca vectorul rezultant al sistemului să nu fie nul, şi deci P, Q, R să nu fie toţi nuli. In această presupunere, vom observa că, în particular, dacă în raport de origina aleasă O avem

$$L = o, \qquad M = o, \qquad N = o$$

condiţia (2) fiind atunci satisfăcută, sistemul de forţe se reduce la o forţă unică, aplicată potrivit ecuaţiilor (1) într'un punct oarecare al dreptei

$$\frac{x_0}{P} = \frac{y_0}{Q} = \frac{z_0}{R}$$

care trece prin origina O şi are aceiaşi direcţie ca vectorul rezultant al forţelor.

a). *Cazul forţelor coprinse în acelaşi plan.* Luând planul forţelor drept plan xOy, sistemul celor 3 ecuaţii (1) se reduce la singura ecuaţie

$$x_0 Q - y_0 P = N$$

care determină dreapta de suport a rezultantei sistemului.

Aşa dar, în caz că P şi Q nu sunt amândoi nuli, sistemul se poate totdeauna reduce la o forţă unică, fără vre-o altă condiţie de îndeplinit. De altfel, în cazul forţelor conţinute într'un plan, momentul oricărei forţe este perpendicular pe direcţia forţei.

---

[1]) *Cinematica*, pag. 28.

b). *Cazul forţelor paralele.* Ştim de la teoria momentelor că dacă vectorul rezultant al unui sistem de vectoare paralele nu este nul, adică dacă nu avem $\Sigma F = o$, atunci există un punct de cordonate

$$a = \frac{\Sigma F x}{\Sigma F}, \qquad b = \frac{\Sigma F y}{\Sigma F}, \qquad c = \frac{\Sigma F z}{\Sigma F}$$

prin care ducând o dreaptă Δ paralelă direcţiei comune a vectoarelor şi aplicând pe această dreaptă în sensul α, β, γ, ce s'a definit, un vector egal cu ΣF, momentul acestui vector este egal cu acela al sistemului în raport de ori şi ce punct al spaţiului. Am stabilit pe de altă parte că există totdeauna relaţia

$$PL + MQ + NR = o.$$

Asimilând forţele cu vectoare, vedem astfel că un sistem de forţe paralele se poate totdeauna reduce la o forţă unică, dacă vectorul rezultant al sistemului nu este nul. Punctul de cordonate a, b, c ia numele de *centrul forţelor paralele.* El este independent de unghiurile α, β, γ ale direcţiei forţelor.

Tot ca urmare a celor spuse la teoria momentelor, rezultanta R a unui sistem de 2 forţe paralele F_1 şi F_2 aplicate în punctele O_1 şi O_2, divide dreapta $O_1 O_2$ în părţi invers proporţionale cu cele două forţe, adică avem $F_1 f_1 = F_2 f_2$ sau, mai general,

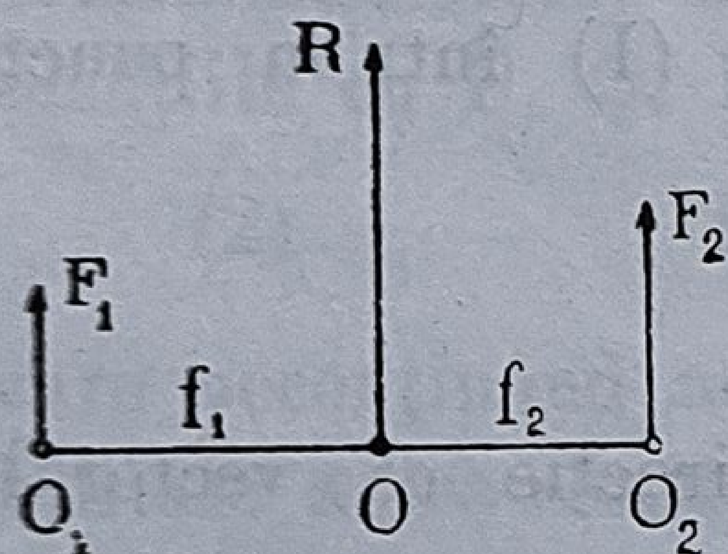


Fig. 102

$$\frac{F_1}{f_2} = \frac{F_2}{f_1} = \frac{R}{O_1 O_2}.$$

Dacă forţele au direcţii opuse, rezultanta lor este egală cu diferenţa $F_2 - F_1$ şi este aplicată într'un punct O de pe prelungirea dreptei $O_1 O_2$ dinspre forţa cea mai mare F_2, însă aşa fel că avem tot proporţiile

$$\frac{F_1}{f_2} = \frac{F_2}{f_1} = \frac{R}{O_1 O_2}$$

cu $R = F_2 - F_1$ şi $O_1 O_2 = f_1 - f_2$.

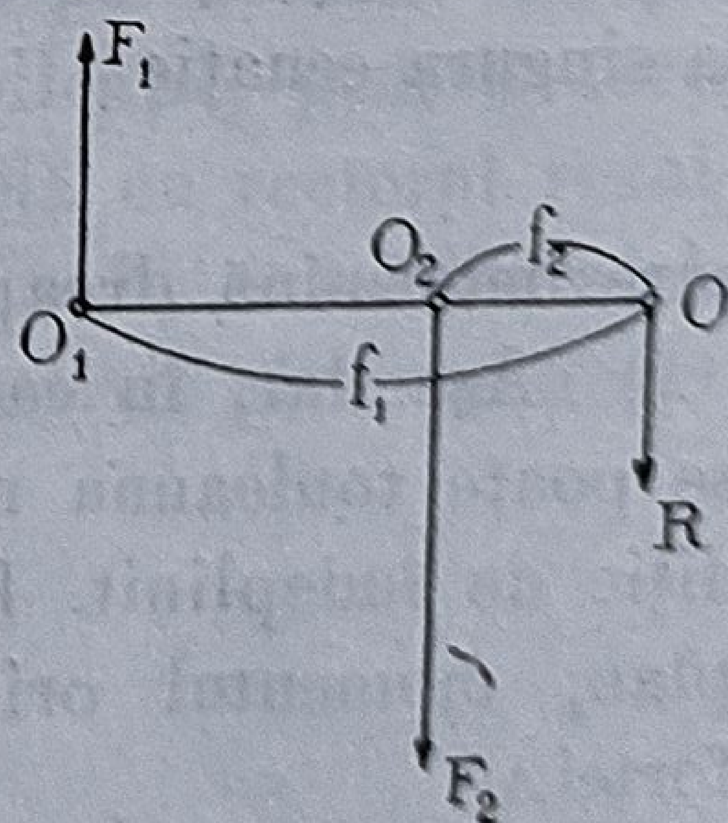


Fig. 103

Aplicaţie la greutate. Să considerăm, la suprafaţa pământului, un sistem inva-

riabil de puncte materiale, supuse la acţiunea greutăţii. Dacă dimensiunile sistemului sunt foarte mici faţă de acelea ale pământului, greutăţile tuturor punctelor sunt paralele, aşa că însemnând prin p una din ele, prin x, y, z cordonatele punctului material respectiv şi prin P greutatea întregului sistem, avem, potrivit celor de mai sus, pentru cordonatele centrului de forţe:

$$a = \frac{\Sigma px}{P}, \qquad b = \frac{\Sigma py}{P}, \qquad c = \frac{\Sigma pz}{P}.$$

Insă, dacă reprezentăm prin m massa punctului de greutate p şi prin M massa totală, vom putea înlocui pe p prin mg şi pe P prin Mg; suprimând atunci factorul comun g dela numărători şi numitori se obţine

$$a = \frac{\Sigma mx}{M}, \qquad b = \frac{\Sigma my}{M}, \qquad c = \frac{\Sigma mz}{M}.$$

Aşa dar, *centrul de forţe coincide cu centrul de greutate* al sistemului.

In mod mai general, vom zice, că *dacă fiecare punct al unui sistem invariabil este solicitat de o forţă proporţională cu massa punctului şi toate aceste forţe sunt paralele şi de acelaşi sens, atunci rezultanta lor trece prin centrul de greutate al sistemului.*

6. **Notă.** ***Când 3 forţe care lucrează asupra unui solid îşi fac echilibru, ele sunt coprinse în acelaşi plan şi una oarecare dintre ele este egală şi direct opusă rezultantei celorlalte două.***

Fie în adevăr P, Q, R aceste forţe. Pe direcţia forţei P să luăm *un punct arbitrar* O. Forţele făcându-şi echilibru, momentul total în raport de O trebue să fie nul. Cum momentul forţei P în raport de O este nul, rezultă că momentele în raport de acest punct ale forţelor Q şi R trebue să fie egale şi direct opuse, ceea ce pretinde ca forţele Q, R şi punctul O să fie coprinse în acelaşi plan. Acest plan conţine de altfel şi forţa P de oarece punctul O poate fi un punct absolut ori şi care de pe direcţia acestei forţe.

Pe de altă parte, una oarecare dintre forţe trebuind să facă echilibru celorlalte două, este evident egală şi direct opusă rezultantei acestora. — In mod mai general, când mai multe forţe îşi fac echilibru asupra unui solid, una oarecare dintre ele echilibrează pe toate celelalte, de unde rezultă că suprimând una dintre forţe, sistemul format de celelalte se reduce la o forţă unică.

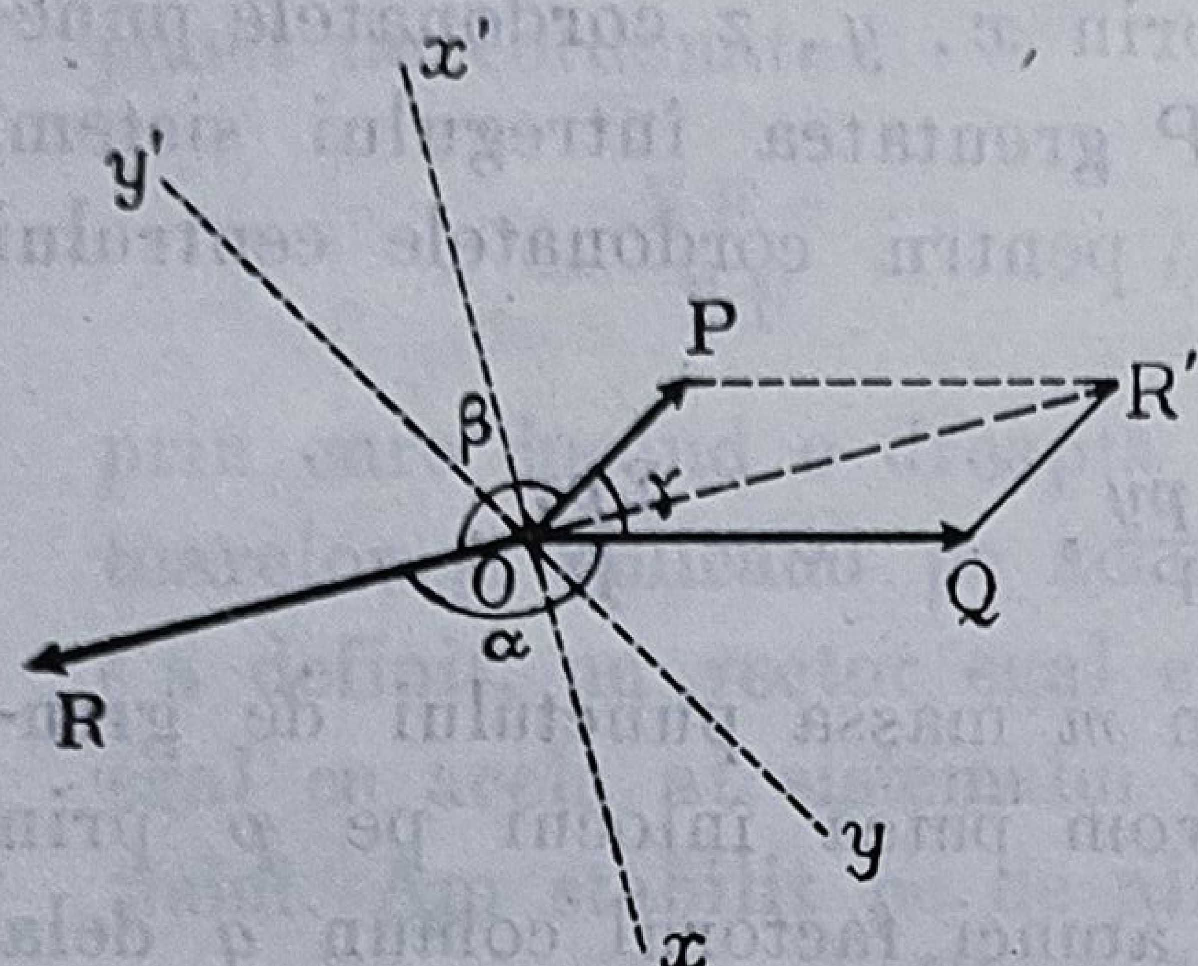


Fig. 104

Când 3 forţe îşi fac echilibru, ele sunt fie concurente, fie paralele. Când sunt concurente, avem următoarele proporţii între forţe şi sinusurile unghiurilor coprinse între ele:

$$(1) \qquad \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$

din care rezultă

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\cos\gamma\,.$$

Avem în adevăr, spre exemplu, în triunghiul OPR′, în care R′ = R,

$$\frac{P}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{Q}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{R}{\sin(\pi-\gamma)}$$

egalităţi din care rezultă proporţiile (1) căci $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, etc.

Obţinem tot proporţiile (1) dacă proectăm sistemul de forţe pe două direcţii respectiv perpendiculare pe două oarecare dintre direcţiile forţelor.

Astfel proecţia pe direcţia xx' perpendiculară pe OR, ne dă

$$P\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right) + Q\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = 0$$

adică

$$P\sin\beta = Q\sin\alpha$$

iar proecţia pe direcţia yy' perpendiculară pe OP, dă

$$R \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) + Q \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right) = o$$

adică

$$R \sin\beta = Q \sin\gamma\,.$$

Regăsim deci proporţiile (1).

In consecinţă, în cazul considerat, acest sistem de proporţii va putea oricând înlocui sistemul celor două ecuaţii generale de echilibru $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$. Este însă de observat că aceste ecuaţii ca şi cele două proporţii au loc şi în cazul când R formează cu rezultanta forţelor concurente P şi Q un cuplu. Pentru ca 3 forţe coprinse în acelaşi plan să-şi facă echilibru, mai este deci necesar ca momentul sistemului de forţe în raport de un punct al planului să fie nul, ca în cazul general al echilibrului forţelor coprinse în acelaşi plan.

IV. TEORIA CUPLURILOR.

1. **Definiţie.** Se numeşte cuplu, sistemul format de 2 forţe egale, paralele şi de sensuri contrarii.

Am stabilit la teoria momentelor, că momentul unui cuplu este acelaşi în raport de ori şi ce punct al spaţiului şi deci egal cu momentul în raport de A sau A′ care are ca valoare $F \,.\, d$, însemnând prin F intensitatea comună a forţelor şi prin d braţul de pârghie al cuplului. Ducând spre exemplu din A o perpendiculară pe planul cuplului, vectorul moment se poartă pe această perpendiculară şi aşa fel ca un observator culcat pe ea cu picioarele în A, să vadă direcţia forţei F′ dela stânga spre dreapta.

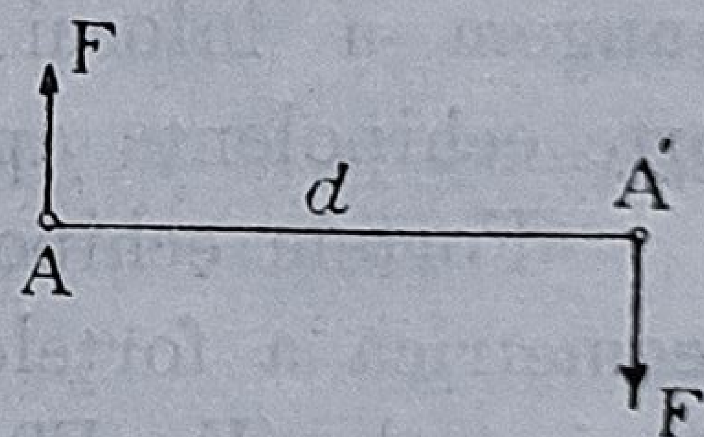


Fig. 105

2. **Teorema I.** ***Putem, fără a schimba efectul unui cuplu, să deplasăm planul cuplului paralel cu el însuşi şi să modificăm în acest plan forţa şi braţul de pârghie, aşa fel însă ca momentul cuplului să nu se schimbe.***

In adevăr, prin ori şi care din aceste modificări nu se alterează deloc momentul cuplului în raport de un punct oarecare al spaţiului. Toate cuplurile ce se obţin sunt deci echivalente.

3. **Teorema II.** *Un sistem de cupluri având ca momente* H_1, H_2, H_3, . . . *este echivalent unui cuplu unic având ca moment suma geometrică a momentelor* H_1, H_2, H_3, . . .

In adevăr, momentul sistemului de cupluri fiind egal cu suma geometrică a momentelor H_1, H_2, H_3, . . . este acelaşi în raport de ori şi ce punct al spaţiului ca momentul cuplului unic; deci există echivalenţă.

4. **Intrebuinţarea teoriei cuplurilor pentru reducerea forţelor aplicate unui solid.** Fie O un punct arbitrar, legat invariabil solidului, şi A punctul de aplicaţie al uneia din forţe F. Să aplicăm în punctul O, în sensuri opuse, două forţe F′, F″ egale şi paralele forţei F. Nu am schimbat prin aceasta starea solidului căci forţele F′ şi F″ îşi fac echilibru. Prin operaţia făcută, am înlocuit însă forţa F prin forţa echipolentă F″ şi cuplul (F, F′). Procedând la fel pentru toate celelalte forţe care lucrează asupra solidului, ajungem a înlocui sistemul de forţe dat printr'un sistem de forţe echipolente aplicate în O şi un sistem de cupluri.

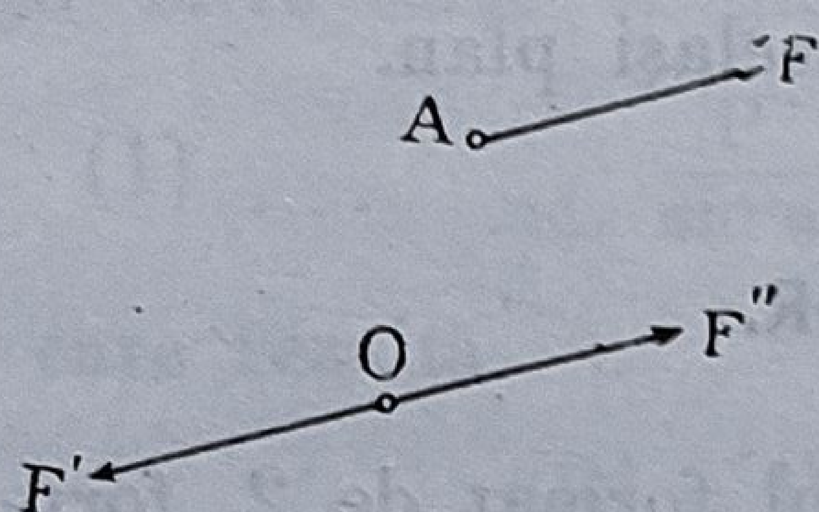


Fig. 106

Forţele echipolente din O dau o rezultantă egală cu suma geometrică a forţelor F. Pe de altă parte, cum momentul fiecărui cuplu (F, F′) în raport de O este egal cu momentul forţei respective F, momentul sistemului de cupluri este egal cu acela al sistemului de forţe aplicate solidului. De aci următoarea propoziţiune:

Un sistem de forţe aplicate unui solid este totdeauna reductibil la o forţă unică aplicată într'un punct arbitrar O, *egală cu suma geometrică a forţelor date, şi un cuplu unic al căruia moment este egal cu momentul sistemului de forţe în raport de* O.

Să ducem prin O trei axe cordonate dreptunghiulare şi să însemnăm prin X, Y, Z proecţiile uneia dintre forţe F şi prin x, y, z cordonatele punctului ei de aplicaţie.

Potrivit propoziţiunei enunţate, forţa unică aplicată în O va avea ca proecţii

$$P = \Sigma X, \qquad Q = \Sigma Y, \qquad R = \Sigma Z$$

iar momentul cuplului unic va avea ca proecţii pe aceleaşi axe

$$L = \Sigma (yZ - zY), \quad M = \Sigma (zX - xZ), \quad N = \Sigma (xY - yX).$$

Pentru echilibrul solidului este necesar şi suficient ca atât forţa unică cât şi cuplul unic să fie nuli. Exprimând acest lucru, regăsim cele 6 condiţii de echilibru cunoscute

$$P = o, \qquad Q = o, \qquad R = o;$$
$$L = o, \qquad M = o, \qquad N = o.$$

5. **Notă**. a). Din cele de mai sus rezultă că dacă numai suma geometrică a forţelor aplicate unui solid este nulă, adică dacă avem numai

$$P = o, \qquad Q = o, \qquad R = o$$

sistemul de forţe se reduce la un cuplu.

Dacă din potrivă, avem numai

$$L = o, \qquad M = o, \qquad N = o$$

adică dacă momentul sistemului de forţe în raport de un punct O este nul, *sistemul de forţe se reduce la o singură forţă aplicată în* O, egală cu suma lor geometrică, aşa după cum am mai spus la pagina 165.

b). Un cuplu nu poate fi echivalent decât tot unui cuplu, căci o forţă unică nu poate avea niciodată acelaşi moment în raport de ori şi ce punct al spaţiului ca un cuplu.

Ca urmare imediată, un cuplu nu poate fi distrus decât tot printr'un cuplu.

V. ECHILIBRUL UNUI SOLID CARE NU ESTE LIBER.

1. **Determinarea condiţiilor de echilibru.** Fie un solid ale cărui mişcări să fie limitate de obstacole, cum spre exemplu un

solid care având 2 puncte fixe nu poate lua altă mişcare decât o rotaţie în jurul dreptei care uneşte cele două puncte.

In asemenea cazuri, condiţiile de echilibru se obţin exprimând că forţele, în general necunoscute, prin care se pot înlocui acţiunile obstacolelor asupra solidului şi forţele direct aplicate solidului, formează împreună un sistem de forţe în echilibru, cele două categorii de forţe făcându-şi de altfel reciproc echilibru.

Vom putea deci aplica sistemului total de forţe cele 6 ecuaţii de echilibru. Eliminând între ecuaţii componentele forţelor necunoscute, ne vor rămâne un oarecare număr de ecuaţii independente de aceste forţe care vor reprezenta condiţiile de echilibru căutate. Presupunând aceste condiţii îndeplinite, vom deduce componentele forţelor necunoscute din ecuaţiile în care figurează ele.

2. **Echilibrul unui solid care are un punct fix.** Să luăm punctul fix ca origină a unui sistem de axe dreptunghiulare Fie X, Y, Z proecţiile uneia oarecare dintre forţele aplicate solidului şi x, y, z cordonatele punctului ei de aplicaţie. Acţiunea punctului fix asupra solidului poate fi reprezentată printr'o forţă N trecând prin acest punct; fie X', Y', Z' componentele necunoscute ale sale.

Solidul putând fi considerat ca liber şi în echilibru sub acţiunea forţelor direct aplicate şi a forţei N, aplicaţia celor 6 ecuaţii de echilibru ne dă, observând că momentul forţei N în raport de origină este nul,

$$X' + \Sigma X = 0, \qquad Y' + \Sigma Y = 0, \qquad Z' + \Sigma Z = 0;$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \qquad \Sigma(zX - xZ) = 0, \qquad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Cele 3 din urmă ecuaţii fiind independente de N reprezintă condiţiile de echilibru. Ele exprimă că *momentul sistemului de forţe direct aplicate, în raport de punctul fix, este nul*; cu alte cuvinte că forţele direct aplicate se reduc la o singură forţă trecând prin punctul fix.

Cele dintâi 3 ecuaţii ne dau componentele acţiunei N.

Avem în adevăr

$$X' = -\Sigma X, \qquad Y' = -\Sigma Y, \qquad Z' = -\Sigma Z.$$

Presiunea solidului asupra punctului fix, fiind egală şi direct opusă lui N, are ca componente $-X'$, $-Y'$, $-Z'$. Deci: *sarcina punctului fix este egală, în caz de echilibru, cu rezultanta forţelor direct aplicate.*

Exemple. a). *Echilibrul unui pârghii* A O B *supusă forţelor* F_1 şi F_2. Condiţia este ca momentul sistemului F_1, F_2 în raport de punctul fix O să fie nul, deci ca momentele forţelor F_1 şi F_2 în raport de O să fie egale şi direct opuse adică

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 .$$

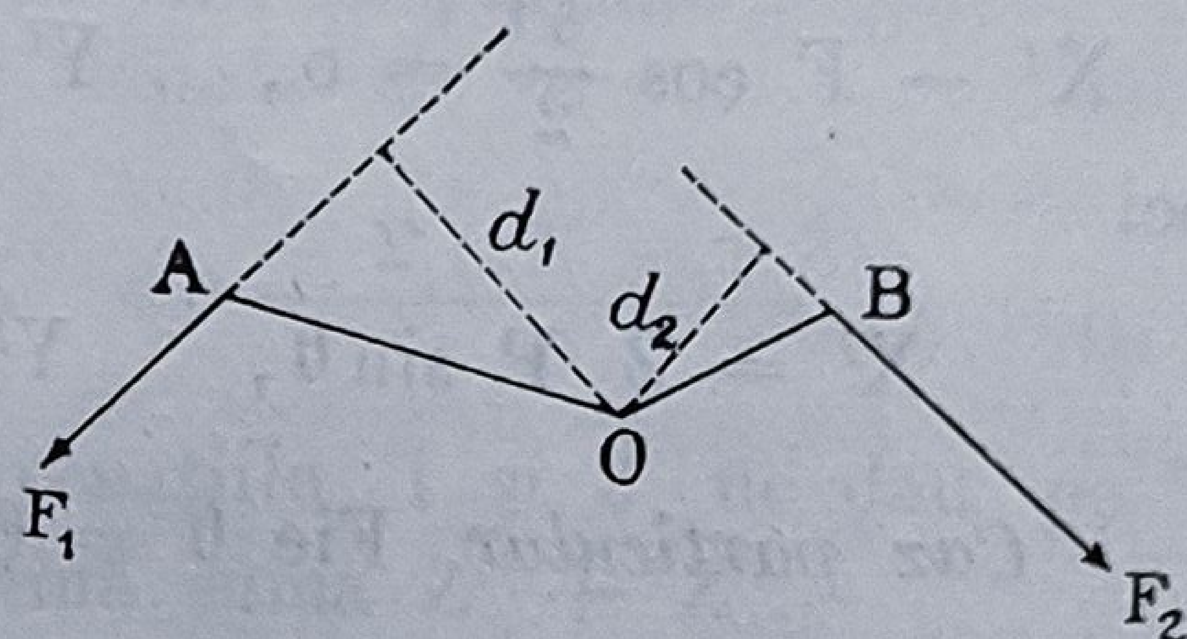


Fig. 107

Rezultanta forţelor F_1 şi F_2 trece prin punctul O şi reprezintă sarcina acestui punct.

b). *Echilibrul într'un plan vertical al unei bare grele şi omogene* OA, *de lungime* a, *fixată în* O *şi legată prin extremitatea ei* A *de un fir flexibil şi inextensibil care trece fără frecare print'un inel fix* C *şi este tras de o forţă* F. *In afară de greutatea* P *şi de forţa* F, *bara mai este solicitată la trei sferturi din lungimea ei de o forţă verticală egală cu* 2 P. Se dă

$$OC = OA.$$

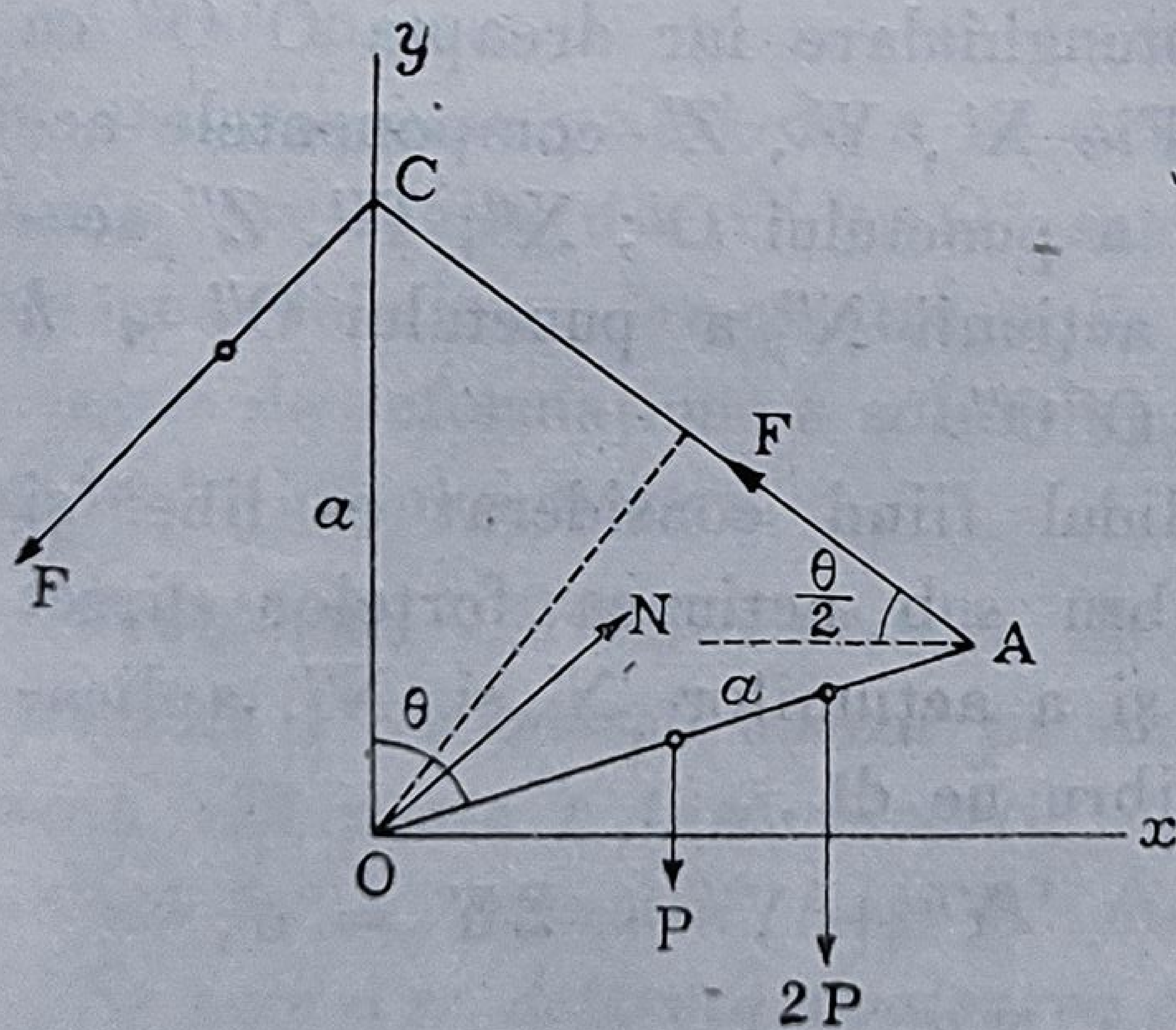


Fig. 108

Cum efectul forţei F se transmite prin fir punctului A în direcţia AC, condiţia de echilibru este, luând momentele în raport de O,

$$P \frac{a}{2} \sin \theta + 2 P \frac{3a}{4} \sin \theta - F a \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

adică

$$F \cos \frac{\theta}{2} = 2 P \sin \theta$$

de unde

$$F = 4 P \sin \frac{\theta}{2} \cdot$$

Să calculăm valoarea acțiunii N din punctul O. Avem, proectând pe Ox și Oy și însemnând prin X' și Y' componentele lui N,

$$X' - F \cos \frac{\theta}{2} = o, \qquad Y' - 3 P + F \sin \frac{\theta}{2} = o$$

deci

$$X' = 2 P \sin \theta, \qquad Y' = P\left(3 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot$$

Caz particular. Fie $\theta = 60^0$. Atunci

$$F = 2 P, \qquad X' = P\sqrt{3}, \qquad Y' = 2 P$$

$$N = P\sqrt{7} \, .$$

3. **Echilibrul unui solid care are un ax fix.** Când un solid are două puncte fixe O', O'', solidul nu poate decât să se învârtească în jurul dreptei $O' O''$, care este un ax fix. Să luăm punctul O' ca origină a unui sistem de axe dreptunghiulare iar dreapta $O' O''$ ca ax Oz. Fie X', Y', Z' componentele acțiunii N' a punctului O'; X'', Y'', Z'' acelea ale acțiunii N'' a punctului O'' și h distanța $O' O''$.

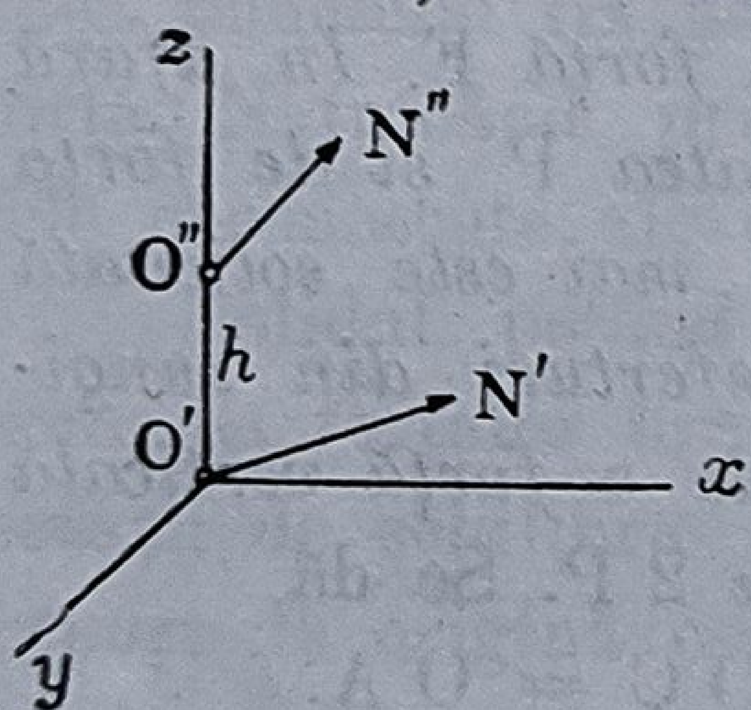


Fig. 109

Solidul fiind considerat ca liber și în echilibru sub acțiunea forțelor direct aplicate și a acțiunilor N' și N'', aplicațiunea celor 6 ecuații de echilibru ne dă,

$$X' + X'' + \Sigma X = o, \qquad Y' + Y'' + \Sigma Y = o,$$

$$Z' + Z'' + \Sigma Z = o;$$

$$- h Y'' + \Sigma (y Z - z Y) = o, \qquad h X'' + \Sigma (z X - x Z) = o,$$

$$\Sigma (x Y - y X) = o$$

observând că forţa N″ intervine singură în cele 3 din urmă ecuaţii şi că cordonatele punctului său de aplicaţie fiind o, o, h, componentele momentului ei în raport de origină sunt, potrivit formulelor generale,

$$-hY'', \qquad hX'', \qquad o.$$

Ultima ecuaţie fiind singura care este independentă de acţiunile necunoscute N′ şi N″, exprimă condiţia de echilibru. Această condiţie este ca *momentul sistemului de forţe direct aplicate solidului, în raport de axul fix, să fie nul.*

Ecuaţiile 4 şi 5 ne dau

$$Y'' = \frac{\Sigma(yZ - zY)}{h}, \qquad X'' = \frac{-\Sigma(zX - xZ)}{h}.$$

X″ şi Y″ fiind astfel cunoscuţi, ecuaţiile 1 şi 2 ne dau pe X′ şi Y′; însfârşit ecuaţia 3 determină suma $Z' + Z''$.

Cantităţile Z′ şi Z″ nu pot prin urmare să fie determinate în mod separat; acest rezultat putea să fie prevăzut, căci ori ce forţă aplicată unui *solid invariabil* putând să fie transportată într'un punct oarecare de pe direcţia sa, este clar că cele două forţe Z′, Z″ pot să fie distribuite în mod arbitrar celor 2 puncte O′, O″ cu singura condiţie ca suma lor să rămână neschimbată.

Când în loc de un sistem riguros rigid, se consideră un solid natural, susceptibil de a se deforma sub acţiunea forţelor aplicate, presiunile din O′ şi O″ sunt sub toate raporturile distincte una de alta, dar pentru a le calcula este necesar să se dea legea de deformaţiune a solidului şi această chestiune nu intră în cadrul Cursului nostru.

Problemă. *Un solid omogen de formă paralelipipedică şi de greutate* P *se găseşte aşezat pe un plan orizontal, ca un zid vertical. El poate fi însă învârtit în jurul muchiei sale* AA′ *proectată în* A, *punctele* A *şi* A′ *fiind fixe.*

Se cere a se determina valoarea efortului perpendicular Q, *cu care trebue să împingem solidul la o înălţime* h *dela bază, pentru ca el să se afle pe punctul de a se răsturna spre dreapta figurei.*

Fie a, b, c lungimile celor trei muchii ale solidului, dintre care $c = AA'$.

Forţa căutată Q este aceea care menţine solidul în poziţie verticală când el, în loc de a se rezema pe planul orizontal, se reazemă numai pe muchia sa AA'. Valoarea acestei forţe se determină luând momentele forţelor P şi Q în raport de axul de rotaţie. Avem

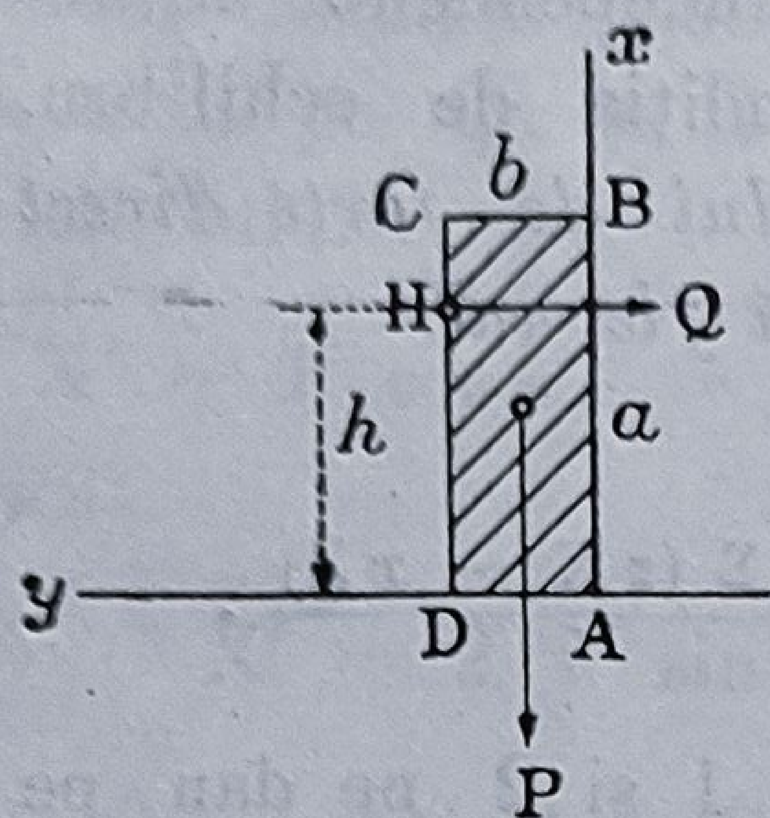


Fig. 110

$$P\frac{b}{2} - hQ = o$$

deci

$$Q = \frac{Pb}{2h}.$$

Ori-ce efort superior lui Q provoacă răsturnarea solidului spre dreapta figurei.

Valoarea lui Q nu depinde de poziţia punctului de aplicaţie K pe orizontala proectată în H. La ori-ce poziţie a lui K corespund însă alte acţiuni N' şi N'' ale celor 2 puncte fixe A şi A' asupra solidului.

Dacă voim a determina aceste acţiuni prin metoda generală, vom imagina un sistem de axe dreptunghiulare $Axyz$ cu origina în A, aşa după cum arată figura, axul Az fiind îndreptat pe direcţia AA' pentru ca sistemul de axe să formeze un triedru direct. Atunci aplicaţia primelor 5 formule din cele 6 de mai sus ale echilibrului, ne dă, însemnând prin z depărtarea punctului K de planul vertical Axy,

$$X' + X'' - P = o, \qquad Y' + Y'' - Q = o, \qquad Z' + Z'' = o;$$

$$-cY'' + Qz = o, \qquad cX'' - \frac{c}{z}P = o$$

din care deducem

$$X'' = \frac{P}{2}, \qquad Y'' = \frac{Qz}{c}$$

$$X' = \frac{P}{2}, \qquad Y' = Q\left(1 - \frac{z}{c}\right)$$

componentele Z' şi Z'' ne-putând fi determinate fie-care în parte.

4. Echilibrul unui solid care se reazemă pe un plan fix. Fie un solid care se reazemă pe un plan fix prin punctele A_1, A_2, A_3, ... Să luăm acest plan drept plan xOy, iar ca ax Oz să luăm perpendiculara îndreptată spre partea unde se găseşte solidul.

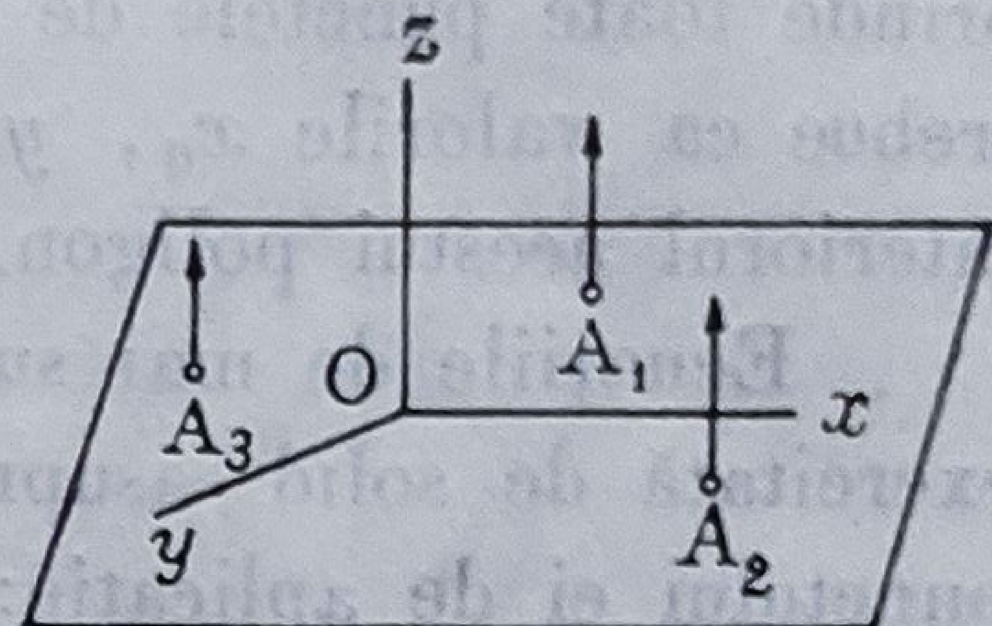


Fig. 111

Acţiunile planului fix sunt paralele cu Oz şi aplicate în punctele A_1, A_2, A_3, . . . ; ele dau o rezultantă Z_0 care întâlneşte planul xOy într'un punct de cordonate x_0, y_0.

Solidul fiind în echilibru sub acţiunea rezultantei Z_0 şi a forţelor ce-i sunt aplicate, aplicaţiunea ecuaţiilor de echilibru ne dă

$$\Sigma X = o, \qquad \Sigma Y = o, \qquad Z_0 + \Sigma Z = o\,;$$
$$y_0 Z_0 + \Sigma (y Z - z Y) = o, \qquad -x_0 Z_0 + \Sigma (z X - x Z) = o,$$
$$\Sigma (x Y - y X) = o.$$

Ecuaţiile 1, 2 şi 6 neconţinând pe Z_0 exprimă condiţiile de echilibru şi anume: *trebue ca vectorul rezultant al forţelor aplicate să fie perpendicular pe planul fix şi, pe de altă parte, ca momentul aceloraşi forţe în raport de un ax normal planului să fie nul.*

Ecuaţia 3 ne dă

$$Z_0 = -\Sigma Z.$$

Cum Z_0 este pozitiv, trebue deci ca ΣZ să fie negativ şi *aceasta constitue o nouă condiţie de îndeplinit.* ΣZ fiind egal cu $-Z_0$ reprezintă acţiunea solidului asupra planului fix şi se înţelege că această acţiune trebue să constitue o apăsare aşa că ΣZ trebue cu adevărat să fie negativ.

Insfârşit ecuaţiile 4 şi 5 determină pe x_0 şi y_0:

$$x_0 = \frac{\Sigma (z X - x Z)}{Z_0}, \qquad y_0 = \frac{-\Sigma (y Z - z Y)}{Z_0}.$$

Cum punctul de aplicaţie al rezultantei a 2 forţe paralele de acelaşi sens este coprins între punctele de aplicaţie ale for-

ţelor, se vede uşor că dacă compunem succesiv acţiunile aplicate în A_1, A_2, A_3, ..., punctul de aplicaţie al rezultantei Z_0 va fi necesarmente situat în interiorul poligonului convex care coprinde toate punctele de reazăm. Aşa dar, ca *ultimă condiţie*, trebue ca valorile x_0, y_0 să corespundă unui punct situat în interiorul acestui poligon.

Ecuaţiile de mai sus ne dau numai presiunea totală $-Z_0$ exercitată de solid asupra planului şi cordonatele x_0, y_0 ale punctului ei de aplicaţie; să ne propunem de a determina presiunile care corespund fiecăruia în parte dintre punctele de reazăm. Fie p_1, p_2, p_3, ..., acţiunile planului fix în A_1, A_2, A_3, ... şi x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ... cordonatele acestor puncte.

Acţiunea Z_0 fiind rezultanta forţelor p_1, p_2, p_3, ... teoria forţelor paralele ne procură ecuaţiile

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots\dots = Z_0 = -\Sigma Z$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots = x_0 Z_0 = \Sigma (z X - x Z)$$
$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + \dots = y_0 Z_0 = -\Sigma (y Z - z Y).$$

Necunoscutele fiind p_1, p_2, p_3, ..., vedem că dacă numărul punctelor de reazăm este mai mare ca 3, problema este nedeterminată. Când este însă vorba de un solid natural, acţiunile p_1, p_2, p_3 ..., şi prin urmare presiunile în punctele de reazăm, care sunt respectiv egale şi direct opuse acţiunilor, sunt totdeauna determinate, dar solidul este atunci deformabil, iar nu rigid după cum presupune teoria.

5. **Probleme.** 1). ***Să se determine poziţia de echilibru a unei bare grele şi omogene, care se reazămă prin extremităţile sale pe două planuri înclinate.***

Fie P greutatea barei, aplicată în mijlocul ei D; N şi N′ cele două acţiuni normale ale planurilor înclinate asupra extremităţilor A şi A′ ale barei.

Cele 3 forţe P, N, N′ făcându-şi echilibru sunt concurente şi coprinse în acelaşi plan. Acest plan e vertical căci conţine forţa P; el este totdeodată perpendicular pe intersecţia celor două

planuri înclinate de oare ce conține perpendicularele N și N′ la aceste planuri. Această intersecție este deci o dreaptă orizontală.

Fie θ unghiul barei cu orizontala. Cunoașterea acestui unghiu determină poziția de echilibru AA' a barei.

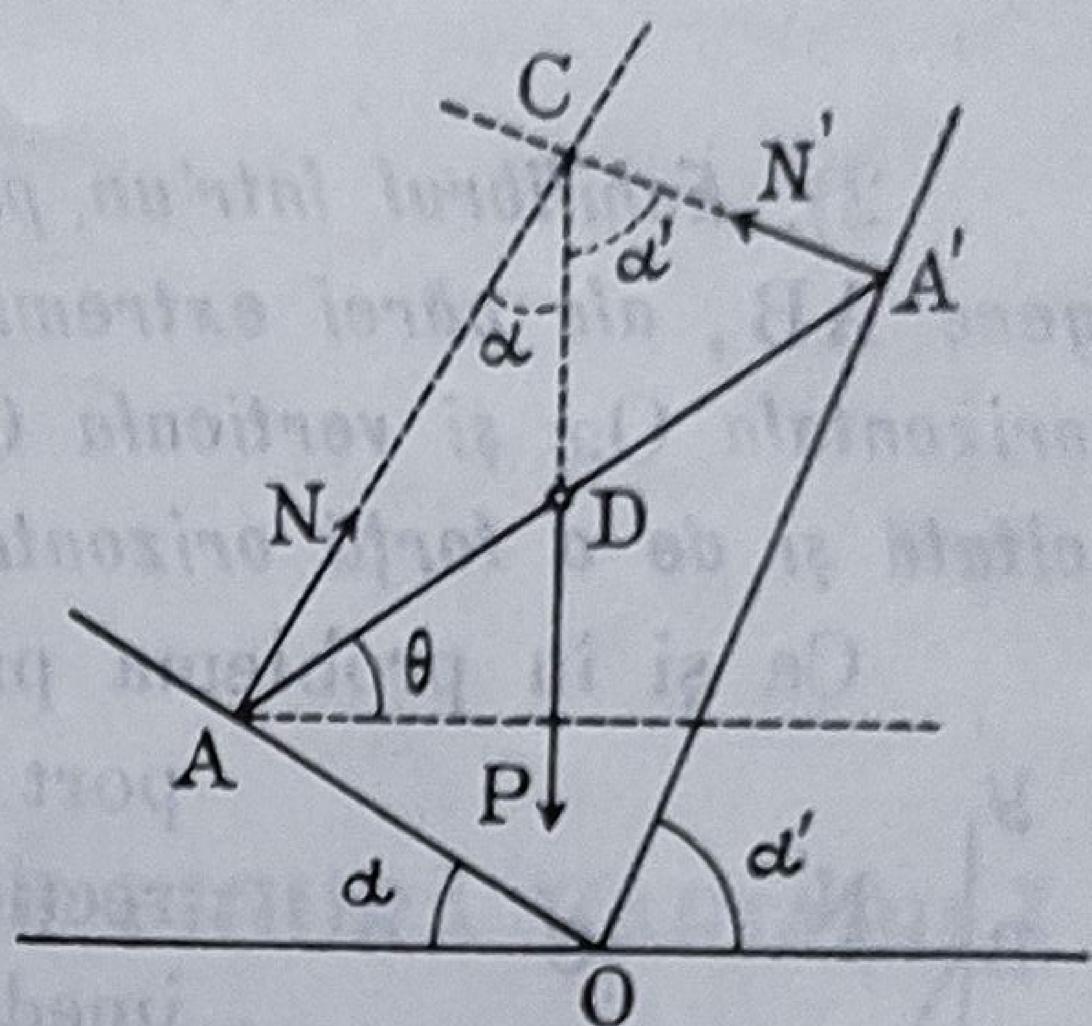


Fig. 112

Pentru determinarea lui θ, vom lua momentele în raport de un punct al planului. Cel mai simplu este de a lua momentele în raport de punctul C unde se întâlnesc direcțiile celor două acțiuni N și N′, căci momentele acestor acțiuni fiind nule în raport de C nu mai figurează atunci în ecuația momentelor. Condiția de echilibru este deci ca momentul forței P în raport de C să fie nul, adică direcția forței P să treacă prin C, după cum arată figura de mai sus. Avem atunci

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta\right)}{\sin \alpha} = \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{CD}{A'D} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha' + \theta\right)}{\sin \alpha'} = \frac{\cos(\alpha' - \theta)}{\sin \alpha'}$$

și, cum $AD = A'D$, obținem egalitatea

$$\frac{\cos(\alpha + \theta)}{\sin \alpha} = \frac{\cos(\alpha' - \theta)}{\sin \alpha'}$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \alpha'}.$$

Încât privește pe N și N′, valorile lor se pot obține scriind proporționalitatea dintre cele 3 forțe P, N, N′ și sinusurile unghiurilor coprinse între ele. Figura ne dă

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{N}{\sin(\pi - \alpha')} = \frac{N'}{\sin(\pi - \alpha)}$$

sau

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \alpha')} = \frac{N}{\sin \alpha'} = \frac{N'}{\sin \alpha}$$

de unde rezultă

$$N = \frac{P \sin \alpha'}{\sin (\alpha + \alpha')} , \qquad N' = \frac{P \sin \alpha}{\sin (\alpha + \alpha')} .$$

2). ***Echilibrul într'un plan vertical al unei bare grele şi omogene AB, ale cărei extremităţi A şi B se reazămă respectiv pe orizontala Ox şi verticala Oy, extremitatea A a barei fiind solicitată şi de o forţă orizontală F îndreptată spre O.***

Ca şi în problema precedentă, vom lua momentele în raport de punctul C unde se întâlnesc direcţiile celor 2 acţiuni N şi N'. Obţinem imediat

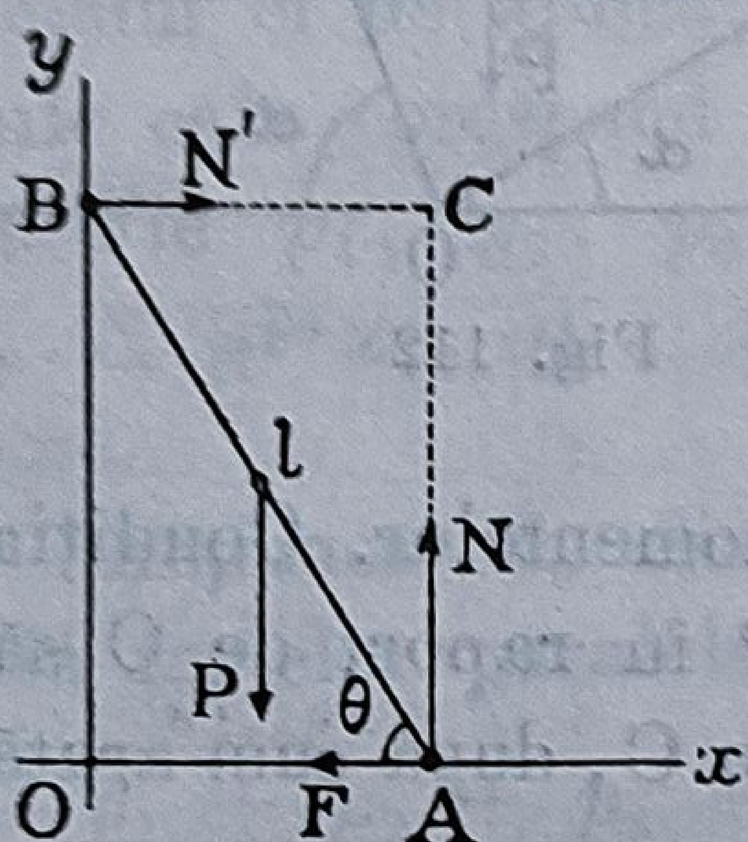


Fig. 113

$$Fl \sin \theta - P \frac{l}{2} \cos \theta = o$$

de unde

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P}{2F} .$$

Pe de altă parte, proecţiile pe Ox şi Oy ne dau

$$N' - F = o , \qquad N - P = o$$

deci

$$N' = F , \qquad N = P .$$

Rezultă, că sistemul celor 4 forţe P, F, N, N' formează 2 cupluri (P, N) şi (F, N') care îşi fac echilibru.

III. ECHILIBRUL SISTEMELOR DE FIGURĂ VARIABILĂ COMPUSE DIN MAI MULTE SOLIDE INVARIABILE.

I. CONDIŢIUNI DE ECHILIBRU.

1. Să considerăm un sistem de solide, cu diferite legături între ele şi supuse la diferite forţe şi diferite obligaţiuni.

Când există echilibru, fiecare dintre solide se găseşte separat în echilibru sub acţiunea a 3 feluri de forţe:

1° forţele ce-i sunt direct aplicate,

2° forţele care reprezintă acţiunile celorlalte solide asupra sa, potrivit legăturilor existente,

3° forţele care reprezintă obligaţiunile particulare ce sunt impuse solidului (de a avea unul sau două puncte fixe, de a se sprijini pe un plan fix, etc.).

Vom scrie deci pentru fiecare dintre solide cele 6 ecuaţiuni de echilibru, ţinând socoteală de egalitatea dintre diversele acţiuni şi reacţiuni din sistem, apoi, eliminăm între ecuaţiunile obţinute forţele dela No. 2° şi 3° în general necunoscute; ne vor rămâne atunci una sau mai multe ecuaţii care vor reprezenta condiţiile de echilibru ale sistemului.

Bine înţeles, că dacă sistemul este în echilibru, vom putea să-l considerăm ca solidificat şi să aplicăm direct întregului sistem cele 6 ecuaţii generale de echilibru ale solidului invariabil. Aceste ecuaţii nu vor reprezenta însă nimic nou, ele putându-se deduce din sistemul total de ecuaţii de care am vorbit mai sus.

2. Câteva exemple explicative. 1). *Două sfere grele și omogene* O *și* O′, *coprinse între două planuri fixe și înclinate* IA *și* IA′ *cu intersecție orizontală, se găsesc în echilibru.*

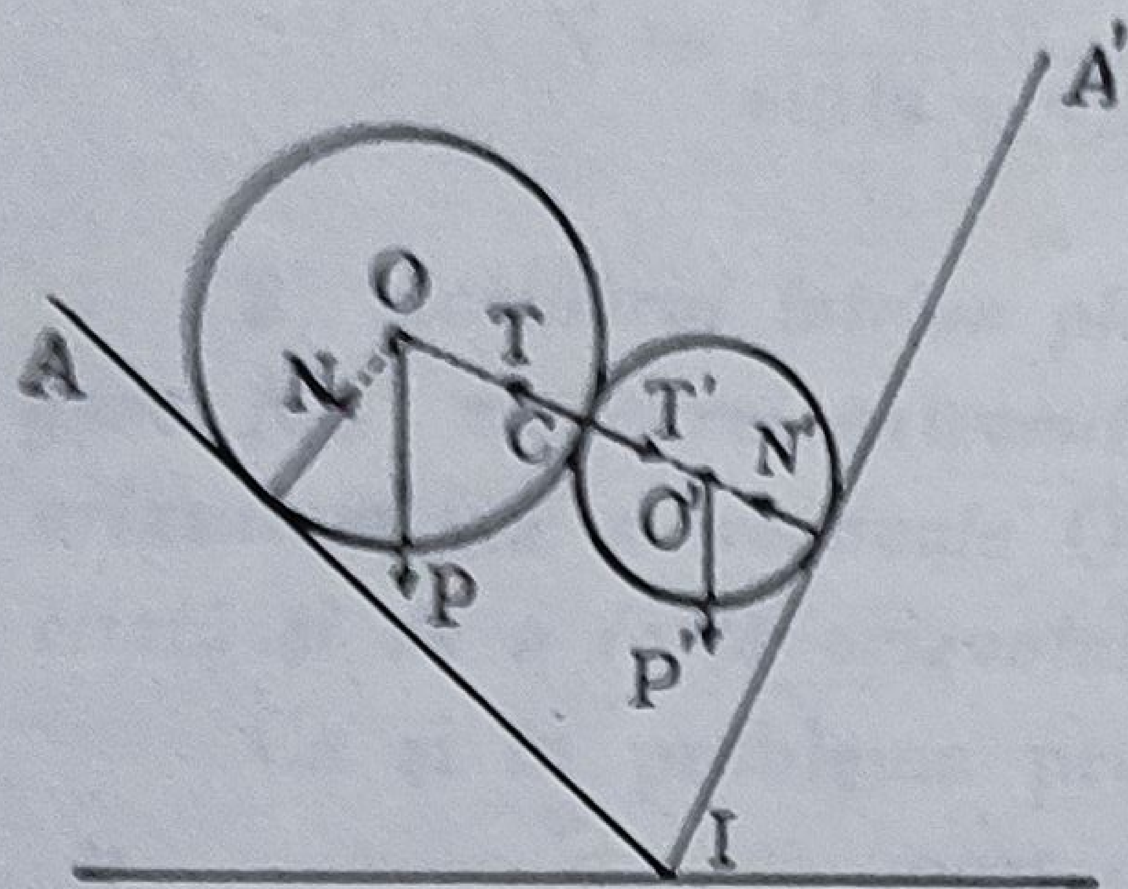


Fig. 114

Forțele direct aplicate sunt greutățile P și P′, aplicate în centrele O și O′ ale sferelor.

Acțiunea sferei O′ asupra sferei O este o forță de compresiune T, îndreptată dela C spre O, iar acțiunea sferei O asupra sferei O′ este o forță T′ egală și direct opusă lui T, în virtutea principiului acțiunii și reacțiunii.

Insfârșit, obligația impusă sferelor de a se sprijini pe planurile înclinate IA și IA′ se reprezintă prin forțele N și N′ normale planurilor în punctele de contact.

2) *Două bare* AB *și* BC, *articulate în punctul* B *și supuse la diferite forțe, se găsesc în echilibru.*

In punctul de articulație B, bara BC acționează asupra barei AB cu o forță T iar bara AB reacționează asupra barei BC cu o forță T′ egală și direct opusă lui T.

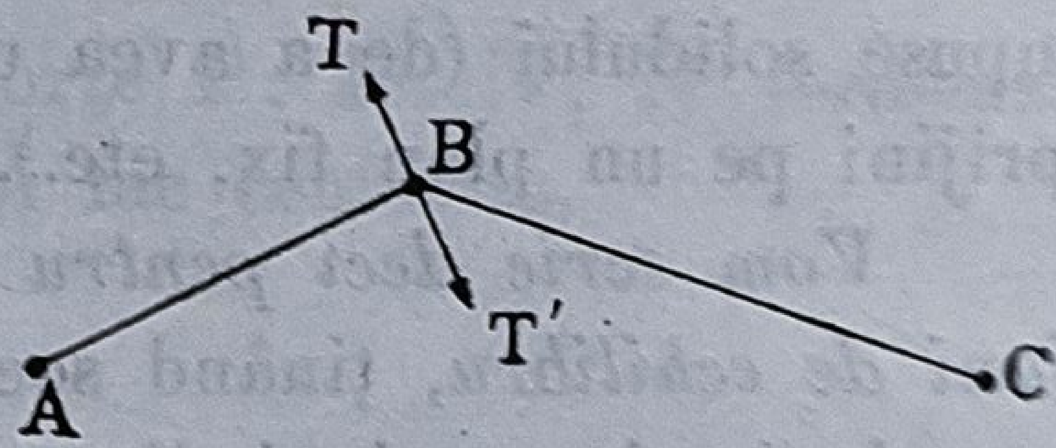


Fig. 115

Vom scrie deci ecuațiile de echilibru pentru fiecare bară în parte, ținând seama de forța T aplicată barei AB și de forța T′ aplicată barei BC.

3). *Două solide* S *și* S′, *articulate între ele printr'o vergea rigidă* AB *și supuse unui sistem de forțe, se găsesc în echilibru.*

Presupunem că între extremitățile A și B ale vergelii nu lucrează nici o forță. Vergeaua fiind în echilibru, trebue ca acțiunile solidelor S și S′ asupra ei să fie două forțe T și T′ egale și direct opuse aplicate în punctele A și B. Invers, acțiunile ver-

gelii asupra solidelor sunt 2 forţe T_1, T_1' egale şi direct opuse celor dintâi.

Aşa dar, fiecare dintre solide va fi în echilibru sub acţiunea forţelor ce-i sunt direct aplicate şi a acţiunilor T_1, T_1' ale vergelii asupra lui. — Vergeaua poate de altfel să fie supusă din partea solidelor fie la o tracţiune, fie la o compresiune.

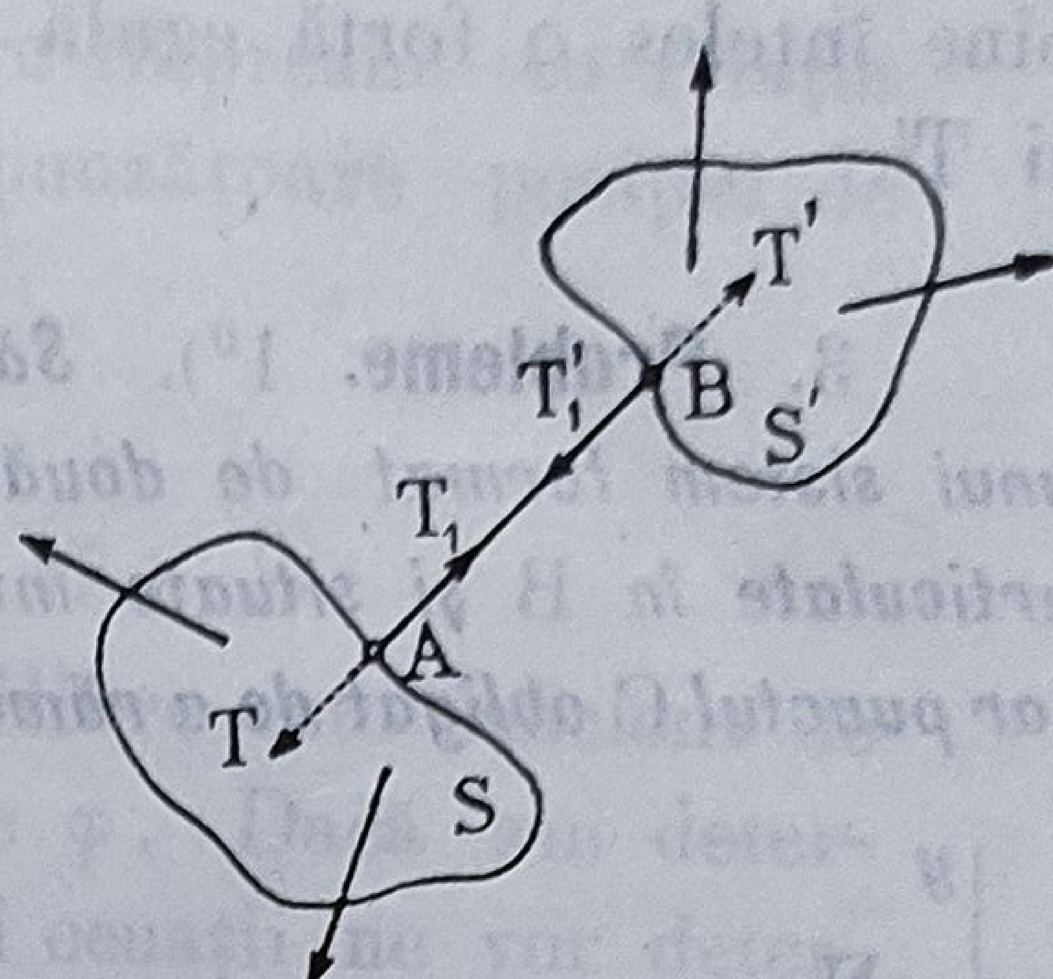


Fig. 116

4). ***Două solide în echilibru, legate printr'un fir flexibil însă inextensibil.*** Daca există echilibru, extremităţile firului sunt supuse din partea solidelor la două eforturi de tracţiune T, T', egale şi direct opuse, aplicate la extremităţile A şi B ale firului. Se va raţiona deci ca mai sus, forţele direct aplicate solidelor trebuind însă să aibe ca efect de a întinde firul, ceea ce constitue o condiţie particulară de echilibru.

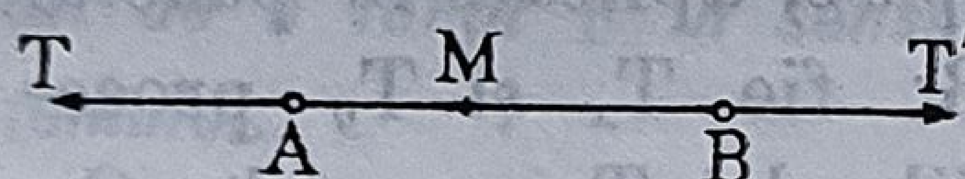


Fig. 117

Să considerăm un punct M al firului. Acţiunea porţiunei de fir M B asupra porţiunei M A, este egală cu forţa T' aplicată în M, căci dacă suprimăm porţiunea M B, trebue să aplicăm în punctul M o forţă egală cu T' pentru a menţine echilibrul. Invers, acţiunea porţiunii M A asupra porţiunii M B este o forţă egală cu T, aplicată în M. Aşa dar în fiecare punct, acţiunile reciproce ale celor două porţiuni de fir corespunzătoare sunt egale şi direct opuse, intensitatea lor comună fiind egală cu aceea a forţelor care îşi fac echilibru la extremităţile firului. Acţiunea unei porţiuni de fir asupra celeilalte, aplicată în M, se numeşte *tensiune*.

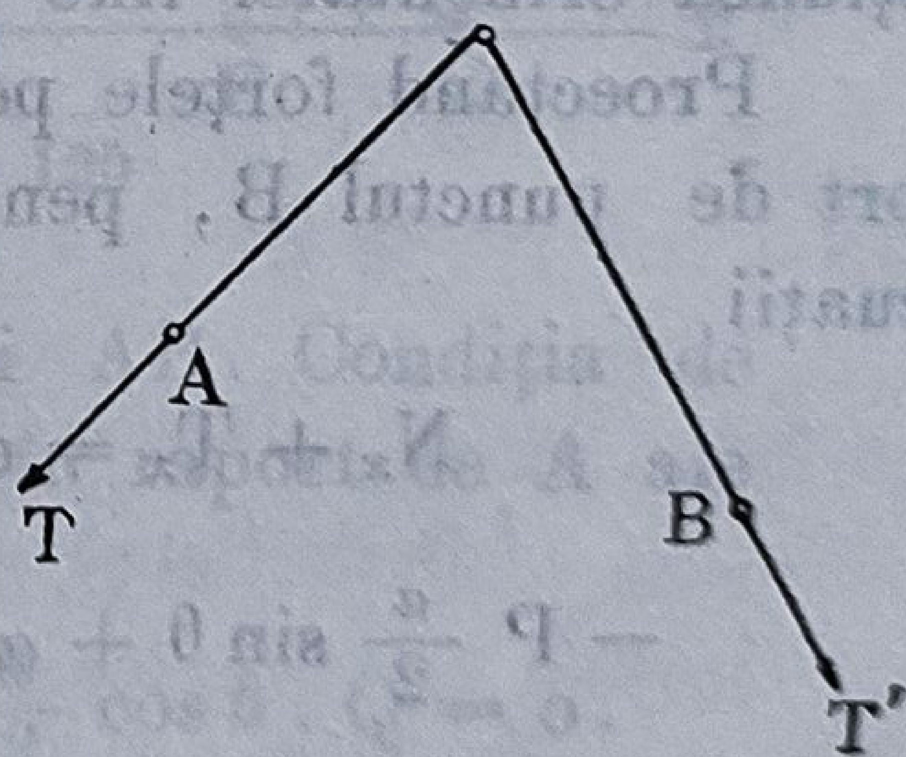


Fig. 118

Dacă firul trece printr'un inel fix, în interiorul căruia poate aluneca fără frecare, trebue, pentru ca echilibrul să existe, ca acţiunile T, T' dela extremităţile firului să fie tot egale între

ele, şi tensiunea în fiecare punct al firului are ca valoare tot T sau T′. Acţiunea inelului asupra firului, în punctul de contact este bine înţeles o forţă egală şi direct opusă rezultantei forţelor T şi T′.

3. **Probleme.** 1°). *Să se determine poziţia de echilibru a unui sistem format de două bare grele şi omogene* AB *şi* BC, *articulate în* B *şi situate într'un plan vertical, punctul* A *fiind fix, iar punctul* C *obligat de a rămâne pe orizontala* Ox *şi supus unei forţe* F.

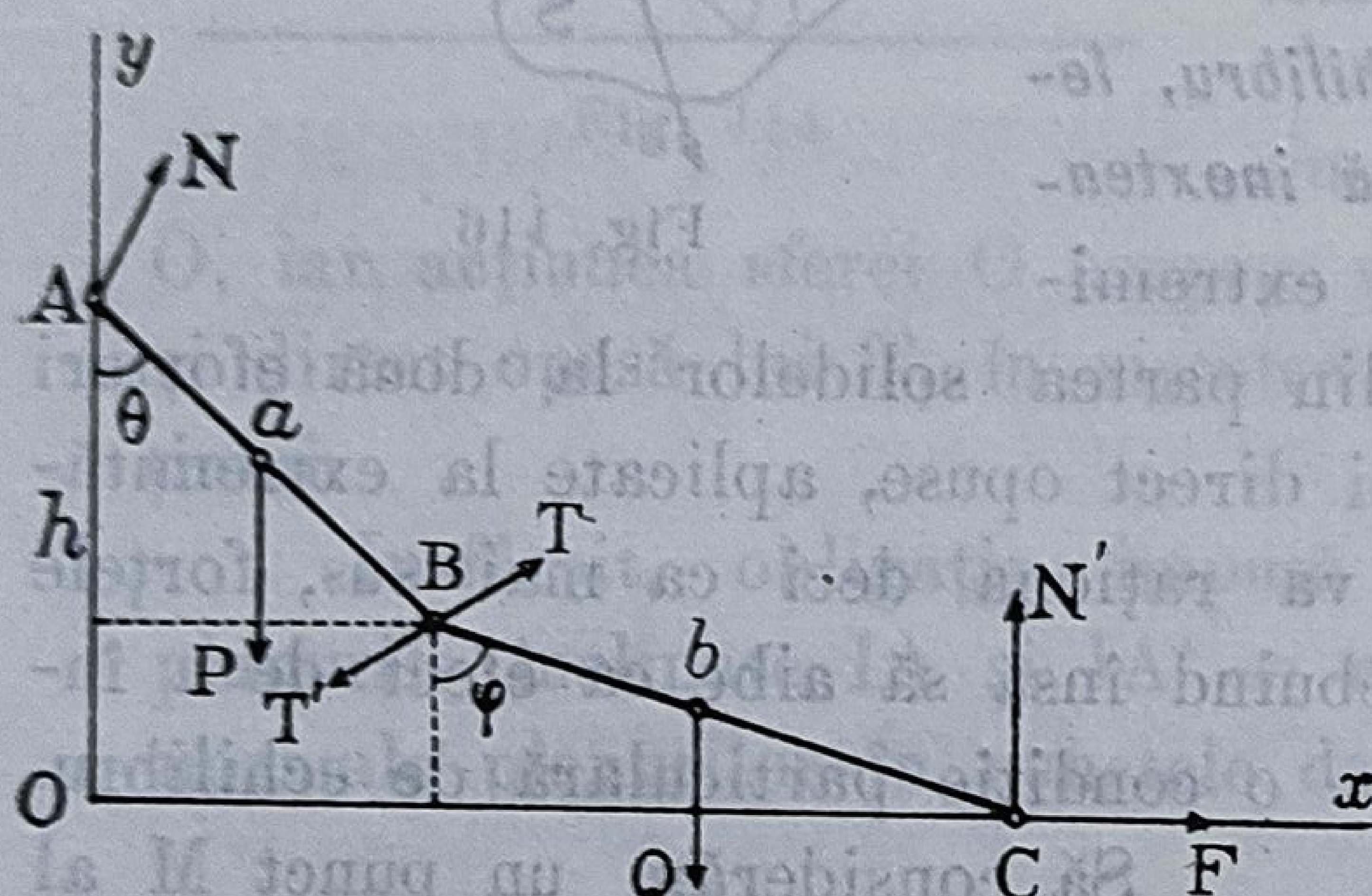


Fig. 119

Forţele direct aplicate sunt greutăţile P şi Q ale barelor, aplicate în mijloacele lor, şi forţa F.

In poziţia de echilibru, acţiunile reciproce ale barelor sunt două forţe T şi T′ egale şi direct opuse, aplicate în punctul B; fie T_x şi T_y proecţiile lui T pe axele Ox şi Oy, T fiind acţiunea barei BC asupra barei AB.

Fie deasemenea N_x şi N_y proecţiile acţiunei N a punctului fix A asupra sistemului şi N′, perpendiculară pe Ox, acţiunea orizontalei fixe Ox asupra punctului C.

Proectând forţele pe Ox şi Oy, şi luând momentele în raport de punctul B, pentru fiecare din bare, obţinem cele 6 ecuaţii

$$N_x + T_x = o, \qquad N_y - P + T_y = o,$$

$$-P\frac{a}{2}\sin\theta + a\sin\theta \,.\, N_y + a\cos\theta \,.\, N_x = o;$$

$$F - T_x = o, \qquad N' - Q - T_y = o,$$

$$Q\frac{b}{2}\sin\varphi - N'b\sin\varphi - Fb\cos\varphi = o$$

cu relaţia dintre unghiurile θ şi φ:

$$(\alpha) \qquad h = a\cos\theta + b\cos\varphi\,.$$

Avem deci 6 ecuaţii între cele 5 necunoscute N_x, N_y, T_x, T_y, N'; eliminarea lor ne va da o ecuaţie în θ şi φ care va reprezenta condiţia de echilibru şi care împreună cu relaţia (α) vor determina valorile θ şi φ corespunzătoare poziţiei de echilibru a sistemului.

Efectuarea acestei eliminări ne dă

$$(P + Q) \sin\theta \, . \, \sin\varphi = 2 \, F \sin(\varphi - \theta) \, .$$

Pentru determinarea poziţiei de echilibru este suficient de a cunoaşte fie numai pe θ, fie numai pe φ. Dacă am determinat spre exemplu pe θ, cele cinci dintâi ecuaţii ne vor determina pe N_x, N_y, T_x, T_y, şi N'.

2°). *Fie sistemul articulat* ABC *constituit din două bare* AB, BC *articulate în* B. *Punctul* A *este fix, iar punctul* C *poate aluneca fără frecare pe dreapta orizontală* Ax. *Bara* AB *este grea şi omogenă, bara* BC *nu are greutate. Insfârşit, punctul* B *este solicitat de o forţă orizontală* P *în sensul* Ax, *iar punctul* C *este solicitat de o forţă* F *în sensul* CA. *Se cere condiţia de echilibru a sistemului.*

Cum în punctul de articulaţie B lucrează o forţă, vom considera sistemul ca fiind constituit din cele 2 bare date şi un solid concentrat în punctul B, forţa P lucrând asupra acestui solid.

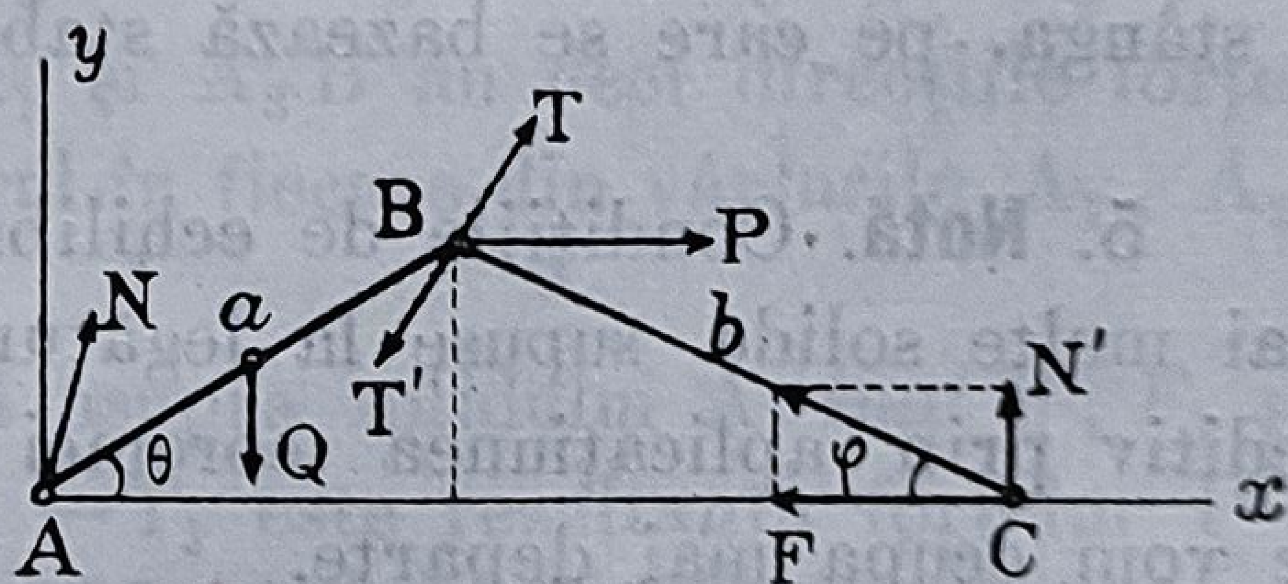


Fig. 120

Fie T acţiunea solidului asupra barei AB. Condiţia de echilibru a barei AB este, luând momentele în raport de A ale forţelor T şi Q,

$$(1) \qquad -a \cos\theta \, . \, T_y + a \sin\theta \, . \, T_x + \frac{a}{2} \cos\theta \, . \, Q = o \, .$$

Acţiunea barei AB asupra solidului din B este o forţă T' egală şi direct opusă lui T. Pe de altă parte, pentru ca bara BC să fie în echilibru, trebue ca forţele care lucrează la capetele ei să fie egale şi direct opuse. Deci, rezultanta forţelor N' şi F are direcţia CB iar acţiunea solidului asupra barei BC

este o forță egală și direct opusă acestei rezultante. Solidul este prin urmare în echilibru sub acțiunea forțelor T', P și a rezultantei forțelor F și N' transportată în B. Condițiile de echilibru ale solidului sunt atunci

$$-T_x + P - F_{,} = 0, \quad -T_y + N' = 0 \quad \text{cu } N' = F \operatorname{tg} \varphi .$$

Eliminând pe T_x, T_y, N' între aceste ecuații și ecuația (1) găsim ca condiție de echilibru pentru sistemul celor două bare

$$2 F \cos \theta \cdot \operatorname{tg} \varphi = 2 (P - F) \sin \theta + Q \cos \theta$$

cu relația

$$a \sin \theta = b \sin \varphi .$$

Caz particular. Dacă $Q = 0$ și $a = b$, condiția se reduce la $P = 2F$, ori care ar fi θ.

4. **Observație**. Să se observe bine, în aplicații, că dacă în aceiași egalitate utilizăm pentru evaluarea momentelor atât formula analitică $xY - yX$, cât și formula geometrică $F.d$, să se ia pentru cea din urmă tot sensul de rotație dela dreapta la stânga, pe care se bazează stabilirea celei dintâi [1]).

5. **Notă**. Condițiile de echilibru ale unui sistem format din mai multe solide supuse la legături, se obțin în mod mai expeditiv prin aplicațiunea teoremei travaliului virtual, de care ne vom ocupa mai departe.

II. POLIGON FUNICULAR.

1. **Definiție și condiții de echilibru.** Să considerăm un fir flexibil și inextensibil susținut la extremitățile sale A și B de două forțe P și Q și solicitat în diferite alte puncte A_1, A_2, ... de diferite forțe F_1, F_2, ... Dacă firul este în echilibru sub acțiunea forțelor ce-i sunt aplicate, el ia forma unui poligon deschis, zis *poligon funicular*. Să determinăm con-

---

1) *Cinematica*, pag. 22.

diţiile de echilibru ale acestei figuri, pe care să o presupunem pentru simplicitate ca coprinzând numai 5 puncte A, A_1, A_2, A_3, B.

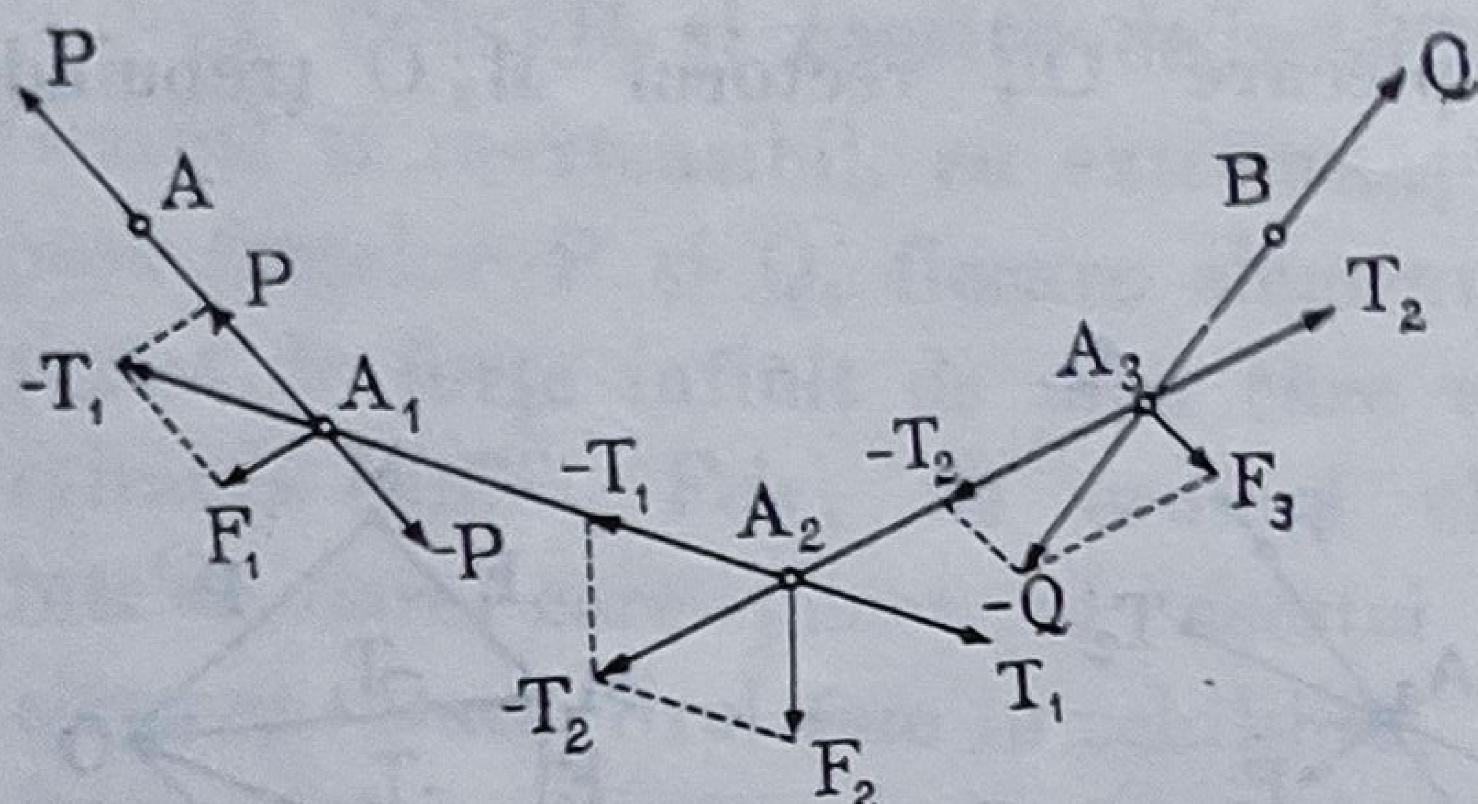


Fig. 121

Pentru aceasta, nu vom avea decât să considerăm poligonul ca fiind format dintr'un sistem de solide invariabile A, A_1, A_2, A_3, B reduse la câte un simplu punct material şi legate între ele prin lungimile de fir AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3B. Aducem astfel studiul chestiunei de faţă la cele studiate mai înainte

Diversele lungimi de fir se vor găsi în echilibru potrivit următorului tablou:

Firul	AA_1	sub	acţiunea	tensiunilor	P	şi	$-P$
„	A_1A_2	„	„	„	$-T_1$	„	T_1
„	A_2A_3	„	„	„	$-T_2$	„	T_2
„	A_3B	„	„	„	$-Q$	„	Q.

Porţiunile de fir AA_1 şi A_3B au deci direcţiile forţelor P şi Q. Să cercetăm echilibrul în fiecare din vârfurile A_1, A_2, A_3 ale poligonului.

Forţele care lucrează asupra solidului A_1 sunt P, F_1 şi T_1. Cum ele îşi fac echilibru, $-T_1$ este rezultanta forţelor P şi F_1 care sunt cunoscute. Tot astfel:

$-T_2$ este rezultanta forţelor $-T_1$ şi F_2;
$-Q$ „ „ „ $-T_2$ „ F_3.

Aceasta fiind stabilit, să luăm un punct O prin care să ducem vectorul OM echipolent forţei P, apoi vectorul MM_1 echipolent forţei F_1. Rezultanta OM_1 va reprezenta atunci pe $-T_1$, iar direcţia M_1O va fi direcţia porţiunei de fir A_1A_2. De asemenea, luând M_1M_2 echipolent cu F_2, vectorul OM_2 va reprezenta pe $-T_2$, rezultantă a forţelor P, F_1, F_2, iar direcţia M_2O va fi aceea a porţiunei de fir A_2A_3. Insfârşit, luând M_2M_3, echipolent cu F_3, vectorul OM_3 va reprezenta pe $-Q$, rezultantă a forţelor $-T_2$ şi F_3, adică a forţelor P, F_1, F_2,

F_3, iar direcţia M_3O va fi aceea a porţiunii de fir A_3B. Deci, poligonul în chestiune, zis *poligonul lui Varignon*, trebue să se închidă în punctul de plecare O, vectorul M_3O trebuind să fie echipolent forţei Q.

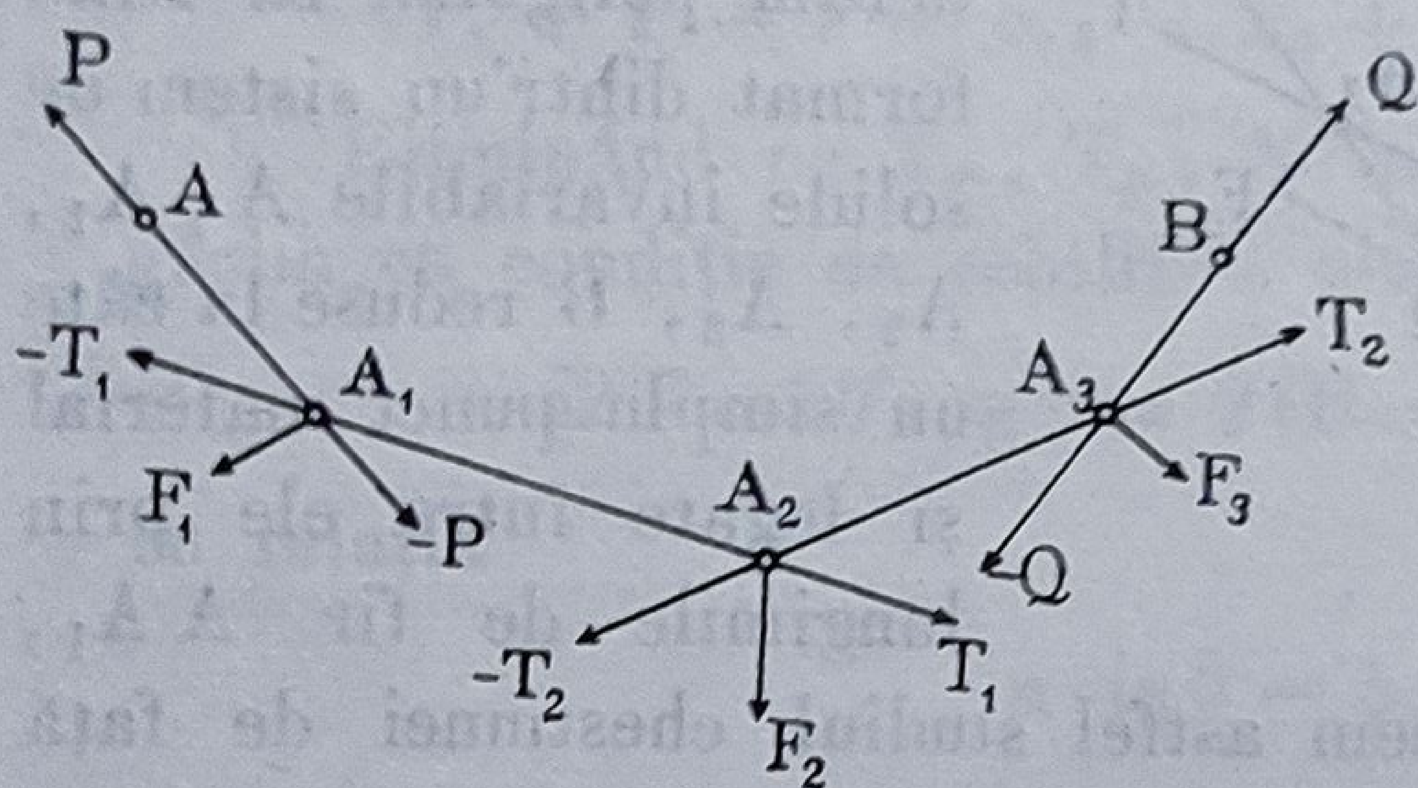


Fig. 122

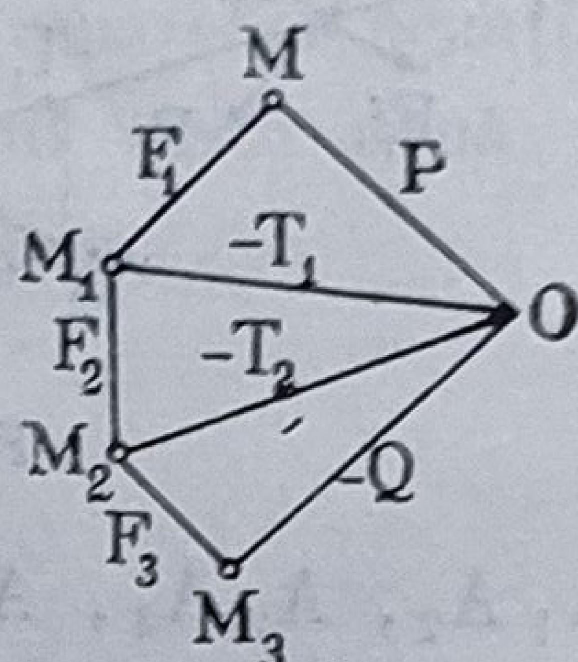


Fig. 123

De aci următoarea regulă: *Pentru echilibrul unui poligon funicular, este necesar şi suficient, ca:*

1° *poligonul lui Varignon să se închidă,*

2° *direcţiile porţiunilor de fir* AA_1, A_1A_2, A_2A_3 A_3B *să coincidă cu direcţiile vectoarelor* MO, M_1O, M_2O, M_3O.

In asemenea condiţii, valorile tensiunilor intermediare T_1 şi T_2 sunt egale cu lungimile diagonalelor M_1O şi M_2O.

2. Cazuri particulare. Dacă forţele P, F_1, F_2, F_3, Q sunt toate paralele unui acelaşi plan, poligonul lui Varignon este o figură plană şi poligonul funicular va forma şi el, în consecinţă, o figură tot plană.

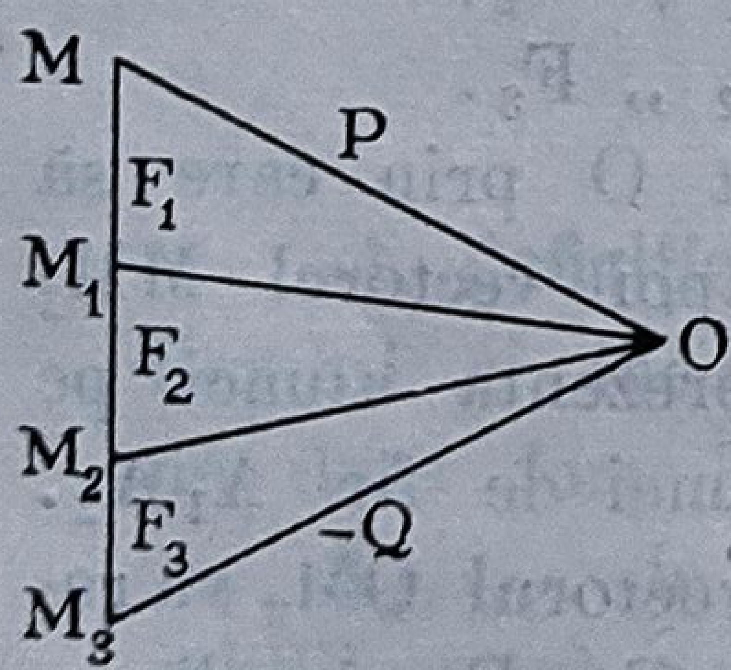


Fig. 124

Dacă forţele intermediare F_1, F_2, F_3 sunt paralele unele cu altele, poligonul lui Varignon se reduce la un triunghiu; el formează deci o figură plană, ori care ar fi direcţiile forţelor P şi Q dela extremităţile firului. Poligonul funicular va fi şi el tot plan şi anume coprins într'un plan paralel cu acela al triunghiului.

III. CURBĂ FUNICULARĂ.

4. Definiţie şi condiţii de echilibru. Să considerăm un fir flexibil şi inextensibil, cu extremităţile A şi B fixate, sau supuse forţelor P şi Q, fiecare element MM′ al firului fiind acţionat de forţe infinit de mici care vom presupune că au o rezultantă unică $F ds$, de ordinul elementului MM′, aplicată într'un oare care punct al acestui element. Dacă firul este în echilibru, forma pe care o prezintă este zisă *curbă funiculară*.

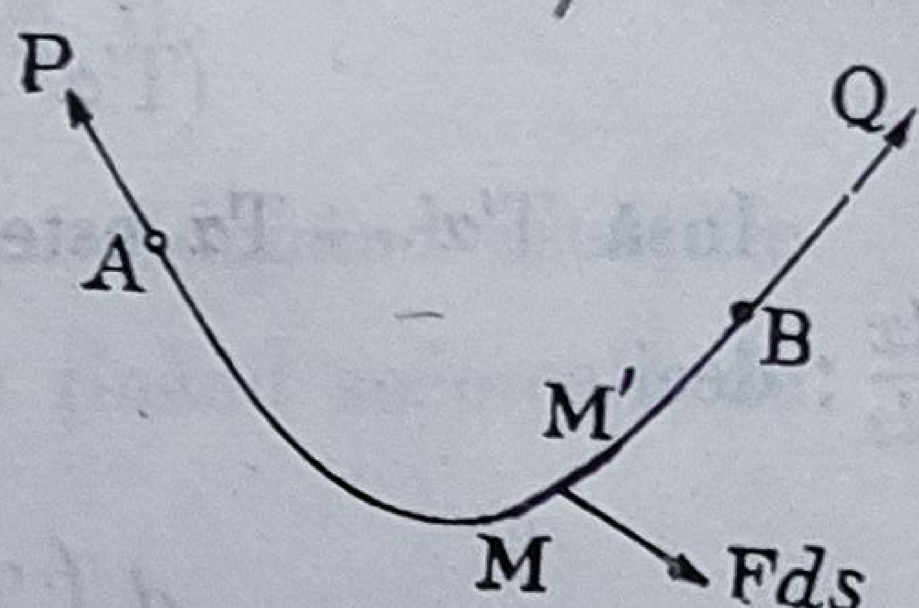


Fig. 125

Să presupunem echilibrul ca existând. Dacă atunci, tăiem firul în M şi suprimăm porţiunea MB, va trebui pentru menţinerea echilibrului, să aplicăm în M, în sensul ultimului element al curbei AM, adică tangenţial curbei, o forţă convenabilă T. Invers, dacă tăind firul în M suprimăm porţiunea MA, va trebui, în virtutea principiului acţiunii şi reacţiunii, să aplicăm în M, pentru menţinerea echilibrului, o forţă — T, egală şi direct opusă lui T. Aceste două forţe iau numele de *tensiuni în punctul* M.

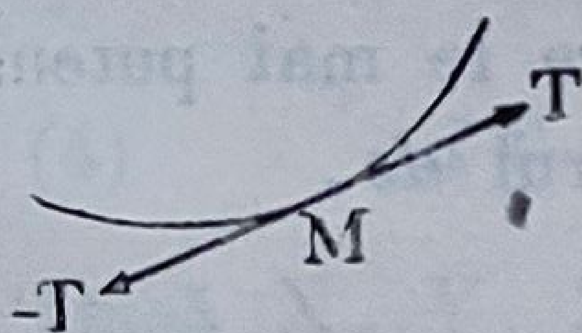


Fig. 126

Să considerăm acum un element de arc MM′ şi să tăem firul atât în M cât şi în M′. Pentru menţinerea echilibrului, va trebui să aplicăm în M o forţă — T şi în M′ o forţă T′, amândouă tangente firului. Fie K punctul de aplicaţie al forţei $F ds$, zisă *forţă motrice*. Putem asimila figura arcului elementar MKM′ cu aceea a unui poligon funicular cu 2 laturi MK şi KM′. *Condiţia de echilibru va fi ca tensiunea* T *să fie rezultanta forţei* $F ds$ *şi a tensiunei* T′. Să exprimăm aceasta în mod analitic, faţă de un sistem de axe coordonate dreptunghiulare.

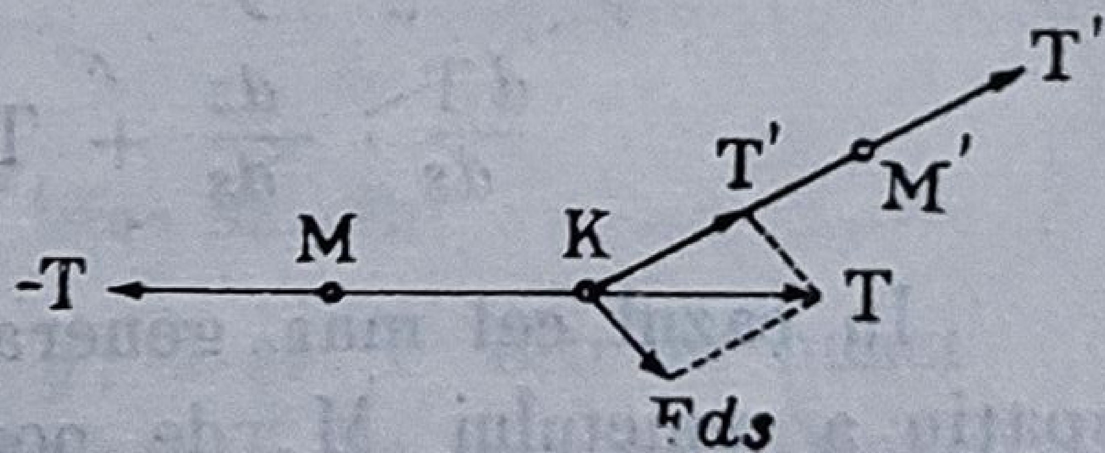


Fig. 127

Fie: s lungimea firului socotită pozitiv cu începere dela

punctul A; x, y, z cordonatele punctului M; X, Y, Z proecţiile pe axe ale forţei F, care este forţa motrice raportată la unitatea de lungime; α, β, γ cosinusurile directoare ale tensiunei T şi α', β', γ' cosinusurile directoare ale tensiunei T'. Potrivit condiţiei de echilibru, avem în proecţie pe axul Ox:

$$T\alpha = T'\alpha' + X\,ds$$

de unde

$$(T'\alpha' - T\alpha) + X\,ds = 0 .$$

Insă $T'\alpha' - T\alpha$ este diferenţiala lui $T\alpha$, iar α este egal cu $\frac{dx}{ds}$; deci

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0$$

şi, în mod analog,

$$(1) \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = 0 .$$

Acestea sunt ecuaţiile de echilibru, pe care le mai putem scrie, efectuând diferenţierea şi suprimând factorul ds,

$$\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} + T\frac{d^2x}{ds^2} + X = 0$$

$$(2) \qquad \frac{dT}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + T\frac{d^2y}{ds^2} + Y = 0$$

$$\frac{dT}{ds}\cdot\frac{dz}{ds} + T\frac{d^2z}{ds^2} + Z = 0 .$$

In cazul cel mai general, forţa F depinde de poziţia în spaţiu a punctului M, de poziţia punctului M pe fir, adică de s, şi de orientarea în spaţiu a elementului MM'; componentele X, Y, Z sunt deci în general funcţii de x, y, z; s; $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Alăturând sistemului de ecuaţii (2), relaţia

$$(3) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

avem în total 4 ecuaţii diferenţiale de primul ordin în raport de T şi de al doilea ordin în raport de x, y, z, care ne vor da pe x, y, z, şi T în funcţie de s şi de 6 constante arbitrare.

Dacă, spre exemplu, extremităţile A şi B ale firului sunt fixe, cele 6 constante se determină scriind că pentru $s = o$ şi $s = l$ (l fiind lungimea firului) cordonatele x, y, z devin respectiv identice cu cordonatele punctelor A şi B.

2. Cazul când forţa F admite o funcţie. Adunând ecuaţiile (2) înmulţite respectiv cu $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ şi ţinând socoteală de relaţia (3) şi de cea următoare:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = o$$

se obţine egalitatea

$$\frac{dT}{ds} + X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = o$$

adică

$$dT + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o. \tag{4}$$

Dacă X, Y, Z sunt derivatele parţiale ale unei funcţii de cordonate, $f(x, y, z)$, egalitatea (4) devine

$$dT + df = o$$

şi, integrând,

$$T + f(x, y, z) = T_0 + f(x_0, y_0, z_0)$$

x_0, y_0, z_0 şi T_0 fiind valoriile lui x, y, z şi T într'un punct determinat. Se vede, că în cazul considerat, T nu depinde decât de $f(x, y, z)$. Inlocuind pe T prin expresiunea sa în ecuaţiile (2), două oare care dintre aceste ecuaţii, împreună cu relaţia (3), ne vor face cunoscută figura firului.

3. Consecinţele ecuaţiilor de echilibru. Fie: α, β, γ cosinusurile directoare ale tangentei din M la fir; l, m, n cosinu-

surile directoare ale normalei principale şi R raza de curbură în M. — Se ştie că avem

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$l = \mathrm{R} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}, \qquad m = \mathrm{R} \cdot \frac{d^2y}{ds^2}, \qquad n = \mathrm{R} \cdot \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Ecuaţiile (2) se pot deci scrie

$$\alpha \frac{d\mathrm{T}}{ds} + l \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}} + \mathrm{X} = o$$

$$\beta \frac{d\mathrm{T}}{ds} + m \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}} + \mathrm{Y} = o$$

$$\gamma \frac{d\mathrm{T}}{ds} + n \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}} + \mathrm{Z} = o.$$

Aceste egalităţi exprimă că forţa motrice F, luată în sens contrariu, este rezultanta:

1⁰ a unei forţe $\frac{d\mathrm{T}}{ds}$ îndreptată pe tangentă,

2⁰ a unei forţe $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}}$ îndreptată pe raza de curbură.

De aci următoarele două consecinţe:

1⁰) forţa motrice este, în fiecare punct, situată în planul osculator al firului;

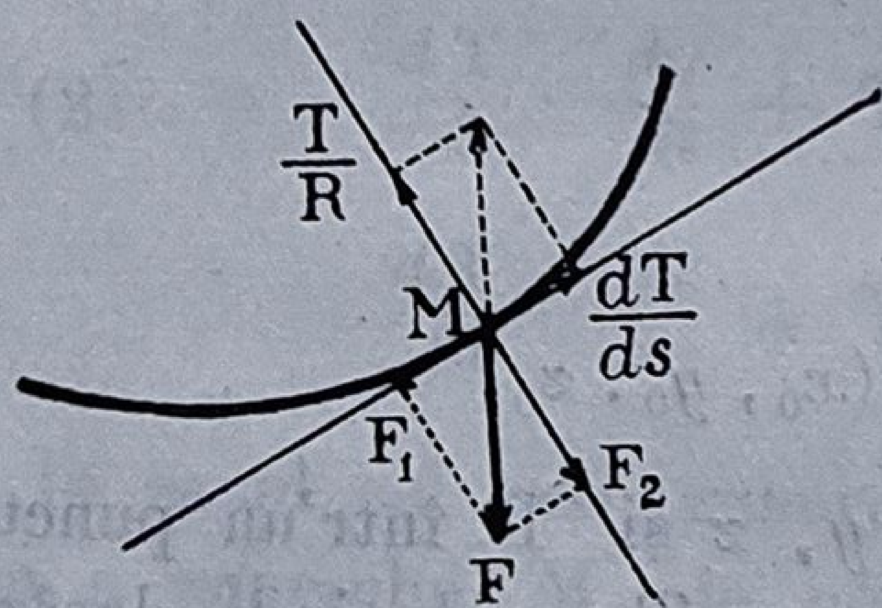


Fig. 128

2⁰) dacă însemnăm prin F_1 şi F_2 proecţiile forţei F pe tangentă şi pe normala principală, avem

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds} = -\mathrm{F}_1$$

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}} = -\mathrm{F}_2.$$

4. Echilibrul unui fir întins pe o suprafaţă. Când un fir întins pe o suprafaţă prin efectul celor două forţe dela extremităţile sale, se găseşte în echilibru, forţa F face echilibru acţiunei normale a suprafeţii. Componenta tangenţială F_1 este deci

nulă şi prin urmare $\frac{dT}{ds} = o$ adică $T = const$. Aşa dar, *tensiunea este aceiaşi pe toată lungimea firului*[1]).

Pe de altă parte, cum direcţia forţei F este şi normală suprafeţii şi conţinută în planul osculator al firului, rezultă că *planul osculator al curbei formată de fir este în fiecare punct normal suprafeţii.* Această curbă este deci *o linie geodezică* a suprafeţii, adică o linie de lungime minimă.

Insfârşit, relaţia $F_2 = -\frac{T}{R}$, în care T este o constantă, arată că *presiunea suprafeţii asupra firului este în fiecare punct invers proporţională cu raza de curbură.*

5. **Aplicaţiuni.** 1⁰) *Lănţişorul.* Se numeşte lănţişor figura de echilibru a unui fir care, având extremităţile sale fixate, nu este supus decât acţiunei greutăţii. Toate forţele fiind paralele, curba firului va fi coprinsă în planul vertical care trece prin cele două puncte fixe A şi B. Să luăm în acest plan două axe dreptunghiulare, axul Oy fiind vertical şi îndreptat în sus.

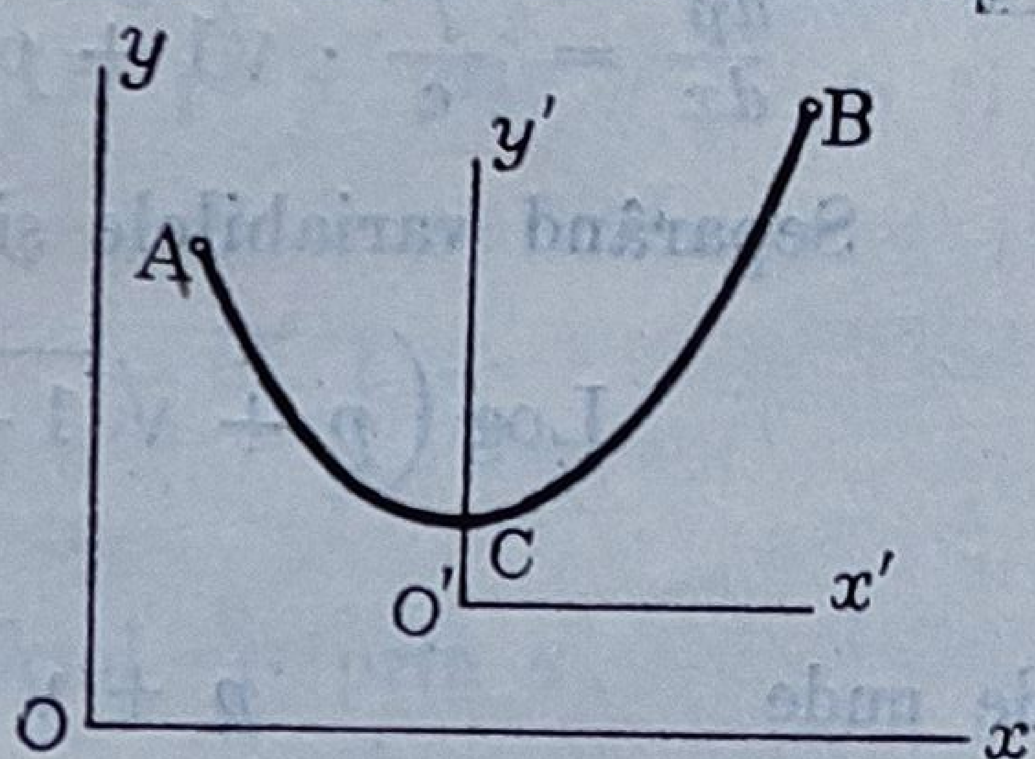


Fig. 129

Presupunând firul omogen, să însemnăm prin f greutatea sa pe unitatea de lungime; forţa motrice va fi deci $f ds$ şi vom avea

$$X = o, \qquad Y = -f.$$

Aplicaţia ecuaţiilor (1) ne dă

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = o, \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = f\,ds$$

şi integrând

$$T\frac{dx}{ds} = c, \qquad T\frac{dy}{ds} = fs + cc'$$

---

[1]) Forţele care lucrează la extremităţile firului sunt deci egale, căci ele reprezintă tensiunile limite.

de unde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{fs}{c} + c'.$$

Prima dintre aceste relaţii arată că *componenta orizontală a tensiunei este aceiaşi în toate punctele*. Relaţia a treia ne permite de a determina forma curbei. Deducem din ea, prin derivare,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{f}{c}$$

adică

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f}{c} \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{f}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

sau încă

$$\frac{dp}{dx} = \frac{f}{c} \cdot \sqrt{1 + p^2} \quad , \quad \text{punând } \frac{dy}{dx} = p.$$

Separând variabilele şi integrând, obţinem

$$\text{Log}\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \frac{f}{c}x + \alpha,$$

de unde $$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{fx}{c} + \alpha}.$$

Rezolvind apoi în raport de p şi înlocuind pe p prin $\frac{dy}{dx}$, găsim

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{fx}{c} + \alpha} - e^{-\frac{fx}{c} - \alpha}\right]$$

şi printr'o nouă integraţiune

$$(2) \qquad y = \frac{c}{2f}\left[e^{\frac{fx}{c} + \alpha} + e^{-\frac{fx}{c} - \alpha}\right] + c_1.$$

Aceasta este ecuaţia lănţişorului. Relaţia de la care am plecat, ne dă, înlocuind în ea pe $\frac{dy}{dx}$ prin expresia (1):

$$s = \frac{c}{2f}\left[e^{\frac{fx}{c} + \alpha} - e^{-\frac{fx}{c} - \alpha}\right] - \frac{cc'}{f}.$$

Cele 4 constante c, c', α, c_1 se determină exprimând că pentru $s = o$ şi $s = l$, cordonatele x şi y ale curbei devin identice cu cordonatele punctelor date A şi B.

Ecuaţia (2) a lănţişorului ia o formă mult mai simplă dacă mutăm axele paralel cu ele însăşi într'un anumit punct O′, situat pe verticala punctului celui mai de jos, C, al curbei.

Pentru punctul C avem $\frac{dy}{dx} = o$ şi prin urmare, potrivit ecuaţiei (1):

$$\frac{fx}{c} + \alpha = -\frac{fx}{c} - \alpha \qquad \text{de unde } x = -\frac{c\alpha}{f}.$$

Să considerăm punctul O′ de cordonate $x_1 = -\frac{c\alpha}{f}$ şi $y_1 = c_1$. Mutând axele paralel cu ele însăşi în acest punct, ecuaţia lănţişorului va deveni, înlocuind în (2) pe y prin $y' + c_1$ şi pe x prin $x' - \frac{c\alpha}{f}$,

$$y' = \frac{c}{2f}\left[e^{\frac{fx'}{c}} + e^{-\frac{fx'}{c}}\right]$$

sau, încă mai simplu, însemnând raportul $\frac{c}{f}$ prin a,

$$y' = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x'}{a}} + e^{-\frac{x'}{a}}\right].$$

Lănţişorul este, după cum se vede, o curbă simetrică în raport de verticala punctului C.

2⁰) *Cablul podurilor suspendate.* Să ne propunem de a determina figura de echilibru a unui fir, care are extremităţile sala fixate şi este supus la forţe elementare verticale, proporţionale cu proecţiile orizontale ale elementelor de arc.

Aşa dar prin ipoteză,

$$X = o, \qquad Y\,ds = -k\,dx, \qquad k \text{ fiind o constantă.}$$

Cu asemenea date, ecuaţiile de echilibru devin:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = o, \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = k\,dx$$

şi deducem prin integraţiune,

$$T\frac{dx}{ds} = c, \qquad T\frac{dy}{ds} = kx + cc'$$

deci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kx}{c} + c'$$

c şi c' fiind două constante arbitrare.

Prima ecuaţie exprimă că şi în cazul de faţă, *componenta orizontală a tensiunei este constantă.*

Integrând pe cea din urmă şi luând ca origină pe unul din punctele fixe, vom avea,

$$y = \frac{k}{2c}x^2 + c'x.$$

Figura de echilibru este deci *o parabolă, al căreia ax este vertical.*

Constantele c şi c' se determină exprimând că curba trece prin celălalt punct fix şi că lungimea ei are o valoare determinată.

Acest caz este acela al cablurilor care susţin podurile zise suspendate, când se consideră ca infinit apropiate unele de altele barele verticale ce susţin tablierul podului şi când se neglijază greutatea cablului.

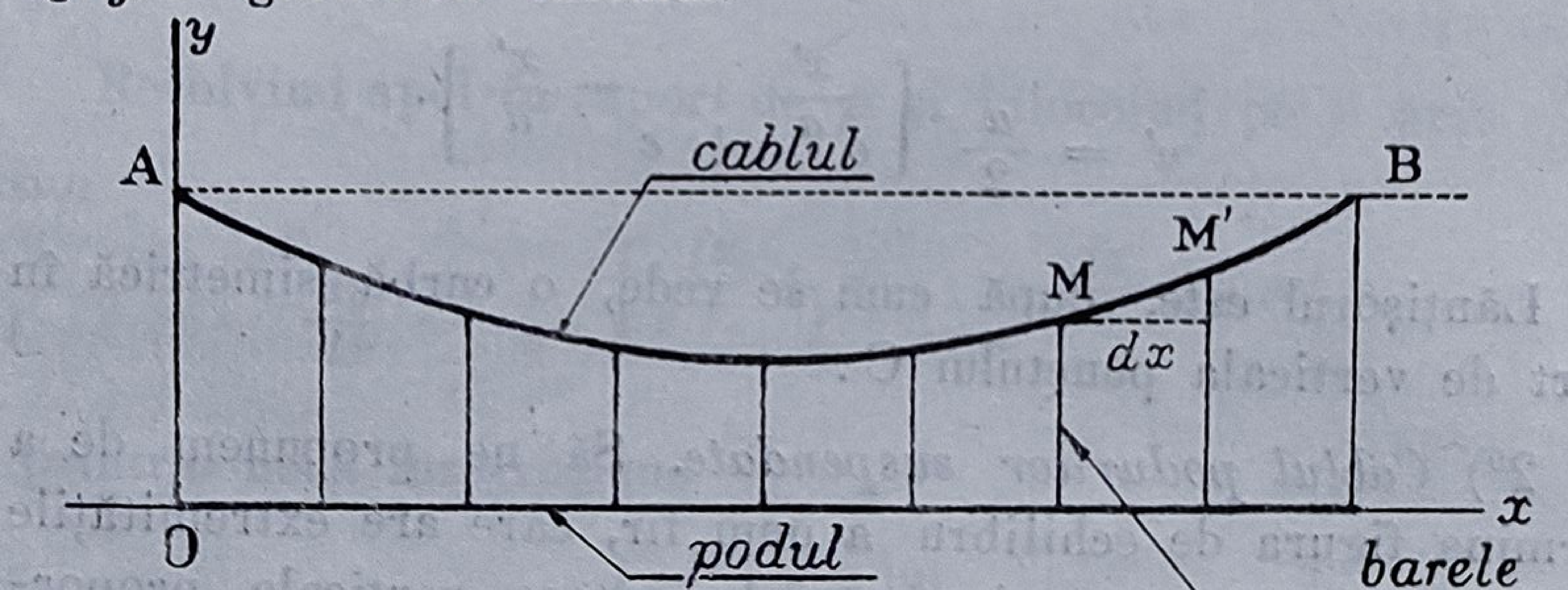


Fig. 130

In realitate, în podurile suspendate, forţele nu sunt repartizate cu continuitate pe toată întinderea cablului ci sunt aplicate într'un număr finit de puncte, ale cărora proecţii orizontale sunt echidistante. Avem atunci un poligon funicular şi se demonstrează că vârfurile acestui poligon se bucură de proprietatea remarcabilă de a fi situate pe o aceiaşi parabolă.

IV. ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE.

I. CONDIŢII DE ECHILIBRU PRIN CONSIDERAŢIA TRAVALIULUI VIRTUAL.

1. **Definiţie**. Se numeşte sistem material un ansamblu de puncte materiale. Potrivit principiilor Dinamicei, două puncte oarecare ale sistemului exercită unul asupra celuilalt acţiuni egale şi direct opuse, zise *forţe interioare*, spre deosebire de *forţele zise exterioare* care emană dela alte sisteme materiale.



Fig. 131

Forţele interioare sunt deci egale două câte două. Vectorul lor rezultant, ca şi momentul lor în raport de un punct, sunt în consecinţă nuli.

Travaliul lor nu este însă nul decât în cazul particular când distanţele dintre puncte rămân invariabile. Fie în adevăr A′ şi B′ poziţiile pe care le iau 2 puncte A şi B, după un timp infinit de mic, sub efectul forţelor interioare şi exterioare care lucrează în A şi B. Să calculăm pentru deplasările AA′ şi BB′ travaliul datorit forţelor interioare.

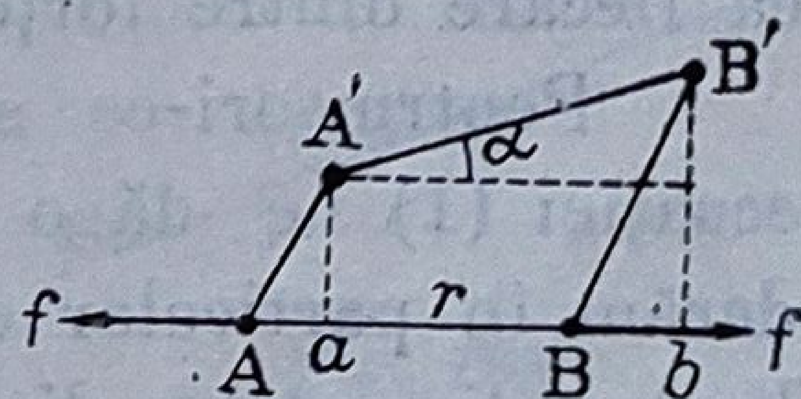


Fig. 132

Avem

$$d\mathfrak{T} = -f \,.\, Aa + f \,.\, Bb = f\,(Bb - Aa)\,.$$

Insă

$$Bb - Aa = (Bb + aB) - (Aa + aB) = ab - AB$$

deci

$$d\mathfrak{T} = f(ab - AB).$$

Pe de altă parte însă, *ab* fiind egal cu $A'B' \cos\alpha$ şi $\cos\alpha$ diferind de unitate printr'un infinit mic de ordinul al doilea, avem, păstrând numai infiniţii mici de ordinul I[iu]: $ab = A'B' = AB + dr$, însemnând prin *dr* creşterea elementară a lungimei AB. Aşa dar

$$d\mathfrak{T} = f\,dr.$$

Se vede astfel că travaliul celor două forţe interioare nu este nul decât dacă avem $dr = o$, adică $r = AB = const.$

Forţele interioare şi exterioare care lucrează asupra unui punct, dau împreună o rezultantă F, zisă *forţă direct aplicată*.

2. **Sistem material liber.** Când punctele sistemului nu sunt supuse la nici un fel de obligaţiuni, *sistemul este zis liber*. Condiţia necesară şi suficientă pentru echilibru este atunci ca fiecare punct în parte să fie în echilibru, deci ca fiecare forţă direct aplicată să fie nulă.

Mai putem zice, că pentru echilibru, este necesar şi suficient ca travaliurile forţelor direct aplicate să dea o sumă nulă pentru orice deplasare virtuală a punctelor:

$$\delta\mathfrak{T} = \Sigma F \delta s \cos(F, \delta s) = o. \qquad (1)$$

In adevăr, dacă există echilibru, avem $F = o$ pentru fiecare din puncte şi prin urmare $\delta\mathfrak{T} = o$, iar dacă avem $\delta\mathfrak{T} = o$, ori care ar fi diferiţii δs şi deci diferiţii $\delta s \cos(F, \delta s)$, trebue ca fiecare dintre forţele F să fie nulă.

Pentru ori-ce sistem de deplasări imaginate, aplicaţia ecuaţiei (1) ne dă o condiţie *necesară* de echilibru. Să considerăm în particular deplasările acelea care păstrează invariabilitatea distanţelor dintre puncte. Sistemul este atunci un solid invariabil şi aplicaţia ecuaţiei (1) nu ne poate conduce decât la cele 6 ecuaţii de echilibru cunoscute [1]). Aceasta rezultă de altfel în mod direct din faptul că dacă un sistem material este

---

[1]) Vom stabili aceasta la capitolul următor.

în echilibru, nimic nu ne împiedecă de a-l considera ca fiind şi solidificat în poziţia lui de echilibru. In cele 6 ecuaţii de echilibru, nu vor figura însă forţele interioare, căci atât proecţiile lor pe 3 axe cât şi momentele lor în raport de un punct sunt nule. De aci următoarea teoremă:

Teoremă. *Pentru ca un sistem de puncte materiale să fie în echilibru, este necesar ca forţele exterioare care lucrează asupra punctelor sistemului, să verifice cele 6 ecuaţii de echilibru ale solidelor invariabile.*

3. **Sisteme materiale cu legături**. Se numesc astfel sistemele în care unele dintre puncte pot fi supuse la obligaţiunea de a rămâne fixe, altele la obligaţiunea de a păstra între ele o distanţă invariabilă, altele la condiţia de a rămâne pe anumite curbe sau anumite suprafeţe, şi în sfârşit altele, formând solide invariabile, care să fie obligate de a rămâne în contact, toate aceste categorii de obligaţii putând a fi şi combinate între ele. Exemplu: două puncte materiale obligate de a păstra între ele o distanţă invariabilă şi obligate de a rămâne unul pe o curbă şi altul pe o suprafaţă determinate.

Diversele obligaţii impuse punctelor pot fi înlocuite prin forţe de direcţii şi intensităţi convenabile.

Astfel, obligaţia de fixitate a unui punct poate fi înlocuită printr'o forţă aplicată punctului care să echilibreze pe toate forţele ce lucrează asupra lui.

Dacă două puncte A şi B sunt obligate de a păstra între ele o distanţă invariabilă, putem realiza această condiţie aplicând în A şi B două forţe egale şi direct opuse F, F′ de intensitate convenabilă şi îndreptate după cum arată figura sau în sens contrariu[1]).

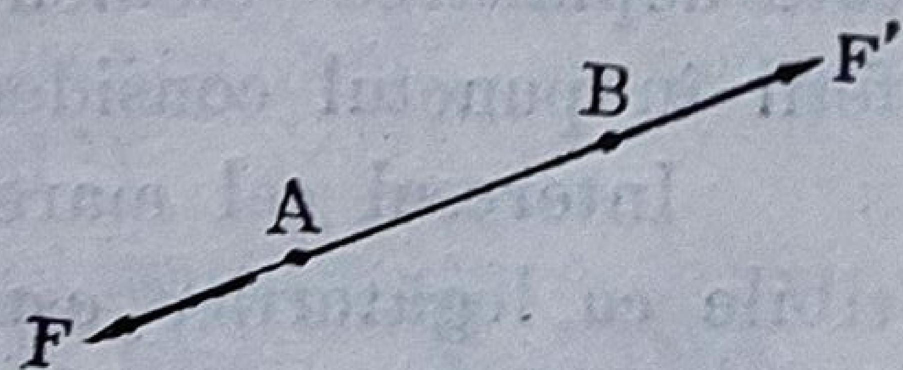


Fig. 133

[1]) Putem în adevăr a ne imagina că între punctele A şi B am intercalat o linie materială rigidă AB, care împiedecă punctele de a se apropia sau a se depărta unul de altul. Forţele F şi F′ vor reprezenta atunci acţiunile liniei AB asupra celor 2 puncte.

Dacă un punct este obligat de a rămâne pe o curbă sau pe o suprafaţă, ştim că putem înlocui această condiţie prin introducerea unei forţe normală suprafeţii sau curbei, care reprezintă acţiunea curbei sau suprafeţii asupra punctului.

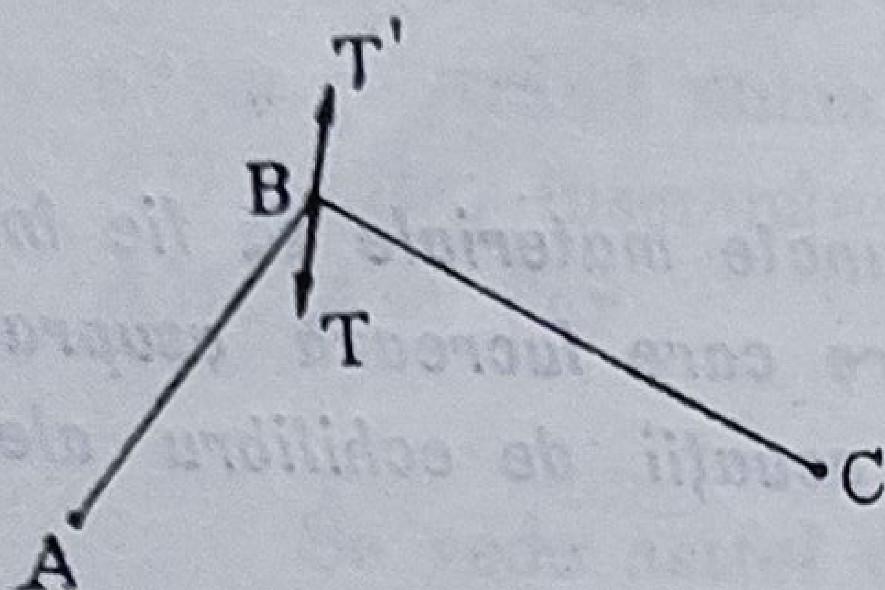


Fig. 134

Dacă două solide, cum spre exemplu, două bare AB şi BC sunt obligate de a rămâne în contact în punctul B, aceasta revine a zice că ele sunt articulate în punctul B şi articulaţia revine, după cum s'a mai spus, la două forţe T şi T', egale şi direct opuse, aplicate celor 2 bare la extremităţile lor din B.

Dacă, însfârşit, două solide S şi S' sunt în contact tangenţial unul cu altul, acest contact poate fi menţinut prin introducerea a două forţe N şi N' normale planului tangent comun, egale şi direct opuse, aplicate în punctul de contact, şi lucrând, una asupra unuia dintre solide, iar cealaltă asupra celuilalt solid.

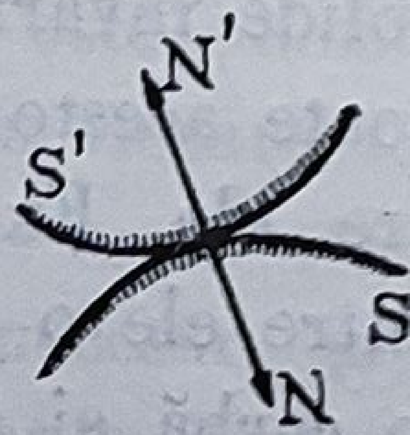


Fig. 135

Toate aceste forţe, prin care se pot înlocui obligaţiile impuse punctelor, sunt zise *forţe de legătură*.

Deplasări compatibile cu legăturile. Se numesc astfel, deplasările elementare care ţin seama de obligaţiunile impuse punctelor. Astfel, deplasarea compatibilă cu legătura, a unui punct M obligat de a rămâne pe o suprafaţă S, este deplasarea elementară a lui M în planul tangent suprafeţii în punctul considerat.

Interesul cel mare pe care-l prezintă deplasările compatibile cu legăturile, este, că în aceste deplasări, travaliul forţelor de legătură este nul.

In adevăr:

a) Dacă un punct este fix, travaliul forţei de legătură aplicată în acel punct este evident nul.

b) Dacă două puncte A şi B trebue să rămână la o distanţă invariabilă unul de altul, travaliul celor două forţe de legătură într'o deplasare elementară compatibilă cu legătura,

adică într'o deplasare în care lungimea AB rămâne constantă, este nul, potrivit formulei $d\mathfrak{T} = f\,dr$ în care $r = AB = const.$

c) Ştim de asemenea că în deplasarea elementară a unui punct pe o curbă sau pe o suprafaţă, travaliul acţiunii curbei sau suprafeţii asupra punctului este tot nul.

d) Dacă două solide, cum spre exemplu două bare AB şi BC sunt articulate în B, travaliul forţelor de legătură T şi T′, amândouă aplicate la extremităţile barelor din punctul B, este nul, în orice deplasare în care B rămâne punct de contact, forţele T şi T′ fiind egale şi direct opuse.

e) Să considerăm însfârşit cazul când două solide invariabile S şi S′ sunt obligate de a rămâne în contact tangenţial unul cu altul. Fie A, punctul de contact actual, N şi N′ reacţiunile normale egale şi direct opuse ale solidelor, A_1 şi A'_1 poziţiile ce ocupă punctul A după o deplasare elementară când solidele vin în S_1 şi S'_1 şi se ating atunci în punctul B. Neglijând infiniţii mici de ordinul al II-lea, punctele A_1 şi A'_1 pot fi considerate ca fiind situate amândouă în planul tangent din B. Ori, pe de altă parte, cele două planuri tangente din A şi din B fac între ele un unghiu infinit de mic, aşa că, în definitiv, punctele A_1 şi A'_1 pot fi considerate ca situate amândouă în planul tangent din A. Însă în asemenea condiţie, proecţiile deplasărilor AA_1 şi AA'_1 pe direcţia comună a forţelor N şi N′ este fiecare nulă şi prin urmare travaliul acestor forţe este şi el nul [1]).

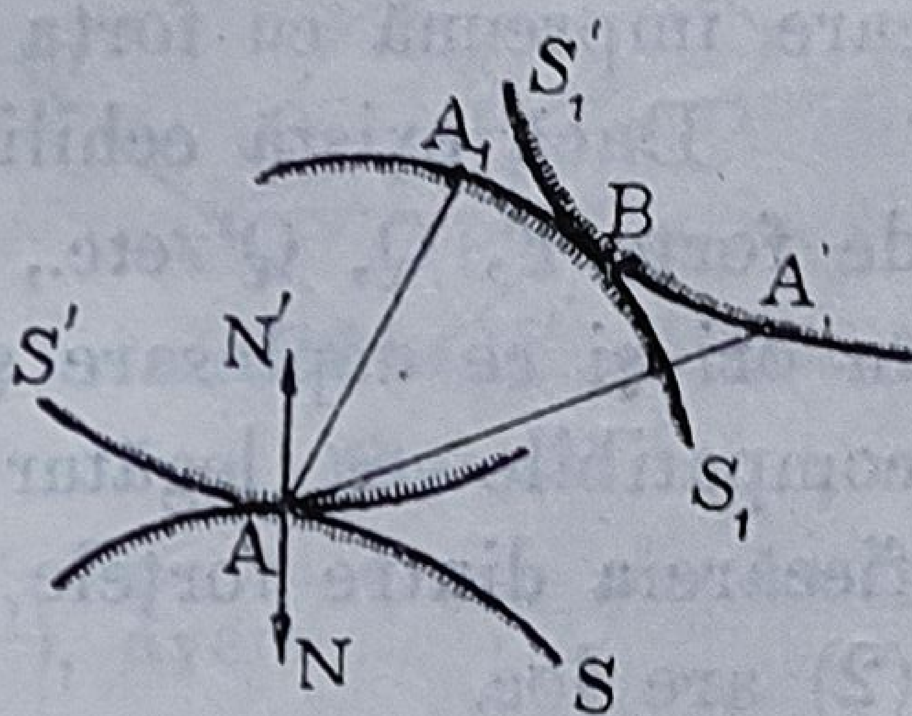


Fig. 136

Condiţii de echilibru. Dacă înlocuim obligaţiile prin forţe putem zice, ca şi pentru sistemele materiale libere, că condiţia necesară şi suficientă pentru echilibru, este ca suma travaliurilor tuturor forţelor care lucrează asupra sistemului să fie nulă, pentru ori ce deplasare virtuală a punctelor sale. Sub această

---

[1]) Când se evaluează travaliul elementar, se urmăreşte deplasarea elementară *a punctului material* de aplicaţie al forţei, iar *nu a punctului geometric* care devine succesiv punct de aplicaţie.

formă, teorema travaliului virtual nu ne-ar fi însă de nici un folos, căci nu se cunosc valorile forţelor de legătură. Teorema *care elimină forţele de legătură* şi ne dă condiţia de echilibru este cea următoare:

Teoremă. ***Condiţia necesară şi suficientă pentru echilibrul unui sistem material cu legături, este ca suma travaliurilor forţelor direct aplicate, în deplasările virtuale ale sistemului, compatibile cu legăturile, să fie nulă,*** adică

$$(2) \qquad \delta \mathfrak{T} = \Sigma \, F \, \delta s \cos (F, \delta s) = 0$$

în care F reprezintă *numai forţe direct aplicate* şi δs deplasările virtuale compatibile cu legăturile.

Necesar. In adevăr, fie, Q, Q′, etc., forţele de legătură care împreună cu forţa F, lucrează asupra unui punct.

Dacă există echilibru, suma travaliurilor tuturor grupurilor de forţe F, Q, Q′ etc., care lucrează asupra punctelor, este nulă în ori şi ce deplasare şi prin urmare şi în deplasările virtuale compatibile cu legăturile. Insă în acestea din urmă, travaliul fiecăreia dintre forţele Q, Q′, etc., este nul. Aşa dar egalitatea (2) are loc.

Suficient. Să presupunem că egalitatea (2) are loc. Dacă, în asemenea condiţie, sistemul, *presupus în stare iniţială de repaus*, nu rămâne în echilibru, el se va pune în mişcare sub acţiunea forţelor ce lucrează asupra punctelor sale. Fie, ca mai sus, F, Q, Q′ etc. forţele care lucrează asupra unuia din puncte şi w acceleraţia pe care o dă punctului rezultanta lor. Cum viteza iniţială este nulă, w este acceleraţie tangenţială. Punctul se va mişca potrivit legăturilor, în direcţia lui w. Pentru a împiedeca mişcarea, va fi suficient să aplicăm punctului o forţă $-mw$.

Sistemul fiind atunci în echilibru, să-i dăm o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile. In această deplasare, suma travaliurilor tuturor grupurilor de forţe F, Q, Q′, etc. şi $-mw$, care lucrează asupra punctelor sistemului, este nulă. Insă deplasarea fiind compatibilă cu legăturile, travaliul fiecăreia dintre forţele Q, Q′, etc. este nul şi pe de altă parte şi travaliul for-

ţelor F este nul, potrivit ipotezei iniţiale (egalitatea (2). (Rezultă deci că travaliul forţelor $-mw$ este nul, adică $\Sigma(-mw\delta s) = o$. Cum fiecare termen din Σ este o cantitate negativă, suma lor nu poate fi nulă decât dacă fiecare w în parte este nul, ceea ce conduce la egalitatea $v = o$, căci w fiind acceleraţie tangenţială, dacă $w = o$ avem $v = const.$ adică $v = o$ ca la începutul mişcării. Deci punctele nu se mişcă din loc şi sistemul este prin urmare în echilibru.

Aplicaţii. 1). Să reluăm problema cu bara AB sprijinită pe două planuri înclinate (pag. 178).

Mişcarea elementară a barei AB, compatibilă cu legăturile, este o rotaţiune în jurul centrului instantaneu C. In această rotaţiune, punctul D de la mijlocul barei descrie un element DD′ perpendicular pe raza CD. Condiţia necesară şi suficientă pentru echilibru fiind ca travaliul forţei P în deplasarea DD′ să fie nul[1]), avem

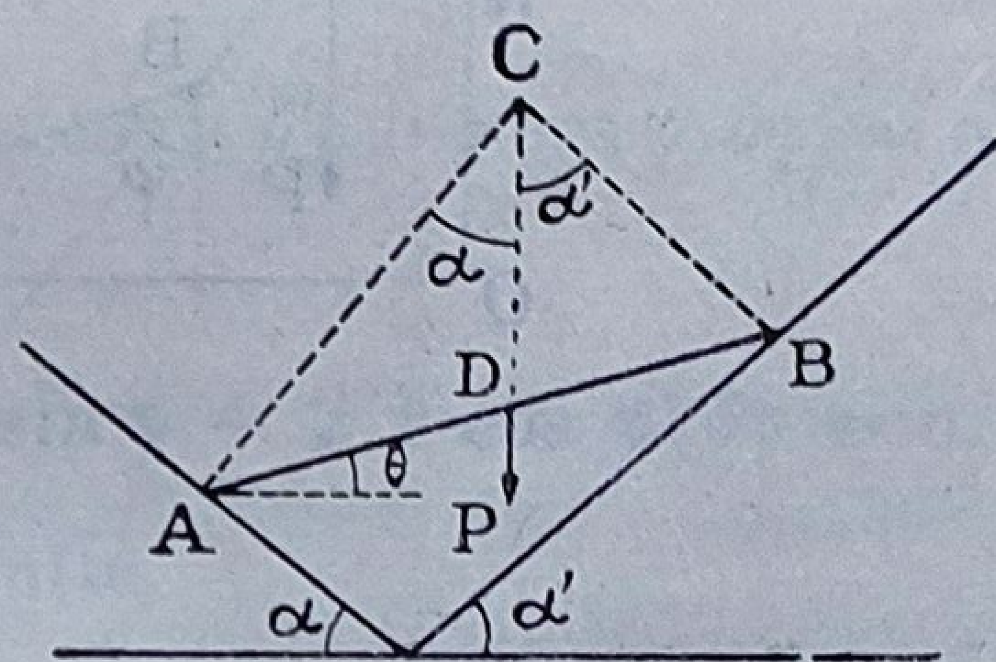


Fig. 137

$$P.\ DD' \cos(P, DD') = o$$

de unde

$$\cos(P, DD') = o$$

deci elementul DD′ trebue să fie perpendicular pe direcţia forţei P şi în consecinţă dreapta CD să aibe aceiaşi direcţie ca forţa. Presupunând aceasta realizat, se obţine, ca la pag. 179:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2\sin\alpha\ .\ \sin\alpha'}.$$

Acest exemplu ne arată că teorema travaliului virtual, *sub forma ei geometrică*, nu ne dă decât condiţia de echilibru. Acţiunile din punctele A şi B ale planurilor înclinate asupra barei, se vor determina prin consideraţiile obişnuite asupra

---

[1]) Forţele interioare dau un travaliu nul, bara fiind un solid de formă invariabilă.

echilibrului sistemelor invariabile, descompunându-se forţa P, strămutată în C, în două componente pe direcţiile CA şi CB. Acţiunile N şi N′ vor fi egale şi direct opuse acestor componente.

2). Să reluăm şi problema dela pag. 184 cu echilibrul celor două bare articulate.

Avem, după cum s'a mai spus:

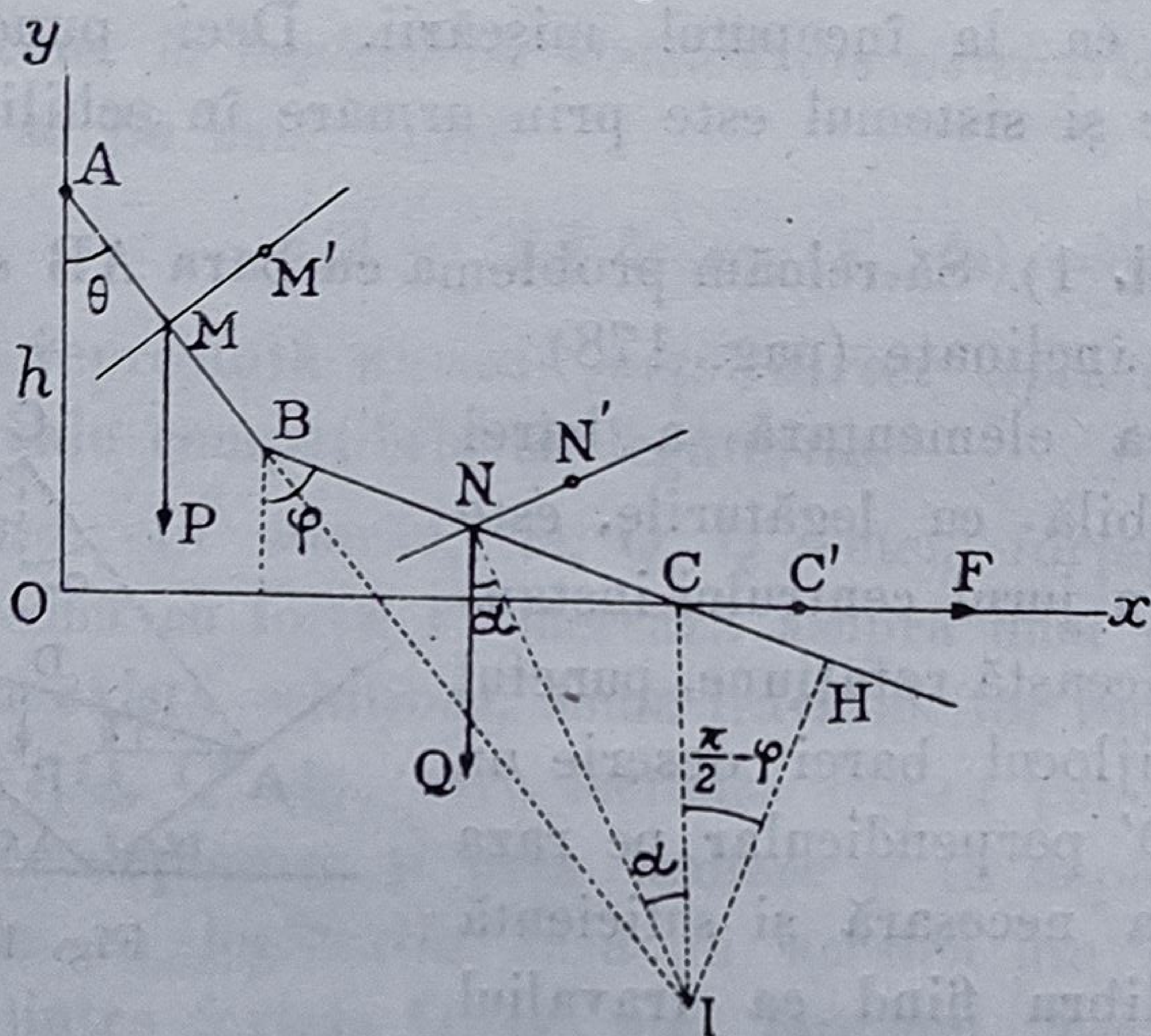


Fig. 138

$$AB = a, \qquad BC = b, \qquad h = a \cos\theta + b \cos\varphi.$$

Trebue să exprimăm că travaliul forţelor P, Q şi F în deplasările virtuale, compatibile cu legăturile, ale punctelor de aplicaţie M, N şi C ale acestor forţe, este nul.

Ori, deplasarea MM′ este perpendiculară pe AM şi egală cu $\frac{a}{2}\,\delta\theta$. Deplasarea NN′ este perpendiculară pe IN, punctul I fiind centrul instantaneu de rotaţie al dreptei BC[1]), şi are ca expresie $IN.\,\delta\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ variaţia de direcţie a dreptei BC fiind egală cu variaţia de direcţie a perpendicularei IH dusă din I pe această dreaptă. Insfârşit, deplasarea virtuală CC′ este evident egală cu $\delta\,(a \sin\theta + b \sin\varphi)$ adică cu $a \cos\theta\,\delta\theta + b \cos\varphi\,\delta\varphi$.

---

[1]) *Cinematica*, pag. 102.

In consecinţă, condiţia de echilibru este:

$$P.\frac{a}{2}\,\delta\theta.\ \cos(MP, MM') - Q.\,IN\,\delta\varphi.\ \cos(NQ, NN') + F.(a\cos\theta\,\delta\theta + b\cos\varphi\,\delta\varphi) = 0.$$

Insă, după cum se vede pe figură,

$$\cos(MP, MM') = -\sin\theta, \qquad \cos(NQ, NN') = -\sin\alpha$$

iar pe de altă parte, din triunghiul ICN avem

$$IN\sin\alpha = \frac{b}{2}\sin\varphi$$

aşa încât condiţia de echilibru devine

$$-P\frac{a}{2}\sin\theta\,\delta\theta + Q\frac{b}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi + F(a\cos\theta\,\delta\theta + b\cos\varphi\,\delta\varphi) = 0$$

sau

$$(1)\qquad a(2F\cos\theta - P\sin\theta)\,\delta\theta + b(Q\sin\varphi + 2F\cos\varphi)\,\delta\varphi = 0.$$

Intre $\delta\theta$ şi $\delta\varphi$ avem de altfel relaţia

$$(2)\qquad a\sin\theta\,\delta\theta + b\sin\varphi\,\delta\varphi = 0$$

care se obţine diferenţiând pe $h = a\cos\theta + b\cos\varphi$.

Eliminând pe $\delta\theta$ şi $\delta\varphi$ între (1) şi (2) găsim

$$(P + Q)\sin\theta.\ \sin\varphi = 2F\sin(\varphi - \theta)$$

rezultat cunoscut.

II. ECUAŢII DE ECHILIBRU.

1. **Generalităţi.** In mod analitic, legăturile se exprimă prin relaţiuni între cordonatele punctelor sistemului.

Fie n numărul de puncte. Sistemul va fi supus la legături dacă între cele $3n$ cordonate există k ecuaţiuni:

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0,\quad \ldots,\quad f_k = 0.$$

Numărul k este totdeauna mai mic decât $3n$, căci altfel cele $3n$ cordonate ar fi fixe.

Să punem $3n - k = r$. Numărul r măsoară gradul de libertate pe care legăturile îl lasă sistemului. Sistemul este

complect liber când r este egal cu $3n$; el este complect fix când r este egal cu zero. Dacă r este egal cu 1, adică dacă există $3n-1$ ecuaţii de legătură, se zice că sistemul este cu *legături complecte*. In acest caz, cele $3n$ cordonate se exprimă în funcţie de un singur parametru; toate punctele sunt deci obligate de a se mişca pe curbe determinate şi mişcarea unuia singur dintre ele determină mişcările tuturor celorlalte. Astfel este cazul maşinilor zise simple, ca: pârghia, scripetele, vârtejul, etc.

2. **Ecuaţii de echilibru.** Fie n numărul de puncte al sistemului; x, y, z cordonatele unuia oarecare dintre puncte; X, Y, Z componentele pe trei axe dreptunghiulare a rezultantei forţelor ce sunt direct aplicate punctului considerat şi

$$(1) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \quad \ldots, \qquad f_k = 0$$

cele k ecuaţii de legătură [1]).

Condiţia necesară şi suficientă pentru echilibru este, potrivit capitolului precedent,

$$(2) \qquad \Sigma\,(X\,\delta x + Y\delta y + Z\,\delta z) = 0$$

variaţiile cordonatelor trebuind să satisfacă celor k ecuaţii:

$$\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,\delta z\right) = 0$$

$$(3) \qquad \Sigma\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z}\,\delta z\right) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f_k}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f_k}{\partial z}\,\delta z\right) = 0.$$

Putem trage din cele k ecuaţii (3) valorile a k variaţii în funcţie de celelalte $3n-k$ şi substituind acele valori în ecuaţia (2) aceasta nu va mai conţine decât $3n-k$ variaţii, care vor trebui privite ca arbitrare, aşa că coeficienţii lor vor trebui fiecare în parte egalaţi cu zero.

[1]) De fapt, legăturile nu pot uneori să fie exprimate prin ecuaţii, ci prin inegalităţi. Exemplu: obligaţia unui punct de a rămâne în interiorul unei suprafeţe închise. Noi vom excepta însă asemenea cazuri.

Egalând cu zero acei coeficienţi, obţinem $3n - k$ ecuaţii, care alăturate celor k ecuaţii de legătură (1), determină valorile celor $3n$ cordonate ale punctelor care corespund poziţiei de echilibru.

Metoda multiplicatorilor. Calculele sunt mult mai simetrice prin utilizarea următoarei metode, datorită lui *Lagrange*.

Să adunăm ecuaţia (2) cu ecuaţiile (3) înmulţite respectiv cu factorii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$; obţinem

$$\sum\left(X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x}\right)\delta x +$$
$$\sum\left(Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y}\right)\delta y +$$
$$\sum\left(Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}\right)\delta z = 0\,.$$

Această ecuaţie trebue să aibe loc pentru toate deplasările compatibile cu legăturile. Ori, putem profita de nedeterminarea factorilor λ pentru a anula k din cele $3n$ variaţii care intră în această ecuaţie. Rămân atunci $3n - k$ variaţii şi aceste variaţii fiind arbitrare, coeficienţii lor trebue să fie nuli. In definitiv, suntem astfel conduşi de a anula pe toţi cei $3n$ coeficienţi ai ecuaţiei precedente şi obţinem prin aceasta un sistem de $3n$ ecuaţii, dintre care trei, raportându-se la unul oarecare dintre punctele sistemului, au forma următoare:

$$X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} = 0$$
$$(4) \qquad Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} = 0$$
$$Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} = 0\,.$$

Cele $3n$ ecuaţii împreună cu cele k ecuaţii de legătură,

$$(5) \qquad f_1 = 0\,, \quad f_2 = 0\,, \quad \ldots\,, \quad f_k = 0$$

formează un sistem de $3n + k$ ecuaţii la care trebue să satisfacă cele $3n + k$ necunoscute, constituite de cele $3n$ cordonate şi cei k multiplicatori λ.

Calculul forţelor de legătură. Metoda precedentă ne dă şi forţele de legătură. In adevăr, ecuaţiile (4) sunt acelea ale echilibrului unui punct liber care ar fi solicitat pe de o parte de forţa direct aplicată de componente X, Y, Z iar pe de altă parte de o forţă având drept componente

$$
\begin{aligned}
X' &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \\
Y' &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \qquad (6) \\
Z' &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} .
\end{aligned}
$$

Expresiunile acestea sunt deci acelea ale forţei totale de legătură care lucrează asupra punctului de cordonate x, y, z. Termenii

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

reprezintă componentele forţei de legătură care lucrează asupra punctului considerat, în virtutea legăturei $f_1 = 0$ şi de asemenea pentru termenii următori.

3. **Notă.** Fie ca mai sus $k + r = 3n$. Putem să alăturăm celor k ecuaţii de legătură

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0$$

un sistem de r alte ecuaţii, absolut arbitrare, între cordonatele punctelor,

$$F_1 = q_1, \quad F_2 = q_2, \quad \ldots, \quad F_r = q_r$$

şi să rezolvăm apoi toate aceste ecuaţii, în număr de $k + r = 3n$, în raport cu cele $3n$ cordonate ale punctelor. Vom obţine atunci expresiuni de forma

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_r) \\
y &= \theta(q_1, q_2, \ldots, q_r) \qquad (7) \\
z &= \psi(q_1, q_2, \ldots, q_r).
\end{aligned}
$$

Dând celor r parametri $q_1, q_2, \ldots, q_r$ creşteri absolut

oarecare, creşterile care vor rezulta pentru cordonatele x, y, z vor corespunde totdeauna unei deplasări compatibilă cu legăturile, şi vom avea

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \delta q_r$$

$$\delta y = \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \theta}{\partial q_r} \delta q_r$$

$$\delta z = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial q_r} \delta q_r \, .$$

Purtând aceste valori în ecuaţia

$$\Sigma (X \, \delta x + Y \, \delta y + Z \, \delta z) = 0$$

rezultatul se va prezenta sub forma

$$Q_1 \, \delta q_1 + Q_2 \, \delta q_2 + \ldots + Q_r \, \delta q_r = 0$$

şi această ecuaţie urmând a fi satisfăcută ori care ar fi variaţiile δq_1, $\delta q_2, \ldots$, δq_r, va trebui să avem, în acelaşi timp,

$$Q_1 = 0 \, , \quad Q_2 = 0 , \ldots , \quad Q_r = 0 \, .$$

Aceste r ecuaţii vor determina valorile celor r parametri q care corespund poziţiei de echilibru. Ecuaţiile (7) ne vor da apoi valorile respective ale cordonatelor x, y, z.

4. Aplicaţii. a). *Echilibrul unui solid liber.* Intr'un solid, legările consistă în aceea că distanţele dintre puncte rămân invariabile. Deplasările compatibile cu legăturile sunt deci toate deplasările ce poate lua un solid invariabil. Ori şi care dintre aceste deplasări echivalează însă cu o translaţie identică cu aceia a unuia din punctele solidului, fie acesta O, şi o rotaţie în jurul unui ax trecând prin punctul O, pe care îl vom lua ca origină a unui sistem de 3 axe cordonate dreptunghiulare. Translaţia se poate descompune în 3 translaţii în lungul axelor cordonate şi rotaţia în 3 rotaţii în jurul aceloraşi axe.

Fie δa, δb, δc cele 3 translaţii elementare şi $\delta \theta$, $\delta \varphi$, $\delta \psi$ cele trei rotaţii unghiulare elementare în jurul axelor.

Travaliul forţelor direct aplicate în deplasarea considerată (cu eliminarea forţelor interioare al căror travaliu este nul din cauza invariabilităţii distanţelor dintre puncte) este egal cu suma travaliurilor din cele 6 deplasări componente. Ori, pentru unul oarecare dintre puncte, travaliul rezultantei forţelor direct apli-

cate (X, Y, Z) este egal cu $X\,\delta a$ în translaţia paralelă cu Ox, cu $Y\,\delta b$ în translaţia paralelă cu Oy şi $Z\,\delta c$ în translaţia paralelă cu Oz.

Ştim pe de altă parte, că travaliul elementar al unei forţe într'o rotaţie este egal cu momentul forţei în raport cu axul de rotaţie multiplicat cu unghiul elementar de rotaţie [1]). Deci, cele 3 rotaţii dau respectiv ca travaliuri:

$$(yZ - zY)\,\delta\theta, \quad (zX - xZ)\,\theta\varphi, \quad (xY - yX)\,\delta\psi.$$

In consecinţă, condiţia necesară şi suficientă pentru echilibru va fi

$$\Sigma\,[X\,\delta a + Y\,\delta b + Z\,\delta c + (yZ - zY)\,\delta\theta + (zX - xZ)\,\delta\varphi + (xY - yX)\,\delta\psi] = o$$

care se scrie, având în vedere că translaţiile δa, δb, δc şi rotaţiile $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ sunt aceleaşi pentru toate punctele,

$$\delta a\,\Sigma X + \delta b\,\Sigma y + \delta c\,\Sigma Z + \delta\theta\,\Sigma\,(yZ - zY) + \delta\varphi\,\Sigma\,(zX - xZ) + \delta\psi\,\Sigma\,(xY - yX) = o. \tag{8}$$

Această egalitate trebue să aibe loc ori care ar fi translaţiile şi rotaţiile considerate. Trebue deci să avem

$$\Sigma X = o, \qquad \Sigma Y = o, \qquad \Sigma Z = o;$$
$$\Sigma\,(yZ - zY) = o, \quad \Sigma\,(zX - xZ) = o, \quad \Sigma\,(xY - yX) = o.$$

Regăsim astfel cele 6 condiţii de echilibru cunoscute.

b). ***Echilibrul unui solid care are un punct fix.*** Să luăm punctul fix ca origină a axelor dreptunghiulare. Translaţiile fiind nule, nu ne rămân în ecuaţia (8) decât rotaţiile în jurul axelor. Anularea lor ne dă ecuaţiile cunoscute

$$\Sigma\,(yZ - zY) = o, \quad \Sigma\,(zX - xZ) = o, \quad \Sigma\,(xY - yX) = o.$$

c). ***Echilibrul unui solid care are două puncte fixe.*** Singura deplasare compatibilă cu legăturile este o rotaţie în jurul dreptei care uneşte cele două puncte. Luând această dreaptă ca ax Oz al unui sistem de axe dreptunghiulare, condiţia necesară şi suficientă pentru echilibru este, potrivit ecuaţiei (8):

$$\delta\psi\,\Sigma\,(xY - yX) = o \quad \text{adică} \quad \Sigma\,(xY - yX) = o$$

rezultat cunoscut.

---

[1]) Pag. 25.

V. ECHILIBRUL SOLIDELOR NATURALE.

Solidele naturale nu sunt absolut rigide. Ele se deformează sub acţiunea forţelor la care sunt supuse, însă, în majoritatea cazurilor, deformaţiunile sunt ca şi neglijabile şi atunci solidele naturale pot fi asimilate solidelor invariabile de care se ocupă Mecanica raţională.

Ceeace nu se poate totuşi niciodată neglija, sunt reacţiunile particulare ce se produc în contactul solidelor naturale, unele cu altele. Studiul acestor reacţiuni conduce la noţiunile *frecării de alunecare* şi *rezistenţei la rostogolire*, de care ne vom ocupa în capitolul de faţă.

I. FRECAREA DE ALUNECARE.

1. Fie un corp greu, prezentând o faţă plană, aşezat pe o masă orizontală. Reacţiunea mesei asupra corpului este o forţă P′, egală şi direct opusă greutăţii P a corpului, aplicată în centrul său de greutate G. Dacă n'ar fi vorba de solide naturale, atunci o forţă orizontală F oricât de mică, aplicată în G, ar determina punerea în mişcare a corpului, care ar fi o alunecare pe suprafaţa mesei.

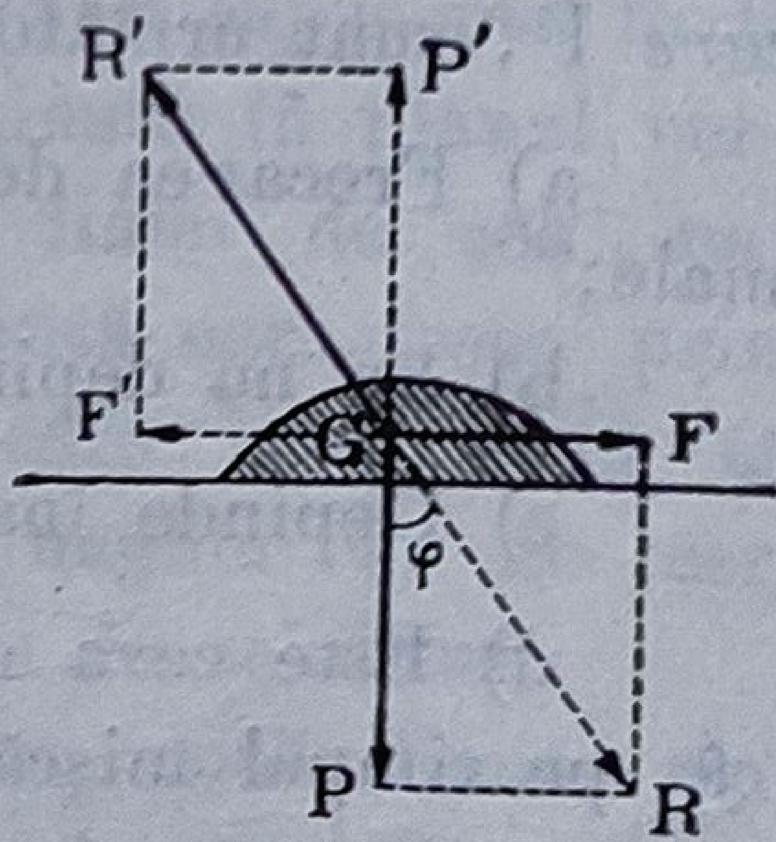


Fig. 139

Experienţa arată însă, că corpul nu se pune în mişcare decât atunci când intensitatea F atinge o anumită valoare. Să considerăm momentul particular când corpul este pe punctul de a eşi din starea de repaus.

In acest moment, există echilibru între forţele P, F şi reacţiunea R′ a mesei asupra corpului. Această reacţiune este deci egală şi direct opusă rezultantei R a celor două forţe P şi F. Ea are o componentă orizontală F′, egală şi direct opusă forţei F, datorită asperităţilor pe care le prezintă cele două suprafeţe în contact şi care pătrunzând unele în altele se opun mişcărei de alunecare.

Această componentă orizontală a lui R′ se numeşte *frecare de alunecare.* Unghiul corespunzător φ, ia numele de *unghiu de frecare.*

In mod mai general, să presupunem corpul solicitat de o forţă Q înclinată de un unghiu θ pe orizontală. Corpul nu va tinde să iasă din starea sa de repaus decât atunci când proecţia orizontală a forţei Q [1]) va deveni egală cu F. Reacţiunea R′ a planului va avea în acel moment o componentă orizontală F′, egală şi direct opusă lui F, şi o componentă verticală N′ egală cu $P - Q \sin\theta$. Forţa N, egală şi direct opusă lui N′, reprezintă în cazul de faţă *presiunea normală* a corpului asupra mesei.

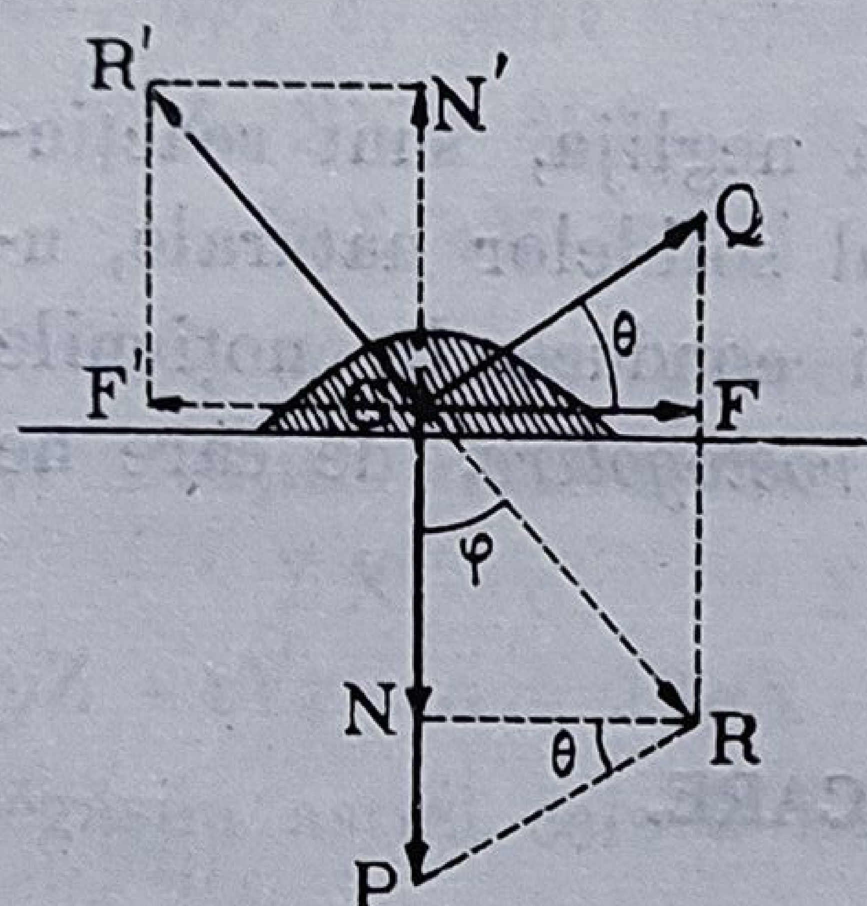


Fig. 140

Experienţa a stabilit, că *legile după care variază frecarea de alunecare* F, sunt următoarele:

a) Frecarea de alunecare este proporţională presiunei normale;

b) Ea nu depinde de mărimea suprafeţelor în contact;

c) Depinde însă de natura acestor suprafeţe;

d) Este ceva mai mare la eşirea din starea de repaus decât pe timpul mişcării efective;

e) Nu depinde de viteza mişcării, afară numai de cazul când viteza devine foarte mare; atunci frecarea se micşorează.

---

1) Proecţie egală de altfel cu aceea a rezultantei R a forţelor P şi Q.

Potrivit acestor legi, avem egalitatea

$$F = f \cdot N$$

factorul de proporţionalitate f depinzând de natura suprafeţelor în contact. Acest factor, zis *coeficient de frecare*, este de altfel egal cu $\operatorname{tg} \varphi$, de oare ce după cum arată figura avem

$$F = N \operatorname{tg} \varphi .$$

Când suprafeţele în contact sunt destul de netede experienţa dă pentru f următoarele valori mijlocii, în dreptul cărora am însemnat şi valorile corespunzătoare ale unghiurílor φ.

Natura corpurilor		Valori f	Valori φ
Lemn pe lemn	*sec*	0,50	$26^0\,30'$
	uns	0,20	$11^0\,20'$
Metal pe metal	*sec*	0,19	$10^0\,50'$
	uns	0,10	$5^0\,40'$
Lemn pe metal	*sec*	0,60	$30^0\,50'$
	uns	0,12	$6^0\,50'$

2. **Aplicaţii.** 1). ***Echilibrul unui punct pe un plan înclinat.*** Fie un corp greu natural, asimilat pentru simplicitate unui punct material M, aşezat pe un plan înclinat pe orizont de unghiul α şi supus unei forţe Q, conţinută în planul vertical al liniei de cea mai mare pantă care trece prin M, cu care linie forţa Q face un unghiu θ. Se cer condiţiile de echilibru.

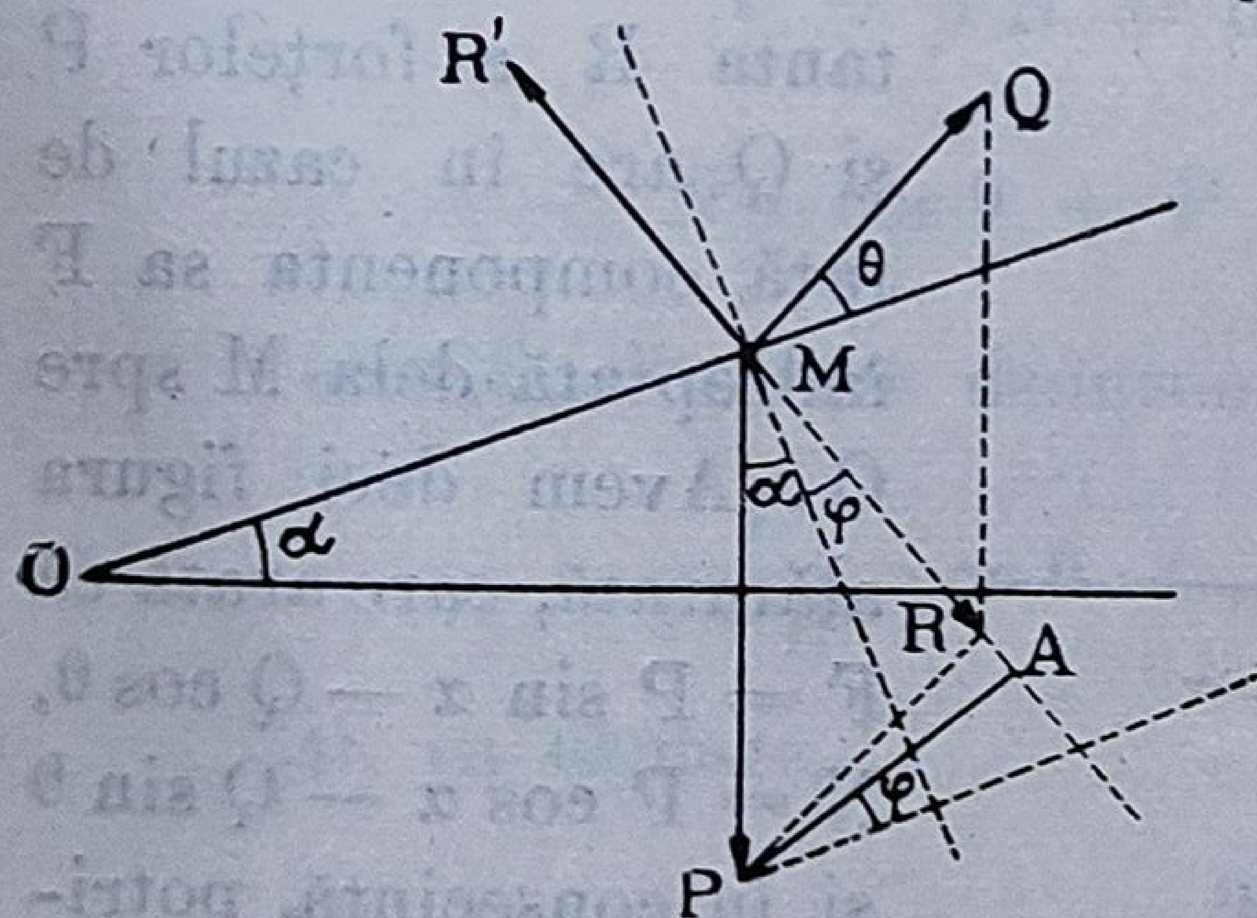


Fig. 141

Sunt două limite de echilibru de considerat:

1^0 Forţa Q este pe punctul de a determina suirea punctului M;

2^0 Forţa Q este pe punctul de a permite coborârea punctului M.

Să luăm cazul întâi. Ruperea echilibrului va avea loc când proecția pe direcția OM a rezultantei R a forțelor P și Q va atinge valoarea frecării de alunecare F. Vom avea atunci

$$F = f N .$$

Ori,

$$F = Q \cos\theta - P \sin\alpha \quad \text{și} \quad N = P \cos\alpha - Q \sin\theta$$

deci

$$Q \cos\theta - P \sin\alpha = f (P \cos\alpha - Q \sin\theta)$$

de unde deducem

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin\alpha + f \cos\alpha}{\cos\theta + f \sin\theta}$$

și, dacă înlocuim pe f prin $\mathrm{tg}\,\varphi$,

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\theta - \varphi)} .$$

Aceasta este condiția de echilibru. Se vede din ea că minimul lui Q corespunde cazului când $\cos(\theta - \varphi) = 1$, adică $\theta = \varphi$. Pe figură, cum direcția MR este invariabilă, minimul lui Q, egal cu minimul segmentului PR, corespunde perpendicularei PA coborîtă pe direcția MR, și PA face cu OM un unghiu egal cu φ.

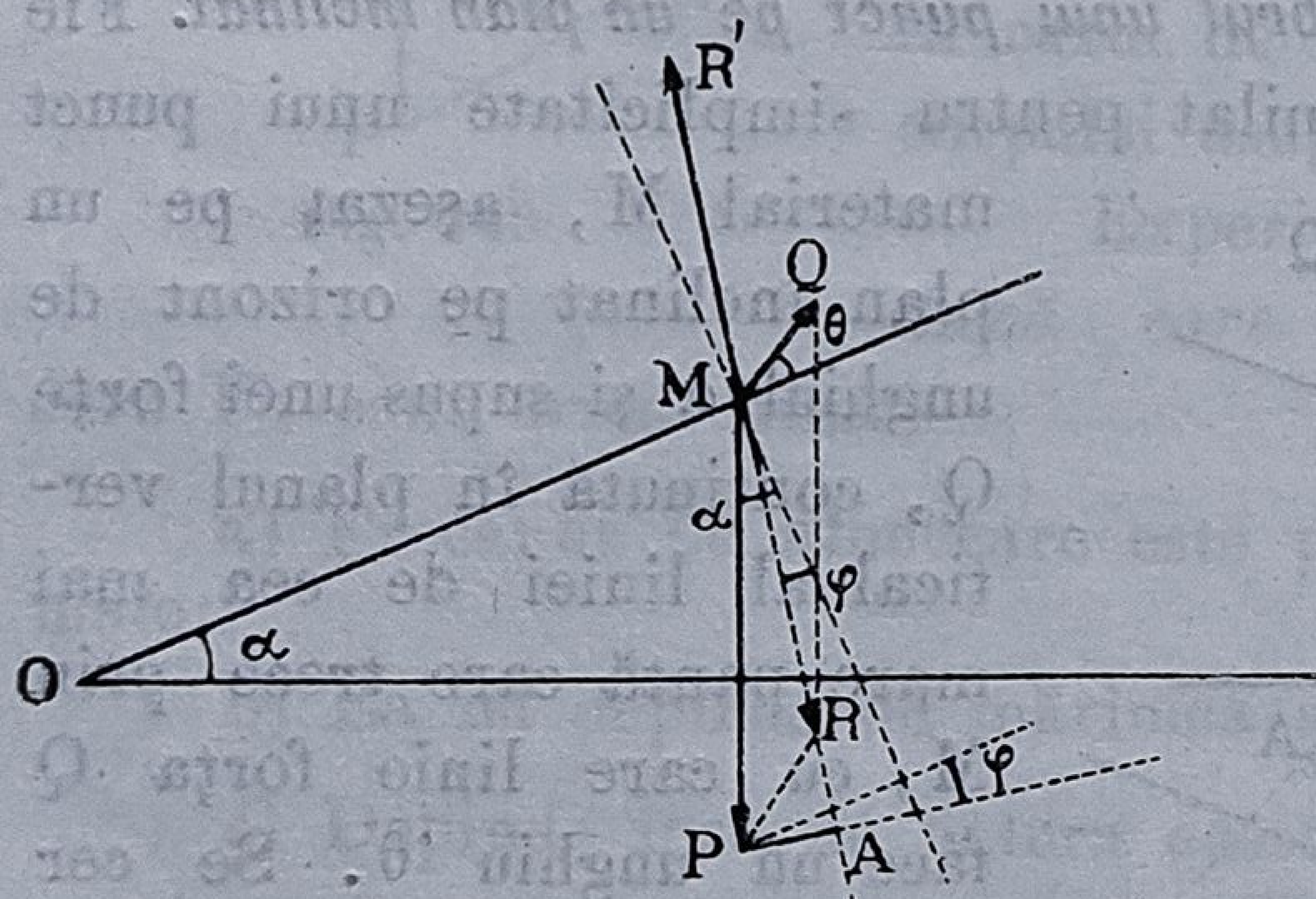


Fig. 142

Să luăm acum cazul al doilea. Rezultanta R a forțelor P și Q are în cazul de față componenta sa F îndreptată dela M spre O. Avem deci figura alăturată, care arată că $F = P \sin\alpha - Q \cos\theta$, $N = P \cos\alpha - Q \sin\theta$ și, în consecință, potrivit legei $F = f N$:

$$P \sin\alpha - Q \cos\theta = f \ (P \cos\alpha - Q \sin\theta)$$

de unde rezultă

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin\alpha - f \cos\alpha}{\cos\theta - f \sin\theta} \qquad \text{sau} \qquad \frac{Q}{P} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\theta + \varphi)}$$

minimul lui Q corespunzând unghiului $\theta = -\varphi$ (pe figură, lungimea perpendicularei PA coborâtă pe MR).

2). ***Echilibrul unei scări.*** Chestiunea echilibrului unei scări răzemată pe o duşumea orizontală şi pe un perete vertical, revine la aceea a echilibrului unei bare de lungime l şi de greutate P, egale cu acelea ale scărei, răzemată pe două axe dreptunghiulare Ox şi Oy, dintre care Oy vertical şi îndreptat în sus.

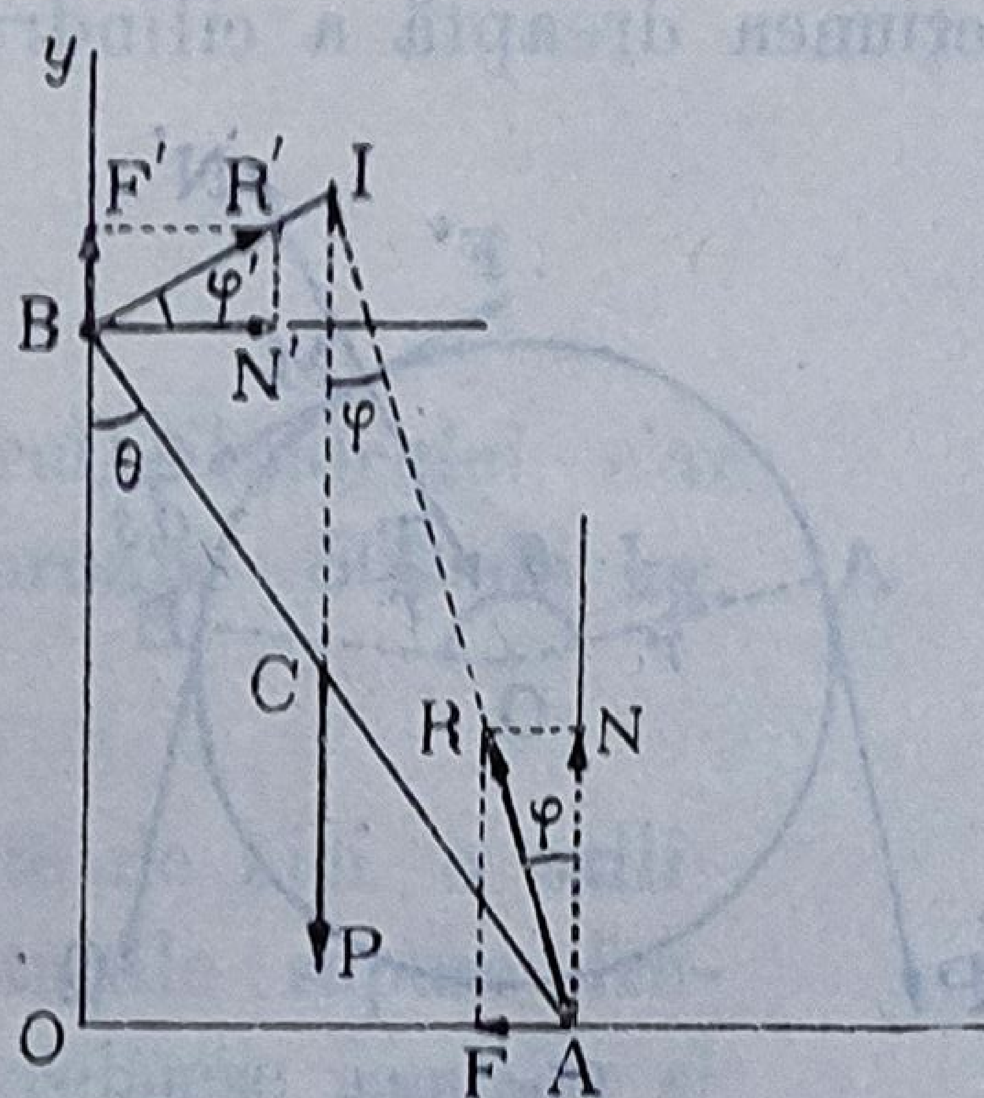


Fig. 143

Fiind vorba de solide naturale, reacţiunile R din A şi R' din B sunt oblice şi au ca componente corespunzătoare frecărilor: $F = fN$, $F' = f'N'$, de direcţii opuse mişcărilor ce tind a se produce şi care corespund bine înţeles căderii scărei.

Condiţia de echilibru fiind aceea ca forţa P să fie egală şi direct opusă rezultantei forţelor R şi R', avem, potrivit teoriei generale, proectând pe axele Ox, Oy şi luând momentele în raport de O:

$$N' - fN = 0 , \qquad f'N' - P + N = 0;$$

$$N'l \cos\theta + P\frac{l}{2}\sin\theta - Nl\sin\theta = 0$$

ecuaţii, din care deducem prin eliminarea lui N şi N':

$$\frac{f}{1+ff'}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{1+ff'}\sin\theta = 0$$

şi, ca urmare,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2f}{1-ff'}.$$

Coeficienţii f şi f' nu sunt egali decât în cazul când duşumeaua şi peretele vertical ar fi constituiţi din acelaşi material. In asemenea caz particular, avem

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2f}{1-f^2} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \operatorname{tg}2\varphi$$

de unde rezultă $\theta = 2\varphi$, după cum se poate constata şi în mod geometric observând că dreptele A I şi B I sunt în cazul considerat perpendiculare una pe alta şi lungimele C A şi C I fiind atunci egale, avem ungh. C A I = ungh. C I A = φ şi prin urmare θ = ungh. B A N = 2φ.

3). ***Echilibrul unei coarde înfăşurată pe un cilindru fix.*** Fie un cilindru de revoluţie de rază r şi o coardă înfăşurată în secţiunea dreaptă a cilindrului, pe o porţiune de arc A B, coarda fiind solicitată de o forţă P şi de o rezistenţă Q. Să considerăm momentul când rezistenţa Q este pe punctul de a învinge acţiunea forţei P combinată cu aceea a frecării coardei pe cilindru.

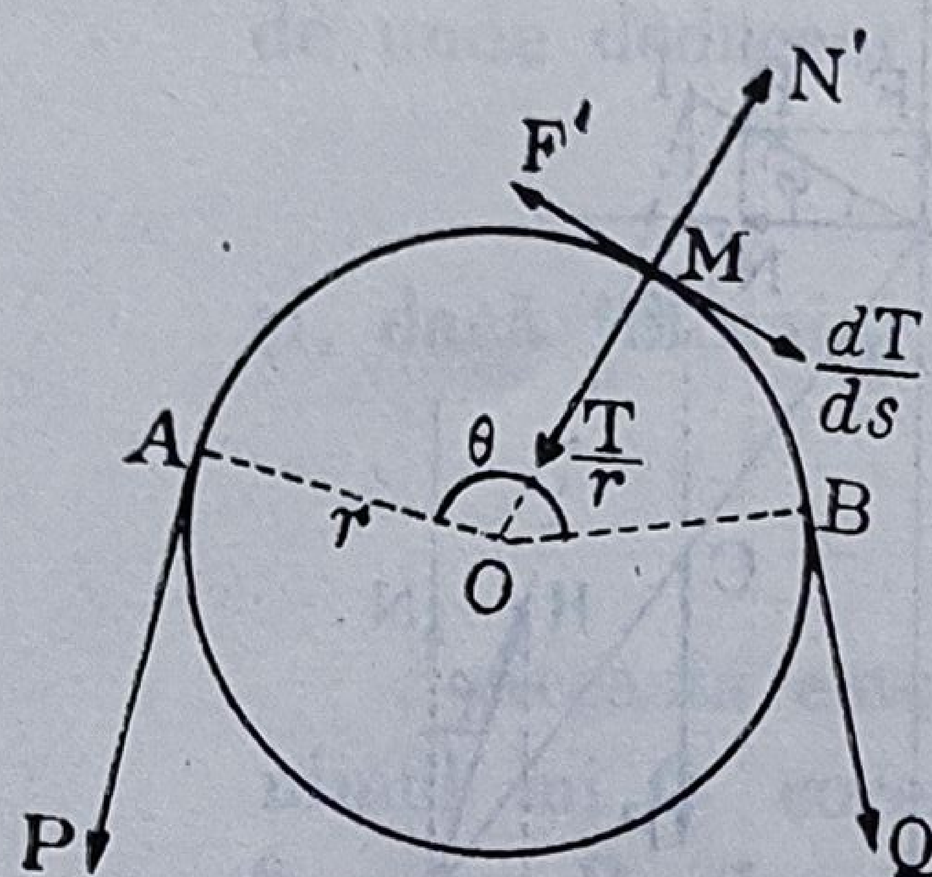


Fig. 144

In acel moment, dacă neglijem greutatea coardei, atunci într'un punct M există echilibru între reacţiunea R' a cilindrului, de componente F' şi N', şi componentele $\frac{dT}{ds}$ şi $\frac{T}{r}$ îndreptate respectiv pe tangenta din M şi pe direcţia M O [1]). Deci, şi potrivit figurei,

$$\frac{dT}{ds} = -F', \qquad \frac{T}{r} = -N'$$

aşa că aplicarea legei $F' = fN'$ ne dă ecuaţia

$$\frac{dT}{ds} = f\,\frac{T}{r}.$$

Deducem, separând variabilele şi integrând,

$$\text{Log}\,\frac{T}{T_0} = \frac{f}{r}\,s \qquad \text{adică} \qquad T = T_0\,e^{\frac{f}{r}s}$$

sau, înlocuind pe s (arcul AB) prin $r\theta$,

$$T = T_0\,e^{f\theta}.$$

Ori, când $\theta = o$, avem $T_0 = P$ şi când $\theta = \widehat{AOB}$, avem $T = Q$. Deci, în definitiv,

$$Q = P\,e^{f\theta}.$$

---

[1]) A se vedea pag. 192.

Aceasta este condiţia de echilibru. Rezultă din ea, că cu o forţă P dată, se poate echilibra o rezistenţă Q foarte mare şi cu atât mai mare cu cât θ şi coeficientul de frecare f sunt mai mari. Aşa spre exemplu, admiţând $f = 0{,}20$ găsim

valori θ		raport $\frac{Q}{P}$
π	. . .	1,87
$2\,\pi$	. . .	3,51
$4\,\pi$	. . .	12,34
$6\,\pi$	. . .	48,32

Cu o coardă înfăşurată de 3 ori în jurul cilindrului, s'ar putea astfel învinge o rezistenţă Q de aproape 500 de kg. numai cu o forţă P de 10 kg.

Notă. Teorema travaliului virtual nu este de nici o utilitate pentru studiul echilibrului sistemelor naturale supuse frecărilor, căci printre forţele direct aplicate trebuesc socotite şi frecările de alunecare fN, al căror travaliu nu este nul.

Ori, precedând astfel, introducem în ecuaţii o serie de necunoscute care nu ne permit de a găsi condiţiile de echilibru.

II. REZISTENŢA LA ROSTOGOLIRE.

Rostogolirea unei perechi de roate cuplate. Fie două roate de aceiaşi rază r, cuplate printr'o osie şi putând a se deplasa prin rostogolire pe un sol orizontal rezistent sau pe două şini paralele.

Putem reduce studiul mişcării şi echilibrului unui asemenea sistem la acela al mişcării şi echilibrului unui cerc vertical de rază r, care s'ar rostogoli pe un ax orizontal, greutatea P a cercului fiind egală cu aceea a sistemului de roate.

In stare de repaus, există echilibru între greutatea P şi reacţiunea axului orizontal asupra cercului. Dacă n'ar fi vorba de solide naturale, atunci un efort de tracţiune orizontal, cât de mic, aplicat în O, ar determina o translaţie a cercului în direcţia efortului. In cazul solidelor naturale, care este acela de

care ne ocupăm, experienţa probează că atât timp cât efortul de tracţiune nu atinge o anumită valoare F, cercul rămâne nemişcat, iar după aceea dobândeşte o mişcare de rostogolire. Cercul opune deci o rezistenţă la rostogolirea lui, caracterizată prin valoarea efortului F.

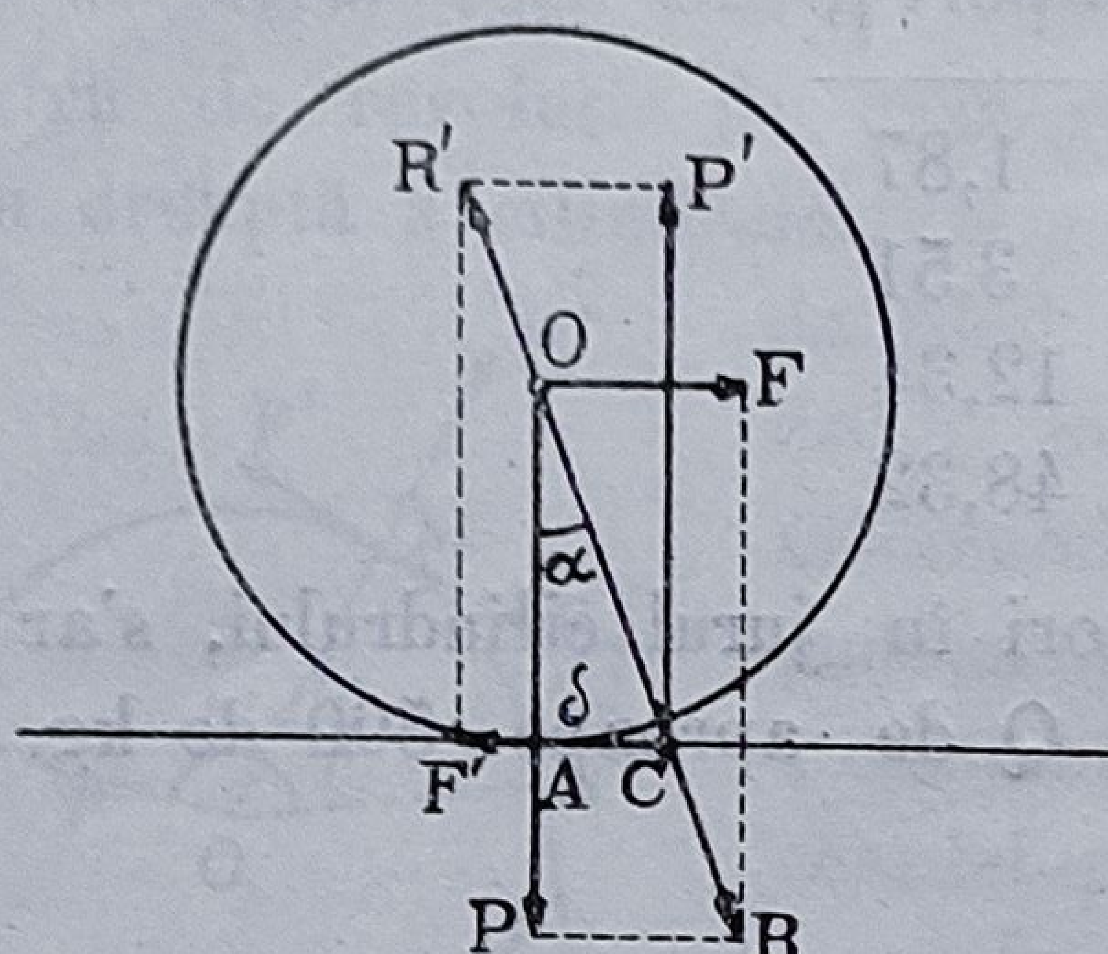


Fig. 145

Să considerăm momentul când cercul este pe punctul de a porni din loc. In acest moment există echilibru între rezultanta R a forţelor P şi F şi reacţiunea R′ a axului orizontal asupra cercului. Punctul de aplicaţie al reacţiunei R′ este punctul C unde R întâlneşte axul orizontal. Aceasta se explică prin aceea că cercul şi axul, fiind solide naturale, se deformează, mai mult sau mai puţin, în vecinătatea punctului de contact geometric A, aşa că punctul C intră în zona de contact a cercului cu axul de rostogolire. Pe toată această zonă au loc reacţiuni a căror rezultantă este R′.

Punctul C este zis *punct de contact mecanic.* Reacţiunea R′ se poate descompune în componentele P′ şi F′, egale respectiv cu P şi F însă de sensuri opuse; P cu P′ şi F cu F formează două cupluri care se echilibrează unul cu altul.

Fie $AC = \delta$. Egalitatea momentelor celor două cupluri ne dă

$$P\delta = Fr \qquad \text{de unde} \qquad (1)\ F = \frac{P}{r}\delta.$$

Experienţa a stabilit că δ este independent de mărimea presiunei normale şi a razei r a cercului (presupunând totuşi că *r* nu este prea mic) *şi variază numai cu natura solidelor în contact.* Rezultă potrivit formulei (1), că efortul de tracţiune orizontal, necesar pornirei din loc (egal de altfel cu acela care este necesar menţinerii unei viteze uniforme de mişcare) este, pentru aceiaşi greutate P, cu atât mai mic cu cât raza roatelor este mai mare.

Să considerăm acum un efort oblic T. Cercul se va găsi pe punctul de a eşi din starea de repaus, când componenta orizontală $T \cos \theta$ va atinge valoarea F. Presiunea normală fiind în cazul de faţă egală cu $P - T \sin \theta$, vom avea potrivit formulei (1):

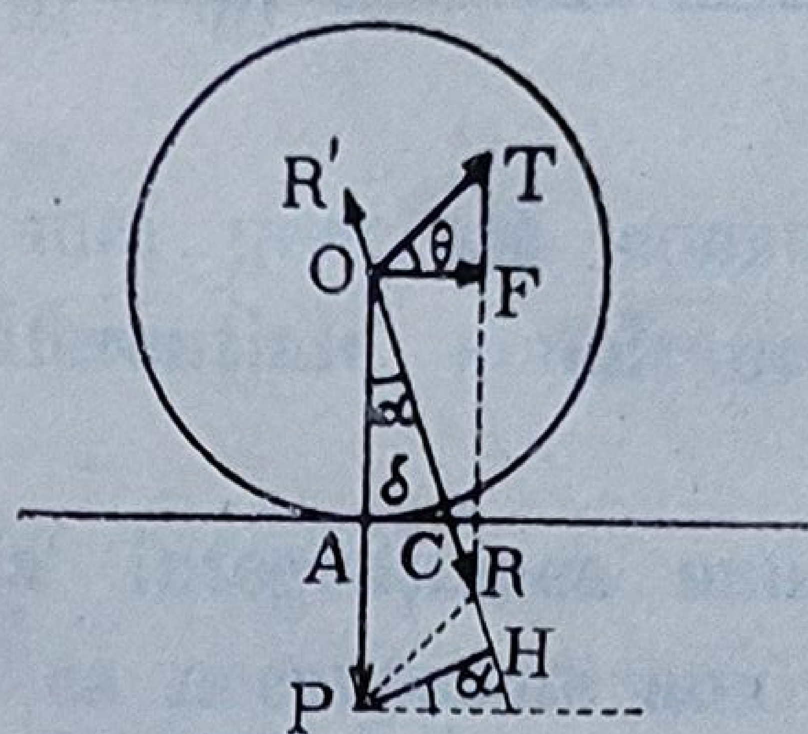


Fig. 146

$$T \cos \theta = \frac{P - T \sin \theta}{r} \delta$$

de unde deducem

$$T = \frac{P \delta}{r \cos \theta + \delta \sin \theta}.$$

Minimul lui T corespunde perpendicularei PH coborîtă din P pe direcţia lui R şi această perpendiculară face cu orizontala unui unghiu egal cu unghiul α din O, deci minimul considerat are ca expresiune $P \sin \alpha$, cu relaţia $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{r}$.

PARTEA III.

MIŞCAREA SISTEMELOR MATERIALE.

I. MIŞCAREA SISTEMELOR MATERIALE LIBERE.

I. ECUAŢIILE GENERALE ALE MIŞCĂRII UNUI SISTEM DE PUNCTE LIBERE.

1. **Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării.** Punctele unui sistem material pot să fie libere sau supuse la legături. Le vom considera deocamdată ca fiind toate libere. Fie:

n numărul de puncte,
$m_1, m_2, \ldots, m_n$ massele lor,
$x_1, y_1, z_1; \; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n$ cordonatele lor.

Fiecare punct poate fi considerat ca solicitat de o forţă unică, rezultând din compunerea forţelor ce-i sunt aplicate, atât exterioare cât şi interioare.

Fie:

$$X_1, Y_1, Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2; \quad \ldots; \quad X_n, Y_n, Z_n$$

cele trei proecţii ale fiecăreia din aceste forţe.

Ecuaţiile mişcării unuia oarecare dintre puncte sunt:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$(1) \qquad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

şi în total avem $3n$ asemenea ecuaţii.

Componentele X, Y, Z vor fi privite ca fiind în general funcţii:

1⁰ de cordonatele $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots;$

2⁰ de vitezele $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}; \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_2}{dt}; \ldots;$

3⁰ de timpul t.

In asemenea condiţii, problema cea mai generală constă în integraţiunea unui sistem de ecuaţii diferenţiale simultanee de ordinul al doilea, în număr de $3n$.

Putem aduce rezolvirea problemei la integraţiunea unui sistem de $6n$ ecuaţii de ordinul 1-u, luând ca necunoscute auxiliare componentele x', y', z' ale vitezei fiecăruia din punctele sistemului. Cele 3 ecuaţii ale mişcării punctului de massă m, pot astfel să fie înlocuite prin următoarele şease:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', & m\frac{dx'}{dt} &= X \\ \frac{dy}{dt} &= y', & m\frac{dy'}{dt} &= Y \\ \frac{dz}{dt} &= z', & m\frac{dz'}{dt} &= Z. \end{aligned}$$

In total, pentru întregul sistem, $6n$ asemenea ecuaţii. Integraţiunea lor ne va da pentru necunoscutele x, y, z, x', y', z' expresiuni de forma

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= f_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ y &= f_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ z &= f_3(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ x' &= f'_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ y' &= f'_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \\ z' &= f'_3(t, c_1, c_2, \ldots, c_{6n}) \end{aligned}$$

în care $c_1, c_2, \ldots, c_{6n}$ sunt $6n$ constante arbitrare. Obţinem deci o infinitate de mişcări, care satisfac toate, ecuaţiilor diferenţiale de la care am plecat. — Pentru precizarea unei probleme trebue să ni se dea condiţiile iniţiale ale mişcării, adică cordonatele a, b, c şi componentele vitezei a', b', c' corespunzătoare poziţiei fiecăruia din puncte, la începutul mişcării. Con-

stantele arbitrare pot fi atunci toate determinate, căci făcând în ecuaţiile (3) pe $t = o$ şi înlocuind pe x, y, z prin a, b, c, pe x', y', z' prin a', b', c', etc., obţinem un sistem de $6n$ ecuaţii între cele $6n$ necunoscute $c_1, c_2, \ldots, c_{6n}$. Acest sistem de ecuaţii nu va putea fi nici incompatibil, nici nedeterminat. Dacă unul din aceste cazuri se prezintă, vom avea prin aceasta proba că nu s'a obţinut soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale.

2. **Integralele unei probleme de Dinamică.** Să rezolvăm sistemul de ecuaţii (3) în raport de $c_1, c_2, \ldots c_{6n}$. Vom obţine expresiuni de forma:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \varphi_1(t;\ x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots;\ x_1', y_1', z_1';\ \ldots) \\ c_2 = \varphi_2(t;\ x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots;\ x_1', y_1', z_1';\ \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Există deci un număr de $6n$ funcţii φ de cordonatele punctelor, de proecţiile vitezelor şi de timpul t, care păstrează o valoare constantă pe tot timpul mişcării.

Ori şi care dintre ecuaţiile (4) se numeşte *integrală a mişcării*. Decă le-am cunoaşte pe toate, problema ar fi complect rezolvată. Fiecare integrală traduce o proprietate caracteristică a mişcării, independent de celelalte.

Este evident că dacă avem $\varphi_1 = c_1, \varphi_2 = c_2, \ldots$, atunci şi o funcţie arbitrară de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ păstrează tot o valoare constantă, însă ecuaţia $\psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) = const.$, nu constitue decât o consecinţă a celor dintâi, iar nu o integrală nouă.

In capitolul urmăror vom stabili *teoremele generale* care în unele cazuri pot să procure *integrale de ale mişcării*.

II. TEOREME GENERALE ASUPRA MIŞCĂRII UNUI SISTEM DE PUNCTE LIBERE.

Fie:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

ecuaţiile diferenţiale ale mişcării unui punct dintr'un sistem material.

1. **Teorema cantităţilor de mişcare proectate pe un ax.** Dacă scriem pentru toate punctele ecuaţiile diferenţiale ale mişcării şi adunăm pe cele ce se referă la axul Ox, apoi pe cele ce se referă la axul Oy şi înstârşit la axul Oz, obţinem cele 3 ecuaţii următoare:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \sum m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum X \\ \sum m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum Y \\ \sum m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum Z. \end{aligned}$$

Forţele interioare dispar, căci ele fiind două câte două egale şi de semne contrarii dau proecţii nule pe ori ce ax.

Putem pune ecuaţiile (1) sub forma

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m\frac{dx}{dt} &= \sum X \\ \frac{d}{dt}\sum m\frac{dy}{dt} &= \sum Y \\ \frac{d}{dt}\sum m\frac{dz}{dt} &= \sum Z. \end{aligned} \right.$$

Rezultă următoarea teoremă: *Derivata sumei proecţiilor cantităţilor de mişcare pe un ax oarecare, este egală cu suma proecţiilor forţelor exterioare pe acelaşi ax.*

Fie OA vectorul rezultant al cantităţilor de mişcare şi OB vectorul rezultant al forţelor exterioare. Ecuaţiile (2) mai exprimă că *derivata geometrică a vectorului* OA, *şi deci viteza punctului* A, *este egală cu vectorul* OB.

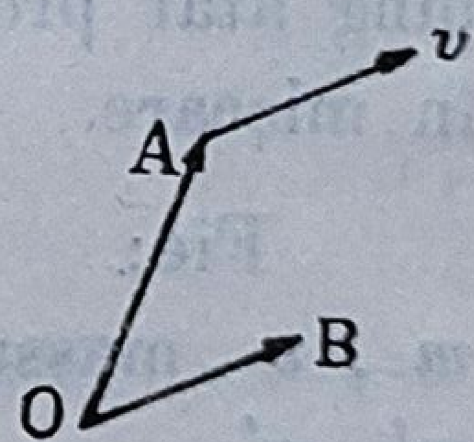


Fig. 147

Corolarii. 1) Să presupunem că vectorul rezultant al forţelor exterioare rămâne necontenit perpendicular unei direcţii fixe. Luând axul Ox paralel cu această direcţie, avem $\Sigma X = 0$ [1]) şi prin urmare

$$\frac{d}{dt}\sum m\frac{dx}{dt} = 0$$

[1]) Axele cordonate vor fi presupuse totdeauna dreptunghiulare.

de unde deducem

$$\sum m \frac{dx}{dt} = c .$$

Obţinem deci o integrală a mişcării.

2) Dacă vectorul rezultant al forţelor exterioare rămâne necontenit paralel unei direcţii fixe, atunci luând axul Oz paralel acestei direcţii, avem $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$ şi obţinem în consecinţă două integrale ale mişcării:

$$\sum m \frac{dx}{dt} = c, \qquad \sum m \frac{dy}{dt} = c' .$$

3) Dacă presupunem însfârşit că vectorul rezultant al forţelor exterioare este nul, sau că nu există forţe exterioare, atunci, oricare ar fi axele cordonate, avem $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma Z = o$ şi în consecinţă

$$\sum m \frac{dx}{dt} = c, \qquad \sum m \frac{dy}{dt} = c', \qquad \sum m \frac{dz}{dt} = c''$$

deci, trei integrale de ale mişcării.

Aplicaţie. Fie o ţeavă de tun, coprinzând o încărcătură de pulbere şi un proectil, aşezată pe un plan orizontal pe care ea poate aluneca fără frecare. Când se dă foc, gazele pulberii împing atât proectilul cât şi ţeava, aşa că întregul sistem intră în mişcare.

Fie:

m , v massa şi viteza unui punct al ţevii,
m' , v' „ „ „ „ „ „ proectilului,
m'' , v'' „ „ „ „ „ „ gazelor pulberii.

In mişcarea orizontală, până în momentul când proectilul iese din gura ţevii, nu există nici o forţă exterioară, forţele desvoltate de gaze fiind forţe interioare. In acest interval de timp, pe un ax Ox paralel axului ţevii, avem

$$\Sigma \; (mv + m'v' + m''v'') = o$$

căci la începutul mişcării sistemul a fost în repaus, aşa că valoarea constantei c este nulă.

Cum v şi v' sunt respectiv aceiaşi pentru toate punctele

ţevii şi proectilului, deducem, însemnând prin M massa ţevii şi prin M' massa proectilului:

$$Mv + M'v' + \Sigma m''v'' = 0 .$$

Dacă am neglija termenul al treilea, ar rămâne

$$Mv + M'v' = 0$$

egalitate care ar exprima că ţeava şi proectilul dobândesc viteze de semne contrarii şi invers proporţionale cu massele ce au fiecare. In realitate termenul în chestiune nu poate fi neglijat, aşa că viteza de recul a ţevii este ceva mai mare decât arată egalitatea precedentă.

2. Teorema mişcării centrului de greutate. Consideraţia centrului de greutate al sistemului, ne permite de a da ecuaţiilor (1) o altă formă.

Fie a, b, c cordonatele centrului de greutate şi M massa totală a sistemului. Avem, după cum se ştie,

$$Ma = \Sigma mx, \quad Mb = \Sigma my, \quad Mc = \Sigma mz$$

deci, derivând de două ori şi potrivit ecuaţiilor (1),

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} M \frac{d^2a}{dt^2} &= \sum X \\ M \frac{d^2b}{dt^2} &= \sum Y \\ M \frac{d^2c}{dt^2} &= \sum Z. \end{aligned} \right.$$

Ori, acestea sunt ecuaţiile mişcării unui punct de massă M. De aci, următoarea teoremă: *Centrul de greutate se mişcă întocmai ca şi cum massa sistemului ar fi concentrată întrînsul şi i s'ar aplica în mod echipolent toate forţele care lucrează asupra sistemului.*

Să nu se creadă că ecuaţiile (3) sunt suficiente pentru determinarea mişcării centrului de greutate. Ele ar fi suficiente numai în cazul cu totul particular când ΣX, ΣY şi ΣZ ar depinde numai de cordonatele a, b, c, de derivatele lor şi de timpul t.

Corolariu. Să presupunem că vectorul rezultant al forțelor exterioare este nul, sau că nu există forțe exterioare. In asemenea caz, ecuațiile (3) ne dau

$$\frac{d^2a}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2b}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2c}{dt^2} = 0$$

și deducem

$$a = h + kt, \qquad b = h' + k't, \qquad c = h'' + k''t.$$

De aci, următoarea propozițiune cunoscută sub numele de *principiul conservării mișcării centrului de greutate: Când un sistem nu este supus la nici o forță exterioară, sau când vectorul rezultant al forțelor exterioare este nul, centrul de greutate rămâne în repaus sau se mișcă cu o mișcare rectilină și uniformă.*

Astfel, dacă admitem că stelele, din cauza depărtării lor, n'au nici o acțiune asupra sistemului solar, centrul de greutate al acestui sistem nu poate avea decât o mișcare rectilină și uniformă și această mișcare n'a fost modificată când, după o ipoteză în general admisă, planeta dintre Marte și Jupiter s'a spart și a dat naștere la asteroizii care populează aceea regiune a sistemului.

Forțele desvoltate de mușchii noștri fiind forțe interioare, nu au, dacă lucrează numai ele singure, nici o acțiune asupra modificării de poziție a centrului de greutate. Un om în repaus izolat în spațiu și sustras acțiunii gravitației, n'ar putea prin mișcări de mâini și de picioare să schimbe poziția inițială a centrului său de greutate, deși prin asemenea mișcări el ar putea isbuti să se învârtească în jurul acestui centru.

Așezat în picioare pe un plan orizontal, perfect alunecos, un om, supus greutății, n'ar putea înainta, căci centrul său de greutate n'ar fi solicitat de nici o forță orizontală. Numai frecarea procură o asemenea forță, așa că fără această frecare nici o mișcare de înaintare la suprafața pământului n'ar fi posibilă. Greutatea P egală cu Mg și reacțiunea N a planului sunt egale numai în cazul când omul stă nemișcat. Dacă el coboară centrul său de greutate cu o accelerație oarecare, lăsându-se pe vine, reacția N devine mai mică decât greutatea P. In adevăr,

potrivit formulelor precedente, dacă proectăm mişcarea pe o verticală Oz îndreptată în jos, avem $Mc = Mg - N$, de unde $N = M(g - c)$ şi vedem că N devine cu atât mai mic cu cât acceleraţia c a centrului de greutate este mai mare. Pe de altă parte, cum reacţia N nu poate deveni negativă, mai vedem că cea mai mare valoare pe care o poate dobândi c este egală cu g, când $N = 0$. Dacă din potrivă, stând pe vine, omul îşi asvârlă corpul în sus, acceleraţia c fiind atunci negativă, valoarea reacţiei N devine mai mare decât greutatea P.

3. **Teorema momentelor cantităţilor de mişcare** ***(teorema momentelor cinetice).*** Ştim, că din cele 3 ecuaţii diferenţiale ale mişcării unui punct, putem deduce

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = yZ - zY$$

care se poate scrie

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right] = yZ - zY$$

şi alte două ecuaţii analoage. Dacă facem suma tuturor acestor ecuaţii, pentru fiecare din axe, obţinem

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= \sum(yZ - zY) \\ \frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= \sum(zX - xZ) \\ \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= \sum(xY - yX). \end{aligned}\right.$$

Membrii ai doilea nu conţin forţele interioare, căci acestea, luate două câte două, fiind egale şi direct opuse dau un moment nul în raport de ori ce ax.

Sistemul de axe dreptunghiulare fiind absolut oare care, ecuaţiile (4) dau loc următoarei teoreme: *Derivata sumei momentelor cantităţilor de mişcare* (sau a momentului cinetic) *în raport de un ax, este egală cu suma momentelor forţelor exterioare în raport de acelaşi ax.*

Fie OC momentul rezultant al cantităţilor de mişcare, sau momentul cinetic, în raport cu origina axelor, şi OD momentul rezultant al forţelor exterioare. Ecuaţiile (4) mai exprimă că *derivata geometrică a vectorului* OC, *şi deci viteza punctului* C, *este egală cu vectorul* OD.

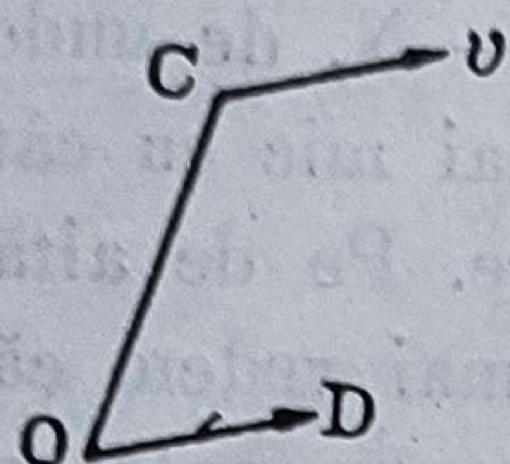


Fig. 148

Corolarii. 1) Să presupunem că faţă de un ax fix, suma momentelor forţelor exterioare este nulă. Luând acel ax drept ax Ox, vom avea

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = 0$$

şi prin urmare

$$\sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c$$

deci o integrală a mişcării.

2) Să presupunem că forţele exterioare, compuse ca şi cum ar lucra asupra unui solid invariabil, dau o rezultantă unică, care trece printr'un punct fix. Luând acel punct ca origină a unui sistem de trei axe dreptunghiulare, vom avea

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0$$

şi prin urmare

$$(5) \quad \begin{cases} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c \\ \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c' \\ \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c''. \end{cases}$$

Se obţin deci 3 integrale de ale mişcării.

3) Să presupunem însfârşit că nu există forţe exterioare. Atunci ecuaţiile (5) vor avea loc ori care ar fi origina aleasă pentru axele cordonate.

4. **Teorema ariilor**. Printr'un punct O să ducem 3 axe cordonate dreptunghiulare şi să unim punctul O cu un punct M al sistemului. Proecţiile razei vectoare OM pe planurile yOz,

$z\,O\,x$, $x\,O\,y$ vor descrie respectiv ariile ω, ω', ω'' şi vom avea, după cum se ştie [1]),

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = 2\frac{d\omega}{dt}$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = 2\frac{d\omega'}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2\frac{d\omega''}{dt}.$$

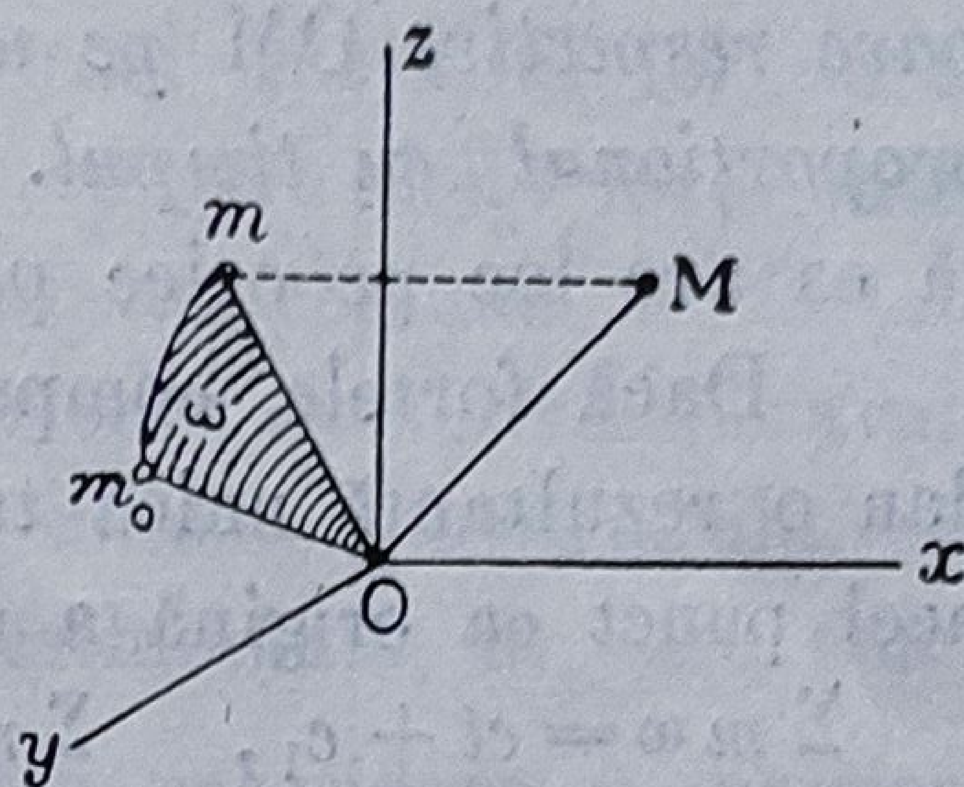


Fig. 149

Dacă înmulţim aceste ecuaţii cu m şi le însumăm pentru toate punctele sistemului, punând pentru prescurtare,

$$\lambda = \Sigma\, m\,\omega\,, \qquad \lambda' = \Sigma\, m\,\omega'\,, \qquad \lambda'' = \Sigma m\,\omega''$$

obţinem

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 2\frac{d\lambda}{dt}$$

$$\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 2\frac{d\lambda'}{dt}$$

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 2\frac{d\lambda''}{dt}$$

aşa că ecuaţiile (4) devin

$$(6)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{d^2\lambda}{dt^2} = \sum (yZ - zY) \\ 2\dfrac{d^2\lambda'}{dt^2} = \sum (zX - xZ) \\ 2\dfrac{d^2\lambda''}{dt^2} = \sum (xY - yX). \end{cases}$$

Să presupunem că suma momentelor forţelor exterioare în raport de un ax este nulă. Atunci luând acest ax drept ax Ox, prima dintre ecuaţiile (6) ne dă

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = o \quad \text{şi prin urmare} \quad \lambda = \Sigma\, m\,\omega = ct + c_1\,.$$

Aşa dar:

Când suma momentelor forţelor exterioare în raport de un ax Ox, este nulă, suma productelor ce se obţin înmulţind

---

[1]) *Cinematica*, pag. 79.

massa fiecărui punct M *cu aria descrisă de proecția razei vectoare respective* OM *pe un plan perpendicular axului, variază proporțional cu timpul.* Aceasta este *teorema ariilor* și se zice că ea are loc pe orice plan perpendicular axului considerat.

Dacă forțele, compuse ca în cazul solidelor invariabile, dau o rezultantă unică trecând printr'un punct fix, atunci luând acel punct ca origină a unui sistem de axe dreptunghiulare, avem

$$\Sigma m \omega = ct + c_1, \quad \Sigma m \omega' = c't + c'_1, \quad \Sigma m \omega'' = c''t + c''_1$$

deci teorema ariilor are loc pe orice plan trecând prin punctul fix.

Dacă, însfârșit, nu există forțe exterioare, teorema ariilor are loc pe orice plan din spațiu.

5. **Teorema forțelor vii.** Știm că variația forței vii a unui punct material, într'un interval de timp oarecare, este egală cu suma travaliurilor forțelor care lucrează asupra punctului, în același interval de timp. Dacă facem suma tuturor ecuațiilor care exprimă acest lucru pentru fiecare din punctele sistemului, și dacă convenim de a numi *forță vie a sistemului de puncte* suma forțelor vii a acestor puncte, obținem teorema următoare:

Variația forței vii a unui sistem material, într'un interval de timp oarecare, este egală cu travaliul forțelor care lucrează asupra sistemului în același interval de timp.

Dacă prin urmare însemnăm prin T forțe vie a sistemului, $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$, și prin $\mathfrak{T}$ suma travaliurilor forțelor care lucrează asupra punctelor, într'un interval de timp, avem, ca și pentru cazul unui singur punct material (pag. 47)

$$dT = d\mathfrak{T} \tag{7}$$

$$\text{și} \quad T - T_0 = \mathfrak{T} \quad \text{san} \quad \Delta T = \mathfrak{T}. \tag{8}$$

Ecuația (7) este ecuația diferențială a forțelor vii. Sub formă mai explicită, ea se scrie:

$$d \sum \frac{1}{2} mv^2 = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

presupunând axele dreptunghiulare.

Ecuaţia (8) este ecuaţia forţelor vii sub formă finită.

Aici forţele interioare intervin, căci travaliul lor nu este nul. Am văzut că el este egal cu fdr, pentru două forţe interioare repulsive, f reprezentând intensitatea comună a forţelor, şi cu $-fdr$, pentru două forţe interioare atractive. Travaliul nu este necontenit nul decât în cazul solidelor invariabile, când distanţa r dintre puncte rămânând neschimbată, dr este nul.

Integrala forţelor vii. Dacă forţele exterioare şi interioare admit o funcţie de forţe, avem

$$\mathfrak{T} = U - U_0$$

deci potrivi egalităţei (8),

$$T - T_0 = U - U_0$$

adică

$$T - U = T_0 - U_0 = \text{const.}$$

Dacă utilizăm potenţialul $V = - U$, atunci avem

$$T + V = \text{const.} \tag{9}$$

Aşa dar: *Când forţele, atât interioare cât şi exterioare, care lucrează asupra unui sistem, admit un potenţial, suma forţei vii şi a potenţialului rămâne constantă tot timpul mişcării.*

Avem prin urmare, în asemenea caz, o integrală a mişcării, zisă *integrala forţelor vii.*

Conservarea forţei vii. Dacă potenţialul este o funcţie uniformă de cordonate, atunci, când sistemul revine la aceiaşi poziţie, V redobândeşte aceiaşi valoare şi deci şi forţa vie T. Prin urmare: *Când forţele interioare şi exterioare admit un potenţial, funcţie uniformă de cordonate, forţa vie reia aceiaşi valoare ori de câteori sistemul trece prin aceiaşi poziţie.*

Caz particular. Să presupunem că nu există forţe exterioare şi că forţele interioare admit un potenţial funcţie numai de distanţele r dintre puncte. In asemenea caz, forţa vie T a sistemului redevine aceiaşi ori de câte ori sistemul revine *la aceiaşi stare*, caracterizată prin distanţele relative dintre punctele sale.

Sistemul solar oferă un asemenea exemplu, căci singurele forţe care acţionează soarele, planetele şi sateliţii lor, considerând toate aceste corpuri ca simple puncte materiale, sunt atracţiunile mutuale dintre ele şi acestea fiind supuse legii lui Newton admit un pontenţial.

In adevăr, însemnând prin m şi m' massele a două puncte oarecare din sistem şi prin r distanţa dintre ele, forţa de atracţiune are ca expresie $f\,\frac{m\,.\,m'}{r^2}$ şi travaliul elementar al grupului de 2 forţe atractive este atunci egal cu $-\,f\,\frac{m\,.\,m'}{r^2}\,dr$. Ori, aceasta este diferenţiala funcţiei $f\,\frac{m\,.\,m'}{r}$, aşa că sistemul admite ca funcţie de forţe

$$U = f \sum \frac{m\,.\,m'}{r}$$

şi deci ca potenţial

$$V = -\,f \sum \frac{m\,.\,m'}{r}\,.$$

Rezultă, potrivit ecuaţiei (9) că pe tot timpul mişcărei există egalitatea

$$T - f \sum \frac{m.m'}{r} = \text{const.}$$

Travaliul greutăţii. Să considerăm un sistem de puncte materiale în mişcare, punctele fiind supuse şi acţiunei greutăţii. Ne propunem a evalua travaliul greutăţilor în mişcarea sistemului.

Luând axul Oz vertical şi îndreptat în sus, şi aplicând formula generală

$$d\,\mathcal{T} = \Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

avem ca expresiune a travaliului elementar al greutăţilor tuturor punctelor

$$d\mathcal{T} = -\,\Sigma\,mg\,dz\,.$$

Insă, dăcă însemnăm prin c cota centrului de greutate şi prin M massa sistemului, ştim că

$$M\,c = \Sigma\,m\,z\,, \qquad \text{deci} \qquad M\,dc = \Sigma\,m\,dz$$

şi prin urmare

$$(\alpha) \qquad d\mathfrak{T} = - Mg.dc\,.$$

Intre două cote c_0 şi c travaliul greutăţilor va fi

$$\mathfrak{T} = Mg\,(c_0 - c).$$

Aşa dar: *In mişcarea unui sistem material, travaliul greutăţilor este egal cu greutatea totală înmulţită cu coborîrea verticală a centrului de greutate.*

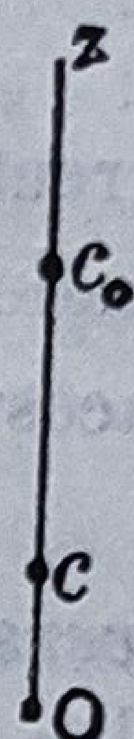


Fig. 150

Din formula (α) rezultă că greutăţile admit o funcţie de forţe $U = - Pc - k$, sau un potenţial $V = Pc + k$, P fiind greutatea totală iar k o constantă arbitrară. Dacă luăm $k = o$, atunci potenţialul greutăţii P la o cotă oare care c va fi egal cu Pc.

Rezumat.

Teoremele generale corespund la 7 ecuaţii distincte şi anume la cele trei ecuaţii.

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m\frac{dx}{dt} &= \sum X \\ \frac{d}{dt}\sum m\frac{dy}{dt} &= \sum Y \\ \frac{d}{dt}\sum m\frac{dz}{dt} &= \sum Z \end{aligned} \right.$$

referitoare teoremei cantităţilor de mişcare; apoi la cele trei ecuaţii

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= \sum (yZ - zY) \\ \frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= \sum (zX - xZ) \\ \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= \sum (xY - yX) \end{aligned} \right.$$

referitoare teoremei momentelor cantităţilor de mişcare, şi însfârşit la ecuaţia

$$(3) \qquad d\sum \frac{1}{2}mv^2 = \sum (Xdx + Ydy + Zdz)$$

sau mai scurt

$$d\mathrm{T} = d\mathcal{T}$$

referitoare teoremei forţelor vii.

Ecuaţiile care corespund teoremei mişcării centrului de greutate ca şi principiului ariilor, putându-se deduce din sistemele de ecuaţii (1) şi (2), nu constituesc ecuaţii distincte de acestea.

Cele 7 ecuaţii de mai sus, poartă numele de *ecuaţiile universale ale mişcărei*, pentru motivul că ele se aplică şi sistemelor cu legături dacă înlocuim legăturile prin forţele care pot să le reprezinte.

Reamintim că forţele interioare nu figurează decât în ecuaţia (3) a teoremei forţelor vii.

III. TEORIA ENERGIEI.

1. Să considerăm un sistem acţionat de forţe exterioare şi interioare şi *să presupunem că forţele interioare admit un potenţial* V_i.

Insemnând prin $\mathcal{T}_e$ travaliul forţelor exterioare şi prin $\mathcal{T}_i$ travaliul forţelor interioare, avem, potrivit teoremei forţelor vii,

$$\Delta \mathrm{T} = \mathcal{T}_e + \mathcal{T}_i .$$

Insă, $\mathcal{T}_i = -\Delta \mathrm{V}_i$, conform definiţiei potenţialului; deci

$$\Delta \mathrm{T} = \mathcal{T}_e - \Delta \mathrm{V}_i$$

sau

$$\Delta(\mathrm{T} + \mathrm{V}_i) = \mathcal{T}_e . \tag{1}$$

Se numeşte:

1⁰ *Energie actuală sau energie cinetică* forţa vie T a sistemului;

2⁰ *Energie potenţială*, potenţialul V_i al forţelor interioare;

3⁰ *Energie totală*, sau mai pe scurt, *energie*, suma $\mathrm{T} + \mathrm{V}_i$ a energiilor cinetică şi potenţială.

Cu aceste denumiri, rezultatul exprimat prin egalitate (1) se enunţă în felul următor: *Intr'un sistem oarecare, când for-*

țele interioare admit un potențial, variația energiei corespunzătoare unei modificări a sistemului, este egală cu travaliul forțelor exterioare.

2. **Conservarea energiei.** Când nu sunt forțe exterioare, variația energiei este nulă, deci

$$T + V_i = \text{const.}$$

adică: *Energia unui sistem izolat este constantă.*

Exemplu. Fie o piatră de greutate P, lăsată să cadă în vid dela o înălţime H. Piatra formează împreună cu pământul un sistem material, în care greutatea este o forță interioară; pământul atrage piatra cu o forță egală cu greutatea pietrei, iar piatra atrage pământul cu o forță egală și direct opusă greutății ei. Cum acțiunea pietrei asupra mișcării pământului este complect neglijabilă, atât energia cinetică cât și energia potențială a sistemului în mișcarea considerată, vor depinde numai de mișcarea pietrei, reducându-se la energia cinetică și energia potențială a acesteia.

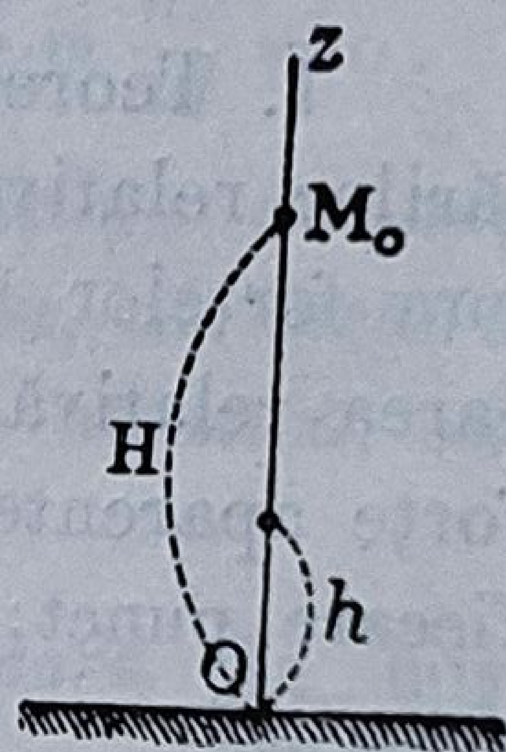


Fig. 151

La origina mișcării M_0, energia cinetică a pietrei este nulă iar energia potențială egală cu PH [1]). Când piatra atinge pământul, energia ei cinetică este $\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2$, V fiind viteza în punctul de cădere O, iar energia potențială devine nulă. Energia totală a rămas astfel aceiași, deoarece avem, după cum se știe,

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 = PH.$$

Intr'un moment oarecare al căderii, când piatra fiind la o înălțime h deasupra pământului, viteza sa este v, energia cinetică este egală cu $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$ iar energia potențială egală cu Ph. Energia totală a rămas însă iarăși aceiași, căci

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = P(H - h)$$

---

1) Pag. 233.

şi prin urmare

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 + Ph = PH.$$

Energia potenţială se transformă deci progresiv, cu începere din M_0 şi până în O, în energie cinetică, însă cu respectarea principiului conservării energiei. Dacă piatra şi pământul ar fi perfect elastici, piatra odată căzută la pământ ar fi asvârlită din punctul O în sus, cu viteza V, şi energia ei cinetică ar fi aceea care s'ar transforma progresiv până în punctul M_0 în energie potenţială. Aşa dar cu toate că de naturi diferite — căci energia cinetică $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$ depinde numai de viteza v a pietrii, pe când energia potenţială numai de poziţia ei h pe verticală — aceste două energii se transformă una în alta.

IV. EXTINDEREA TEOREMELOR GENERALE LA MIŞCĂRILE RELATIVE.

1. Teoremele generale şi consecinţele lor se aplică mişcărilor relative ale unui sistem material, cu condiţia de a alătura forţelor *reale* forţele *aparente* care permit de a trata mişcarea relativă a fiecărui punct ca o mişcare absolută. Aceste forţe aparente sunt, după cum ştim, în număr de două pentru fiecare punct: *forţa de inerţie de antrenare şi forţa centrifugă compusă.*

Se va observa numai, că în aplicaţiunea teoremei forţelor vii la mişcarea relativă a unui sistem, *forţele centrifuge compuse dispar*, căci fiecare dintre ele fiind perpendiculară pe viteza relativă a punctului respectiv, dă un travaliu nul în mişcarea relativă.

2. **Caz particular.** Să considerăm, în particular, mişcarea relativă a unui sistem *în raport de axe dreptunghiulare de direcţii constante, trecând prin centrul de greutate al sistemului.*

Fie:

a, b, c, cordonatele centrului de greutate G în raport de sistemul fix $Oxyz$; x, y, z cordonatele unui punct M al sistemului

în raport de $Oxyz$; x', y', z' cordonatele lui M în raport de sistemul de axe $G x' y' z'$, paralel sistemului $Oxyz$.

Avem, pe de o parte

$$(1) \qquad x = a + x', \qquad y = b + y', \qquad z = c + z'$$

iar pe de altă parte

$$(2) \qquad \Sigma m x' = 0, \qquad \Sigma m y' = 0, \qquad \Sigma m z' = 0$$

căci cordonatele centrului de greutate G față de sistemul $G x' y' z'$ sunt nule.

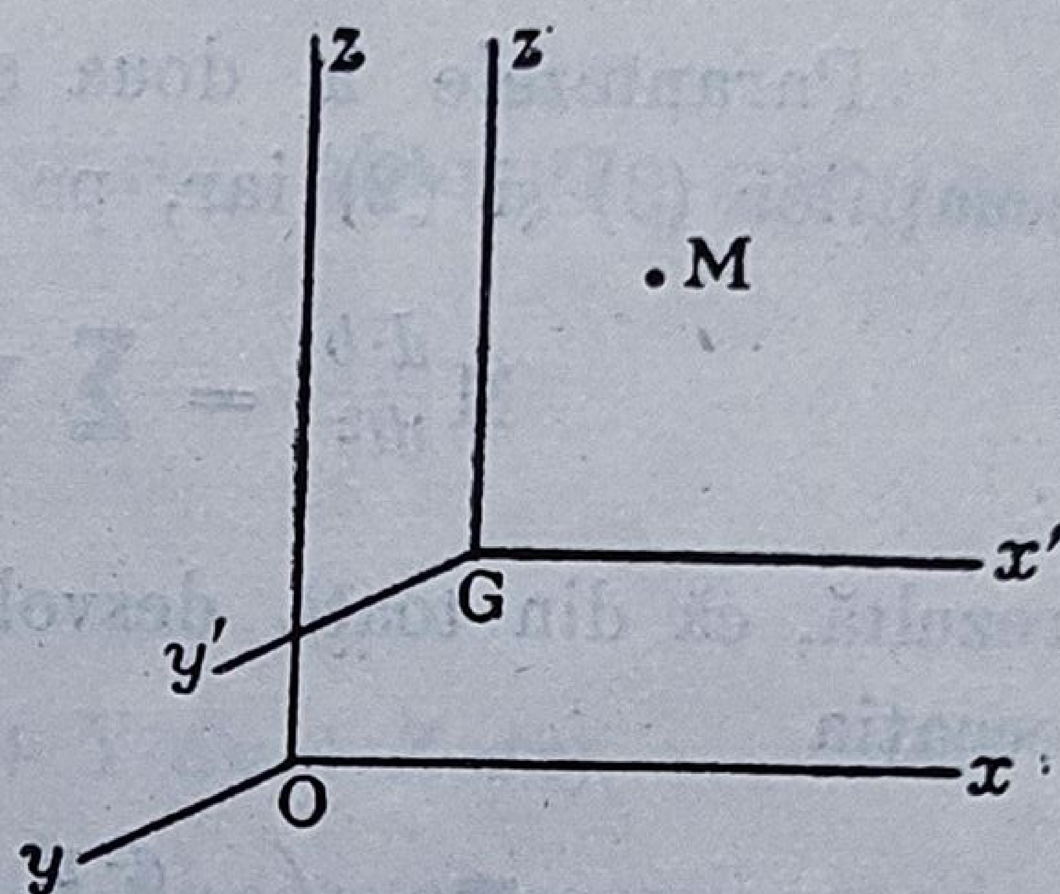


Fig. 152

Ecuațiile (1) și (2) conduc la extinderea teoremelor generale la mișcarea relativă de care ne ocupăm.

a). ***Teorema cantităților de mișcare proectate pe un ax.*** Din ecuațiile (2) deducem pe cele următoare

$$(3) \qquad \sum m \frac{dx'}{dt} = 0, \qquad \sum m \frac{dy'}{dt} = 0, \qquad \sum m \frac{dz'}{dt} = 0.$$

Acestea exprimă că *suma proecțiilor cantităților de mișcare pe un ax oare care este necontenit nulă, sau, că vectorul rezultant al cantităților de mișcare, din mișcarea relativă, este necontenit nul.*

b). ***Teorema momentelor cantităților de mișcare.*** In mișcarea absolută, acestei teoreme îi corespund, după cum s'a văzut, trei ecuații, dintre care cea dintâi a fost

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum (yZ - zY)$$

sau

$$\sum m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \sum (yZ - zY).$$

Să înlocuim în această ecuație pe y și z prin valorile lor (1) și să punem $\Sigma m = M$. Obținem

$$\sum m \left[(b + y') \left(\frac{d^2c}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2} \right) - (c + z') \left(\frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2} \right) \right] =$$
$$\sum \left[(b + y') Z - (c + z') Y \right]$$

şi, desvoltând,

$$M\left(b\frac{d^2c}{dt^2}-c\frac{d^2b}{dt^2}\right)+\left(b\sum m\frac{d^2z'}{dt^2}-c\sum m\frac{d^2y'}{dt^2}\right)+\left(\frac{d^2c}{dt^2}\sum my'-\frac{d^2b}{dt^2}\sum mz'\right)$$

$$+\sum m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2}-z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)=\left(b\,\Sigma\,Z-c\,\Sigma\,Y\right)+\sum\,(y'Z-z'Y).$$

Parantezele a doua şi a treia sunt însă nule, potrivit ecuaţiilor (3) şi (2) iar, pe de altă parte, cum

$$M\frac{d^2b}{dt^2}=\sum Y \quad \text{şi} \quad M\frac{d^2c}{dt^2}=\sum Z$$

rezultă, că din toată desvoltarea de mai sus nu rămâne decât ecuaţia

$$(4) \qquad \sum m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2}-z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)=\sum\,(y'Z-z'Y)$$

sau

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y'\frac{dz'}{dt}-z'\frac{dy'}{dt}\right)=\sum\,(y'Z-z'Y).$$

Aşa dar *teorema momentelor cantităţilor de mişcare se aplică, în cazul particular de mişcare relativă ce considerăm, întocmai ca şi în mişcarea absolută, fără a fi nevoe de a alătura vre-o forţă aparentă, forţelor reale care lucrează asupra sistemului.*

Notă. Puteam proceda şi altfel pentru găsirea ecuaţiei (4) şi anume, alăturând forţei reale X, Y, Z forţele aparente care se reduc la forţa de inerţie de antrenare, şi scriind apoi direct ecuaţiile momentelor cantităţilor de mişcare în sistemul $Gx'y'z'$ considerat ca fix.

Cum acceleraţia punctului G are ca componente $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$, $\frac{d^2c}{dt^2}$, forţa de inerţie de antrenare a punctului M va avea ca componente $-m\frac{d^2a}{dt^2}$, $-m\frac{d^2b}{dt^2}$, $-m\frac{d^2c}{dt^2}$ (mişcarea sistemului

mobil fiind o mişcare de translaţie) aşa că Y se va înlocui cu $Y - m\frac{d^2b}{dt^2}$ şi Z cu $Z - m\frac{d^2c}{dt^2}$. Se va scrie deci ecuaţia

$$\sum m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2} - z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = \sum\left[y'\left(Z - m\frac{d^2c}{dt^2}\right) - z'\left(Y - m\frac{d^2b}{dt^2}\right)\right]$$

din care rezultă imediat ecuaţia (4) dacă ţinem socoteală de ecuaţiile (2).

c). ***Teorema forţelor vii.*** In mişcarea absolută, ştim că punând

$$T = \sum \frac{1}{2} m v^2$$

avem

$$dT = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{5}$$

Să vedem ce devin cei doi membri ai acestei ecuaţii, când trecem la mişcarea relativă.

Să luăm mai întâi pe T. Avem

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Inlocuind pe x, y, z prin expresiunile lor (1), obţinem (observând că $\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{dx'}{dt}$ şi $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{da}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt}$, etc.)

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

$$+ \sum m\left(\frac{da}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt} + \frac{db}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt} + \frac{dc}{dt}\cdot\frac{dz'}{dt}\right).$$

Ori, dacă însemnăm prin

V viteza centrului de greutate,

M massa sistemului,

T' forţa vie în mişcare relativă considerată,

vedem că prima paranteză poate fi înlocuită cu $\frac{1}{2}$ M V^2, iar paranteza a doua cu T'. Cât despre paranteza a treia, aceasta este nulă, potrivit ecuaţiilor (3). Aşa dar

$$(6) \qquad T = \frac{1}{2} M\, V^2 + T'$$

egalitate care corespunde următoarei teoreme, cunoscută sub numele de *teorema lui Koenig: Forţa vie a unui sistem este egală cu forţa vie a massei totale concentrată în centrul de greutate, plus forţa vie a sistemului în mişcarea raportată la axe paralele axelor fixe, duse prin centrul de greutate.*

Să ne ocupăm acum de membrul al doilea al egalităţii (5). Transformaţiunea de cordonate ne dă

$$\Sigma (X + dx\; Y\; dy + Z\; dz) = da\; \Sigma X + db\; \Sigma Y + dc\; \Sigma Z +$$
$$\Sigma\; (X\, dz' + Y\, dy' + Z\, dz').$$

Insă, mişcarea centrului de greutate este aceea a unui punct de massă M, supus unei forţe ale cărei componente sunt ΣX, ΣY, ΣZ. Aplicând acestui punct teorema forţelor vii, avem

$$d\, \frac{1}{2} M\, V^2 = da\; \Sigma X + db\; \Sigma Y + dc\; \Sigma Z$$

deci

$$(7) \qquad \Sigma\, (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz) = d\, \frac{1}{2} M V^2 +$$
$$\Sigma\, (X\, dx' + Y\, dy' + Z\, dz').$$

Inlocuind acum în ecuaţia (5) pe T prin expresia (6) şi pe $\Sigma\, (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)$ prin expresia (7) obţinem, ca încheere,

$$(8) \qquad d\, T' = \Sigma\, (X\, dx' + Y\, dy' + Z\, dz')\,.$$

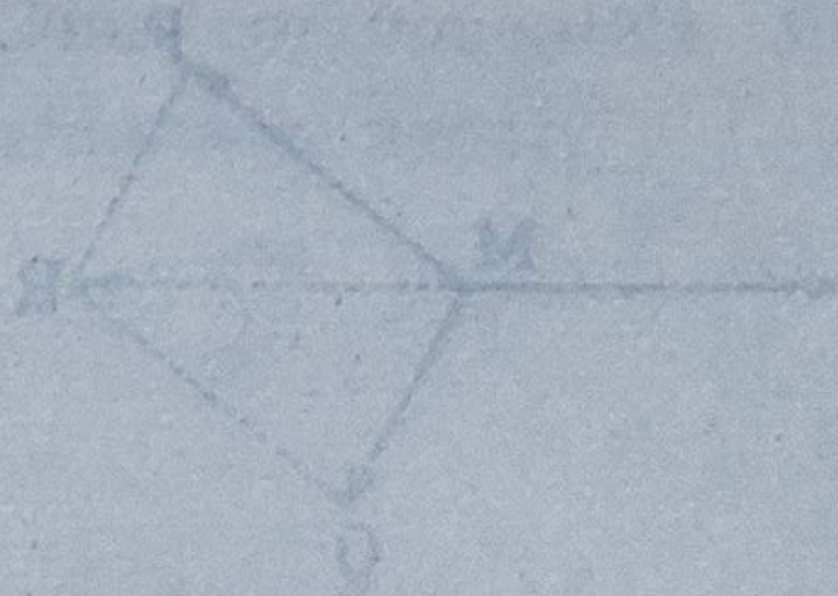
Aşa dar, *ecuaţia forţelor vii subsistă în mişcarea relativă ce am considerat, fără a fi nevoe de a introduce vre o forţă aparentă pe lângă forţele reale care lucrează asupra sistemului.*

Notă. Ca şi pentru teorema momentelor cantităţilor de mişcare, puteam scrie direct ecuaţia forţelor vii în sistemul

mobil G x' y' z', alăturând forţei direct aplicate **X**, Y, Z forţa de inerţie de antrenare $-m\frac{d^2a}{dt^2}$, $-m\frac{d^2b}{dt^2}$, $-m\frac{d^2c}{dt^2}$. Se obţine procedând astfel

$$d\,T' = \sum\left[\left(X - m\frac{d^2a}{dt^2}\right)dx' + \left(Y - m\frac{d^2b}{dt^2}\right)dy' + \left(Z - m\frac{d^2c}{dt^2}\right)dz'\right]$$

Desvoltând membrul al doilea, şi ţinând socoteală de ecuaţiile (3), dăm imediat peste ecuaţia (8).



24468 - 16

II. MIŞCAREA SISTEMELOR MATERIALE CU LEGĂTURI.

I. ECUAŢIILE GENERALE ALE MIŞCĂRII PUNCTELOR UNUI SISTEM CU LEGĂTURI.

1. **Aplicaţiunea principiului lui d'Alembert.** Să presupunem acum că între punctele sistemului material există anumite legături. Inlocuind legăturile prin forţe, putem considera fiecare punct M ca mişcându-se liber sub acţiunea unei singure forţe R, zisă *forţă motrice* sau *forţă efectivă* şi rezultând din compunerea rezultantei F a forţelor direct aplicate cu rezultanta Q a forţelor de legătură.

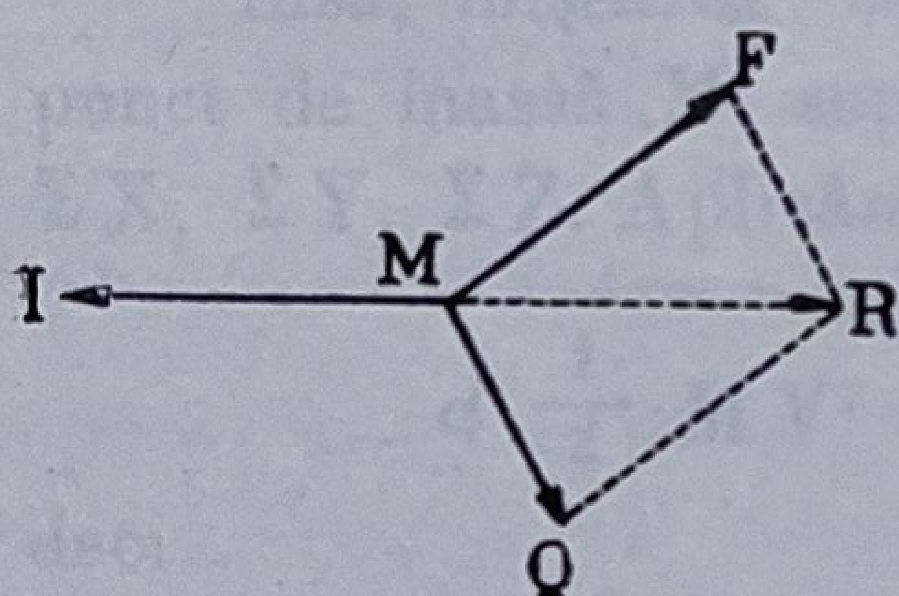


Fig. 153

Ori, potrivit principiului lui *d'Alembert,* dacă în mod fictiv introducem *forţa de inerţie* I, care este egală şi direct opusă rezultantei R a forţelor F şi Q, punctul este în echilibru sub acţiunea celor 3 forţe F, Q şi I, aşa că aplicaţiunea teoremei travaliului virtual la întregul sistem, pentru deplasările compatibile cu legăturile, ne dă, socotind forţele I ca forţe direct aplicate:

$$(1) \qquad \Sigma\,[\,F\,\delta s \cos(F, \delta s) + I\,\delta s \cos(I, \delta s)\,] = 0$$

ecuaţie, în care nu intră forţele de legătură şi unde δs reprezintă o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile în momentul considerat.

Putem privi ecuaţia (1) ca conţinând în mod implicit toate legile echilibrului şi mişcărei sistemelor materiale.

Astfel, teorema travaliului virtual, care ne dă toate legile de echilibru, ne permite, asociindu-i principiul lui d'Alembert, să aducem orice chestiune de mişcare la o chestiune de echilibru.

Exemplu. Ştim că pentru ca un solid care are un ax fix să fie în echilibru, este necesar şi suficient ca suma momentelor forţelor direct aplicate, în raport cu axul fix, să fie nulă, şi această condiţie rezultă din aplicaţia ecuaţiei generale

$$\Sigma \mathrm{F}\, \delta s \cos(\mathrm{F}, \delta s) = 0 .$$

Aplicaţia ecuaţiei (1) ne va conduce deci la concluzia, că ecuaţia mişcării solidului în jurul axului fix se va obţine, asociând forţelor direct aplicate forţele de inerţie şi scriind că suma momentelor ambelor categorii de forţe în raport de axul fix este nulă.

Vom da mai jos această ecuaţie.

2. **Ecuaţiile mişcării punctelor.** Cum componentele forţei de inerţie a unui punct, pe trei axe cordonate, sunt:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\ -m\frac{d^2y}{dt^2},\ -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

travaliul ei virtual este

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m\frac{d^2y}{dt^2}\delta y - m\frac{d^2z}{dt^2}\delta z$$

aşa că avem

$$\sum \mathrm{I}\,\delta s \cos(\mathrm{I}, \delta s) = -\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right).$$

Cum pe de altă parte, însemnând prin X, Y, Z componentele forţei F, avem egalitatea:

$$\Sigma \mathrm{F}\,\delta s \cos(\mathrm{F}, \delta s) = \Sigma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,\delta z)$$

rezultă că ecuaţia (1) se poate scrie

$$\sum(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z) = \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

sau, sub formă mai strânsă,

$$(2)\quad \sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=o$$

δx, δy, δz corespunzând la deplasări virtuale compatibile cu legăturile în momentul t.

Această ecuaţie, ca şi ecuaţia (1) cu care este echivalentă, poate fi privită ca *ecuaţia generală a Mecanicei.*

In particular, din ecuaţia (2) rezultă, că dacă cunoaştem ecuaţiile de echilibru ale unui sistem cu legături, obţinem imediat ecuaţiile mişcării acestui sistem înlocuind în ecuaţiile de echilibru componentele X, Y, Z prin

$$X-m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y-m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z-m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Astfel, revenind asupra exemplului de mai sus, dacă un solid are două puncte fixe, ştim, că luând ca ax Oz dreapta care uneşte cele două puncte, condiţia de echilibru este

$$\Sigma\,(xY-yX)=o.$$

Ecuaţia mişcării solidului în jurul axului fix, va fi deci

$$\sum\left[x\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)-y\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right]=o$$

care se poate scrie

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum\,(xY-yX)$$

semnul Σ din membrul întâi referindu-se absolut la toate punctele sistemului, pe când Σ din membrul al doilea priveşte numai punctele unde se găsesc aplicate forţe.

Cu privire la ecuaţia generală (2) este esenţial de remarcat că deoarece aplicaţiunea teoremei travaliului virtual presupune punctele ca fiind în echilibru în momentul t, variaţiile δx, δy, δz corespund la deplasările compatibile cu legăturile din *momentul t considerat ca fix.* Rezultă, că dacă ecuaţiile de legătură conţin în mod explicit pe t, *se va considera t constant când se diferenţiază aceste ecuaţii* în scopul determinării relaţiilor dintre variaţiile δx, δy, δz.

Fie astfel:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0 \tag{2}$$

ecuaţiile de legătură, funcţii de cele $3n$ cordonate ale punctelor şi de timpul t.

Diferenţierea lor ne dă

$$(4) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z \right) = 0 \\ \sum \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z \right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_k}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_k}{\partial z} \delta z \right) = 0. \end{cases}$$

Din aceste ecuaţii, în număr de k, putem trage valorile a k variaţii în funcţie de celelalte $3n - k$; substituindu-le în ecuaţia (2) va rezulta o ecuaţie coprinzând $3n - k$ variaţii arbitrare şi coeficienţii acestor variaţii vor trebui egalaţi cu zero.

Se va obţine astfel un număr de $3n - k$ ecuaţii, care împreună cu cele k ecuaţii (3) vor constitui un grup de $3n$ ecuaţii la care trebue să satisfacă cordonatele punctelor sistemului. Va rămâne să putem integra ecuaţiile diferenţiale obţinute.

3. **Metoda multiplicatorilor**. Putem efectua eliminarea variaţiilor prin metoda multiplicatorilor *(Lagrange)*.

In acest scop, să înmulţim la rând ecuaţiile (4) cu λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ şi să adunăm rezultatele astfel obţinute cu ecuaţia (2); obţinem

$$\left. \begin{aligned} &\sum \left(X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x \\ + &\sum \left(Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y \\ + &\sum \left(Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \end{aligned} \right\} = 0.$$

Ori, putem profita de nedeterminarea celor k multiplicatori

λ pentru a anula coeficienţii a k dintre cele $3n$ variaţii care figurează în ecuaţie. Rămân atunci $3n$-k variaţii şi acestea fiind arbitrare, coeficienţii lor vor trebui egalaţi cu zero. In definitiv, suntem conduşi de a anula pe toţi cei $3n$ coeficienţi ai ecuaţiei de mai sus. Va rezulta astfel un sistem de $3n$ ecuaţii, dintre cari trei oarecare au forma următoare:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_h\frac{\partial f_k}{\partial y} \\ m\frac{dz^2}{dt^2} &= Z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z}\,. \end{aligned}\right.$$

Cele $3n$ ecuaţii împreună cu cele k ecuaţii de legătură (3) formează împreună un sistem de $3n+k$ ecuaţii la care trebue să satisfacă cele $3n+k$ necunoscute, constituite de cele $3n$ cordonate şi cei k multiplicatori λ.

4. Calculul forţelor de legătură. Metoda multiplicatorilor dă şi forţele de legătură. In adevăr ecuaţiile (5) sunt acelea ale mişcărei unui punct liber supus forţei direct aplicate X, Y, Z şi unei forţe având ca componente pe cele 3 axe

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x}$$

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y}$$

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z}\,.$$

Aceste expresiuni sunt deci componentele forţei totale de legătură care lucrează asupra punctului x, y, z.

Termenii

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}, \qquad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}, \qquad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

reprezintă componentele forţei de legătură care lucrează asupra punctului considerat în virtutea legăturei $f_1 = 0$ şi deasemenea pentru termenii următori.

5. Aplicaţiunea principiului lui d'Alembert la sistemele de puncte libere. Plecând dela ecuaţia generală (2) putem regăsi

toate teoremele pe care le-am stabilit pentru un sistem de puncte libere.

a). Fie în adevăr n numărul de puncte libere. Ne existând legături, cele $3n$ variaţii δx, δy, δz sunt complect arbitrare, aşa că toţi coeficienţii lor trebuesc egalaţi cu zero. Se obţin astfel ecuaţiile

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X\ ,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y\ ,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

scrise pentru toate cele n puncte. Obţinem deci ecuaţiile diferenţiale ale mişcărei tuturor punctelor.

b). Să luăm ca deplasare virtuală o translaţie paralelă cu axul Ox. Atunci toţi δx sunt egali între ei iar δy şi δz sunt nuli. Ecuaţia (2) ne dă în consecinţă

$$\delta x \sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0$$

adică

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X$$

şi aceasta este una din ecuaţiile din care rezultă teorema cantităţilor de mişcare proectate pe un ax (sau teorema mişcării centrului de greutate).

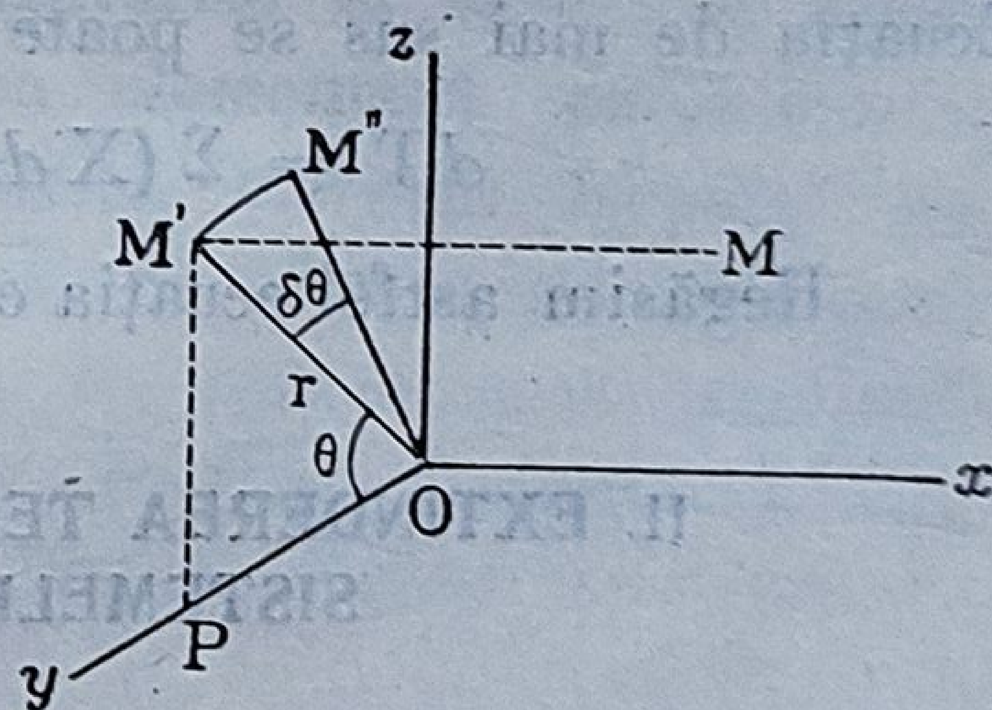


Fig. 154

c). Să luăm ca deplasare virtuală o rotaţie în jurul axului Ox. In această rotaţie, un punct oarecare M descrie un arc elementar de cerc, indentic cu acela pe care îl descrie proecţia sa M' pe planul yOz. Ori, avem pe figură,

$$OP = y = r\cos\theta\ ,\qquad M'P = z = r\sin\theta$$

deci

$$\delta y = -r\sin\theta\,\delta\theta = -z\,\delta\theta\ ,\qquad \delta z = r\cos\theta\,\delta\theta = y\,\delta\theta$$

$\delta\theta$ fiind deplasarea unghiulară. Inlocuind pe δy şi δz prin aceste valori, şi cum $\delta x = 0$, ecuaţia (2) devine

$$\delta\theta\sum\left[\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)(-z) + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)y\right] = 0$$

adică

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum (yZ - zY).$$

Această ecuaţie este una dintre acelea ce ne-au servit la stabilirea teoremei momentelor cantităţilor de mişcare (sau a ariilor).

d). Insfârşit să luăm deplasările virtuale δx, δy, δz egale cu deplasările efective dx, dy, dz. Ecuaţia (2) ne va da

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Ori, dacă însemnăm prin T forţa vie a sistemului, avem

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

şi, în consecinţă, prin diferenţiere,

$$dT = \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}\right)dt =$$

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right).$$

Ecuaţia de mai sus se poate deci scrie

$$dT = \Sigma (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Regăsim astfel ecuaţia care corespunde teoremei forţelor vii.

II. EXTINDEREA TEOREMELOR GENERALE LA SISTEMELE CU LEGĂTURI.

1. Când un sistem material este cu legături, putem întotdeauna să înlocuim legăturile prin forţe şi să tratăm apoi sistemul ca un sistem de puncte libere. Nimic nu ne împiedecă atunci de a-i aplica cele 3 teoreme generale; *este însă interesant de a vedea dacă forţele de legătură vor apărea sau nu totdeauna în aceste teoreme, căci ele sunt în general necunoscute.*

In cele două dintâi teoreme, am spus că forţele interioare nu figurează pentru simplul motiv că ele sunt egale două câte două şi direct opuse; când se va întâmplà la fel cu forţele de legătură, nici acestea nu vor figura în ecuaţii. Aşa spre exem-

plu dacă unele puncte ale sistemului sunt obligate de a rămâne la distanţe invariabile unele de altele, forţele de legătură sunt două câte două egale şi direct opuse şi putem aplica cele două teoreme generale fără a ne ocupa de legături.

Insă, dacă va fi vorba de mişcări de puncte pe curbe sau suprafeţe, forţele care pot înlocui acţiunile acestor curbe şi suprafeţe intră în categoria forţelor exterioare obişnuite şi trebue a se ţine seama de ele.

Aşa dar, în fiecare caz, când voim a aplica unui sistem cu legături cele două dintâi teoreme generale, va trebui să examinăm la ce anume forţe corespund legăturile; dacă aceste forţe intră în categoria forţelor interioare, nu vom ţine seama de ele; dacă din potrivă lucrează ca forţe exterioare, le vom introduce în ecuaţii.

2. Să trecem acum la *teorema forţelor vii*. Potrivit celor văzute la stabilirea teoremei travaliului virtual, suma travaliurilor virtuale a forţelor de legătură este nulă pentru toate deplasările virtuale compatibile cu legăturile *în momentul considerat*. Dacă prin urmare, deplasarea elementară pe care o ia realmente sistemul, şi căreia i se aplică teorema forţelor vii, este în fiecare moment compatibilă cu legăturile, nu vom avea a ţine seamă de forţele de legătură în aplicaţiunea teoremei. Pentru ca aceasta să aibă însă loc, condiţia necesară şi suficientă este ca *ecuaţiile de legătură să nu conţină în mod explicit timpul* t.

In adevăr, deplasările virtuale δx, δy, δz, compatibile cu legăturile în momentul t, satisfac ecuaţiilor de forma

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \right) = 0$$

care se obţin diferenţiând ecuaţiile de legătură, în presupunerea că t rămâne constant, pe când deplasările reale dx, dy, dz pe care le ia sistemul în timpul dt, satisfac ecuaţiilor de forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) = 0 .$$

Deplasările elementare reale nu intră deci în categoria deplasărilor virtuale compatibile cu legăturile din momentul t, decât dacă $\frac{\partial f}{\partial t}$ este nul ori care ar fi t, adică dacă ecuaţiile de legătură nu conţin pe t în mod explicit.

Ca exemplu de ecuaţii de legătură conţinând în mod explicit timpul t, menţionăm pe acelea care ar exprima că unele puncte sunt obligate de a rămâne pe linii sau suprafeţe care schimbă în fiecare moment de formă sau de poziţie, sau amândouă în acelaşi timp. Astfel, cazul unui punct obligat de a rămâne pe un cerc a cărui rază creşte necontenit şi al căruia centru este fix sau mobil.

Aşa dar, în definitiv: *Când legăturile sunt independente de timp, teorema forţelor vii se aplică ţinând socoteală numai de forţele interioare şi exterioare iar nu şi de cele de legătură.*

III. ECUAŢIILE LUI LAGRANGE.

1. Să considerăm un sistem de n puncte materiale între cordonatele cărora există k ecuaţii de legătură, *putând conţine pe* t,

$$
(1) \left\{
\begin{aligned}
& f_1 (t ; x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; \ldots\ldots) = 0 \\
& f_2 (t ; x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; \ldots\ldots) = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& f_k (t ; x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; \ldots\ldots) = 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

Din aceste ecuaţii putem trage valorile a k cordonate în funcţie de celelalte $3n\text{-}k$. Fie $3n\text{-}k = r$; să scrim în mod arbitrar r noui ecuaţii între cele $3n$ cordonate,

$$
(2) \left\{
\begin{aligned}
& F_1 (x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; \ldots) = q_1 \\
& F_2 (x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; \ldots) = q_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& F_r (x_1 , y_1 , z_1 ; x_2 , y_2 , z_2 ; \ldots) = q_r .
\end{aligned}
\right.
$$

Ecuaţiile (1) şi (2) ne permit a exprima pe cele $3n$ cordonate în funcţie de t şi de r parametri arbitrari $q_1, q_2, \ldots q_r$, sub forma:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_r) \\ y = \psi(t, q_1, q_2, \ldots q_r) \\ z = \theta(t, q_1, q_2, \ldots q_r). \end{cases}$$

Este evident că ecuaţiile de legătură (1) se găsesc identic satisfăcute dacă înlocuim în ele pe x, y, z prin aceste expresiuni (3).

Dacă am cunoaşte expresiunile parametrilor, $q_1, q_2, \ldots q_r$ în funcţie de t, ecuaţiile mişcărei fiecăruia din puncte ar fi cunoscute şi deci problema mişcării sistemului rezolvată.

Lagrange a dat o metodă elegantă pentru a forma imediat ecuaţiile diferenţiale la care satisfac parametrii q.

9. **Observări preliminare**. In tot ce urmează, trebue a se deosebi cu atenţiune derivatele *totale* de derivatele *parţiale.*

Fie x o funcţie de t şi de parametrii q consideraţi ei înşăşi ca funcţii de t; vom însemna

1° prin x' sau $D_t x$, derivata totală a lui x în raport de t;

2° prin $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial q_r}$, derivatele parţiale ale lui x în raport de cantităţile $t, q_1, q_2, \ldots q_r$ considerate ca variabile independente.

Cu aceste notaţiuni, avem, luând derivatele totale ale cantităţilor x, y, z puse sub forma (3):

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_r} q'_r \\ y' = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_r} q'_r \\ z' = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_r} q'_r. \end{cases}$$

In aceste egalităţi, fiecare din derivatele parţiale ale lui x, y, z este funcţie de $t, q_1, q_2, \ldots q_r$. Egalităţile determină în consecinţă pe x', y', z' în funcţie de

$$t;\ q_1, q_2, \ldots q_r;\ q'_1, q'_2, \ldots q'_r.$$

Să stabilim acum două serii de identităţi de care vom avea nevoe în ceea ce va urma.

In acest scop să însemnăm respectiv prin q şi q' una oarecare din cantităţile $q_1, q_2, \ldots q_r$ şi $q'_1, q'_2, \ldots q'_r$. Ecuaţiile (4) ne dau imediat, observând că membrii ai doilea sunt funcţii lineare de q':

$$(5) \qquad \frac{\partial x'}{\partial q'} = \frac{\partial x}{\partial q}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial q'} = \frac{\partial y}{\partial q}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial q'} = \frac{\partial z}{\partial q}.$$

Acestea constituesc prima serie de identităţi ce voiam a stabili.

Tot din ecuaţiile (4) deducem

$$\frac{\partial x'}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1\, \partial q} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2\, \partial q} q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_r\, \partial q} q'_r$$

însă, pe de altă parte, cum $\frac{\partial x}{\partial q}$ este funcţie de $t, q_1, q_2, \ldots q_r$, avem direct, după regula generală a derivării,

$$D_t \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q\, \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q\, \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q\, \partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q\, \partial q_r} q'_r.$$

Aşa dar

$$(6) \qquad \frac{\partial x'}{\partial q} = D_t \frac{\partial x}{\partial q}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial q} = D_t \frac{\partial y}{\partial q}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial q} = D_t \frac{\partial z}{\partial q}.$$

Acestea constituesc seria a doua de identităţi de care vom avea nevoe.

10. **Ecuaţiile lui Lagrange.** Metoda multiplicatorilor dă ca ecuaţii diferenţiale pentru mişcarea unui sistem cu legături, ecuaţii de forma:

$$m\, D_t\, x' = X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x}$$

$$m\, D_t\, y' = Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y}$$

$$m\, D_t\, z' = Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}.$$

Să înmulţim respectiv aceste ecuaţii cu $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q}$ şi

dând cordonatelor x, y, z toţi indicii dela 1 la n iar pentru q considerând unul singur dintre indicii de la 1 la r, să adunăm toate ecuaţiile obţinute.

Vom observa, că în rezultat, termenii care conţin în factor pe λ de un indice oarecare, sunt nuli. In adevăr, termenul care se găseşte multiplicat spre exemplu cu λ_1 este

$$\sum \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} \right) \text{ adică } \frac{\partial f_1}{\partial q}.$$

Ori, ecuaţia de legătură $f_1 = 0$ fiind identic satisfăcută când înlocuim în ea cordonatele x, y, z prin expresiile lor (3), rezultă că $\frac{\partial f_1}{\partial q}$ este nul, ori care ar fi indicele lui q.

Dacă punem prin urmare

$$(7) \qquad \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q} + Y \frac{\partial y}{\partial q} + Z \frac{\partial z}{\partial q} \right) = Q$$

rezultatul în chestiune se reduce la egalitatea

$$\sum m \left(D_t\, x' . \frac{\partial x}{\partial q} + D_t\, y' . \frac{\partial y}{\partial q} + D_t\, z' . \frac{\partial z}{\partial q} \right) = Q$$

care este echivalentă cu cea următoare

$$D_t \sum m \left(x' \frac{\partial x}{\partial q} + y' \frac{\partial y}{\partial q} + z' \frac{\partial z}{\partial q} \right) - \sum m \left(x' . D_t \frac{\partial x}{\partial q} + y' . D_t \frac{\partial y}{\partial q} + z' . D_t \frac{\partial z}{\partial q} \right) = Q$$

şi aceasta, potrivit identităţilor (5) şi (6) se poate scrie

$$(8) \qquad D_t \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'} \right) - \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q} + y' \frac{\partial y'}{\partial q} + z' \frac{\partial z'}{\partial q} \right) = Q.$$

Să considerăm acum forţa vie a sistemului

$$T = \frac{1}{2} \sum m \, (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Inlocuind pe x', y', z' prin valorile (4), T devine o funcţie de

$$t;\ q_1,\ q_2, \ldots ;\ q_r;\ q'_1,\ q'_2, \ldots q'_r$$

aşa că avem

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q} + y'\frac{\partial y'}{\partial q} + z'\frac{\partial z'}{\partial q}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = \sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'}\right).$$

Rezultă că ecuaţia (8) se poate scrie pur şi simplu

$$D_t\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

Dând lui q şi lui q' toţi indicii dela 1 la r, obţinem următorul sistem de r ecuaţii diferenţiale

$$(9)\quad \begin{cases} D_t\dfrac{\partial T}{\partial q'_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ D_t\dfrac{\partial T}{\partial q'_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ D_t\dfrac{\partial T}{\partial q'_r} = \dfrac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r. \end{cases}$$

la care trebuie să satisfacă necunoscutele $q_1, q_2, \ldots q_r$.

Acestea sunt ecuaţiile lui Lagrange.

Din cele de mai sus rezultă, că pentru a forma aceste ecuaţii se va proceda în felul următor:

1°. Se vor pune cele $3n$ cordonate x, y, z sub forma

$$x = \varphi(t; q_1, q_2, \ldots q_r), \quad y = \psi(t; q_1, q_2, \ldots q_r), \quad z = \theta(t; q_1, q_2, \ldots q_r).$$

2°. Se vor efectua derivările parţiale

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1}; \ldots\ldots; \frac{\partial x}{\partial q_r}, \frac{\partial y}{\partial q_r}, \frac{\partial z}{\partial q_r}.$$

3°. Se vor forma expresiile

$$Q_1 = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial y_1}\right); \ldots; Q_r = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_r} + Y\frac{\partial y}{\partial q_r} + Z\frac{\partial z}{\partial q_r}\right).$$

4°. Se vor calcula derivatele totale ale cordonatelor x, y, z în funcţie de timp

$$x' = \varphi'(t; q_1, q_2, \ldots q_r; q'_1, q'_2, \ldots q'_r)$$

$$y' = \psi'(t; q_1, q_2, \ldots q_r; q'_1, q'_2, \ldots q'_r)$$

$$z' = \theta'(t; q_1, q_2, \ldots q_r; q'_1, q'_2, \ldots q'_r)$$

Dacă (ceea ce este mai rar) X, Y, Z sunt funcţii şi de x', y', z', se vor introduce aceste valori în expresiile Q_1, Q_2, ... Q_r.

5⁰. Se va forma

$$T = \sum \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

obţinându-se

$$T = F(t; q_1, q_2, \ldots q_r; q'_1, q'_2, \ldots q'_r).$$

6⁰. Se va calcula

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial q'_r} \text{ apoi } D_t \frac{\partial T}{\partial q'_1}, D_t \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \ldots D_t \frac{\partial T}{\partial q'_r} \text{ şi } \frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial q_r}.$$

7⁰. Se vor scrie ecuaţiile lui Lagrange, care vor trebui integrate. Valorile: $q_1, \ldots, q_r$ se vor purta în expresiile cordonatelor x, y, z dela numărul 1⁰.

11. Observaţii finale. 1) Componentele X, Y, Z fiind în general funcţii de t, de cele $3n$ cordonate x, y, z şi cele $3n$ prime derivate x', y', z', devin, prin aplicaţiunea formulelor (3) şi (4), funcţii de t, de $q_1, q_2, \ldots q_r$ şi de $q'_1, q'_2, \ldots q'_r$. In consecinţă, cantitățiţe Q definite prin formulele (7) sunt funcţii cunoscute de aceleaşi variabile.

Pe de altă parte, potrivit expresiilor (4), forţa vie

$$T = \frac{1}{2} \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

este o funcţie de gradul al doilea de $q'_1, q'_2, \ldots q'_r$. Derivata $\frac{\partial T}{\partial q'}$ este prin urmare o funcţie lineară de aceste variabile. Operaţia D_t introduce apoi derivatele de ordinul al doilea q''.

Aşa dar, în definitiv, ecuaţiile (9) sunt r ecuaţii diferenţiale simultanee de ordinul al 2-*lea*, determinând r cantităţi $q_1, q_2, \ldots q_r$ în funcţie de t şi de $2r$ constante arbitrare.

2) Din egalitatea

$$Q_1 = \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial z_1} \right)$$

deducem

$$Q_1 \delta q_1 = \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1.$$

Membrul al doilea al acestei egalităţi reprezintă travaliul

forţelor direct aplicate, într'o deplasare virtuală unde toţi parametri q rămân constanţi, afară de q_1.

Aşa dar: *Fie care dintre cantităţile* Q, *este câtul prin* δq *respectiv, al travaliului forţelor direct aplicate într'o deplasare virtuală unde nu variază decât* q.

3) Să înmulţim ecuaţiile (9) la rând, cu $\delta q_1, \ldots, \delta q_r$ şi apoi să le adunăm. Obţinem

$$(\alpha) \qquad \sum \left(D_t \frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} \right) \delta q = \sum Q \, \delta q \, .$$

Ori, $\Sigma \, Q \, \delta q$ reprezintă travaliul virtual $\Sigma \, (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)$ al forţelor direct aplicate; deci, comparând egalitatea (α) cu ecuaţia generală a Dinamicei

$$(\beta) \qquad \sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) = \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)$$

conchidem că ecuaţia (α) reprezintă însăşi ecuaţia (β) în care s'a înlocuit totul în funcţie de cei r parametri q[1]).

4) Dacă forţele direct aplicate admit o funcţie de forţe U, vom avea

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

şi formula (7) devine

$$Q = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \right) = \frac{\partial U}{\partial q} \, .$$

In consecinţă ecuaţiile (9) se scriu

$$D_t \frac{\partial T}{\partial q'_1} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_1}$$

$$D_t \frac{\partial T}{\partial q_2'} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$D_t \frac{\partial T}{\partial q'_r} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_r} \, .$$

---

[1]) Aceasta rezultă de altfel şi direct din simpla observaţie că ori transformăm ecuaţiile mişcărei puse sub forma multiplicatorilor lui Lagrange, ori transformăm prin acelaşi procedeu ecuaţia generală a Dinamicei (β) din care se deduc ecuaţiile metodei multiplicatorilor, rezultatul nu poate fi decât acelaşi.

IV. ECUAȚIILE LUI HAMILTON.

12. Ecuațiile lui Lagrange (9), care sunt de ordinul al 2-lea, pot deveni de ordinul 1-iu dacă se consideră $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ ca r noui necunoscute definite prin ecuațiile

$$(10) \qquad D_t q_1 = q'_1, \quad D_t q_2 = q'_2, \quad \ldots, \quad D_t q_r = q'_r.$$

Se obține atunci un sistem de $2r$ ecuații diferențiale de ordinul 1-iu coprinzând primele derivate ale funcțiilor q și q'.

Printr'o anumită schimbare de variabile, *Hamilton* a înlocuit acest sistem printr'un sistem de ecuații zise *canonice*, al cărora rol este fundamental în Mecanica analitică.

Vom presupune că *legăturile sunt independente de timp și că forțele direct aplicate admit o funcție de forțe* [1]).

13. Legăturile fiind independente de timp, cordonatele x, y, z nu mai conțin în mod explicit pe t. In consecință, expresiile (4) ale derivatelor x', y', z' au primii lor termeni $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ nuli și sunt atunci funcții omogene de gradul 1-iu în raport de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ așa că *forța vie* T *este funcție omogenă de gradul al 2-lea în raport de aceleași variabile.* Ca urmare, derivatele parțiale $\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial q'_r}$ sunt funcții lineare de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$.

Să punem

$$(11) \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_r} = p_r$$

și rezolvând acest sistem de ecuații în raport de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ să purtăm valorile aflate în ecuațiile (10) și (9). Să vedem ce devin aceste ecuații prin asemenea transformare.

Forța vie T și cantitățile Q care erau funcții de variabilele

$$q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_r$$
$$q'_1, \; q'_2, \; \ldots, \; q'_r$$

---

[1]) Transformarea lui Hamilton presupune că componentele forțelor direct aplicate sunt derivatele parțiale în raport de cordonate ale unei funcții U de cordonate și de timp, sau că există o funcție de forțe U care depinde atunci numai de cordonate iar nu și de timp. — Cazul cel mai interesant pentru aplicațiuni este acela când legăturile sunt independente de timp iar forțele direct aplicate admit o funcție de forțe.

24468 — 17

vor deveni funcţii de

$$q_1, q_2, \ldots, q_r$$
$$p_1, p_2, \ldots, p_r.$$

Cum derivatele lui T în raport de variabilele q nu sunt aceleaşi când T este funcţie de q şi q' sau când este funcţie de q şi p, vom însemna pe cele dintâi prin $\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)$ iar pe celelalte prin $\frac{\partial T}{\partial q}$.

Ori, T fiind funcţie omogenă de gradul al 2[lea] în raport de $q'_1, q'_2, \ldots q'_r$, avem identitatea

$$2\,T = \frac{\partial T}{\partial q'_1}\cdot q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2}\cdot q'_2 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q'_r}\cdot q'_r$$

şi prin urmare, potrivit egalităţilor (11),

$$2\,T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_r q'_r$$

ceea ce se poate scrie

$$T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots p_r q'_r - T.$$

Să diferenţiem ambii membri ai acestei ecuaţii, considerând pe T din membrul al doilea ca funcţie de variabilele q şi q'. Obţinem

$$\begin{aligned} dT = {} & p_1 dq'_1 + p_2 dq'_2 + \cdots + p_r dq'_r \\ & + q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 + \cdots + q'_r dp_r \\ & - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) dq_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) dq_2 - \cdots - \left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\right) dq_r \\ & - \frac{\partial T}{\partial q'_1} dq'_1 - \frac{\partial T}{\partial q'_2} dq'_2 - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q'_r} dq'_r. \end{aligned}$$

Însă, potrivit egalităţilor (11), termenii liniei a 4[a] distrug pe aceia ai liniei 1[a]; aşa dar

$$\begin{aligned} (12) \qquad dT = {} & q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 + \cdots + q'_r dp_r \\ & - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) dq_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) dq_2 - \cdots - \left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\right) dq_r. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, dacă considerăm pe T ca funcţie de p şi q, avem

$$\begin{aligned} (13) \qquad dT = {} & \frac{\partial T}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial T}{\partial p_2} dp_2 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial p_r} dp_r \\ & + \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_r} dq_r. \end{aligned}$$

Din comparaţia celor două expresiuni (12) şi (13) ale diferenţialei totale dT, rezultă

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = q'_1, \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = q'_2, \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial p_r} = q'_r$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right), \ldots, \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_r}\right)$$

ecuaţii ce se pot scrie, prin prescurtare,

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial p} = q' \\[2mm] \dfrac{\partial T}{\partial q} = -\left(\dfrac{\partial T}{\partial q}\right). \end{cases}$$

Ca concluzie finală, potrivit formulelor (11) şi (14), ecuaţiile (10) şi (9) dobândesc, prin transformarea efectuată, cele două forme

$$(15) \qquad \begin{cases} D_t\, q = \dfrac{\partial T}{\partial p} \\[2mm] D_t\, p + \dfrac{\partial T}{\partial q} = Q. \end{cases}$$

Dând literilor p, q, Q, în acelaşi timp, toţii indicii de 1 la r, vom obţine un sistem de $2r$ ecuaţii diferenţiale simultanee la care trebue să satisfacă cele $2r$ necunoscute p şi q.

14. Să presupunem, pe de altă parte, că forţele direct aplicate admit o funcţie de forţe U. Vom avea atunci, după cum s'a arătat la finele capitolului precedent,

$$Q = \frac{\partial U}{\partial q}$$

aşa că a doua din ecuaţiile (15) devine

$$D_t\, p + \frac{\partial\,(T-U)}{\partial\, q} = 0.$$

Insfârşit, dacă punem

$$T - U = H$$

şi dacă observăm că U fiind funcţie numai de cordonate nu

conţine variabilele p, avem $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}$, şi ecuaţiile (15) se vor putea scrie

$$D_t\, q = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$D_t\, p = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

ceea ce este echivalent cu

$$(16) \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Dând literilor p şi q indicii 1, 2, ..., r se obţine următorul sistem de $2r$ ecuaţii:

$$\begin{array}{c|c}
\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\
\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} & \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}.
\end{array}$$

Aceste ecuaţii date de ***Hamilton*** au primit numele de *ecuaţii canonice ale mişcării*. Ele prezintă sub forma cea mai generală ecuaţiile unei probleme de Mecanică, în care integrala forţelor vii îşi are aplicaţiune (legături independente de timp şi funcţie de forţe). Se vede, că două probleme de acest gen nu diferă una de alta decât prin numărul variabilelor şi forma funcţiei H.

In mod practic, pentru formarea ecuaţiilor lui *Hamilton* se va proceda în felul următor:

1⁰ Se formează

$$T = F(q_1, \ldots, q_r;\, q'_1, q'_2, \ldots, q'_r)$$

ca pentru ecuaţiile lui *Lagrange*.

2⁰ Se calculează derivatele $\frac{\partial T}{\partial q'}$ şi se scriu ecuaţiile

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \ldots\ldots, \frac{\partial T}{\partial q'_r} = p_r$$

care se rezolvă în raport de $q_1', q_2', \ldots, q'_r$.

3° Valorile q' astfel determinate se introduc în expresia forței vii T, care va deveni o funcție de $q_1, q_2, \ldots, q_r$ și $p_1, \ldots, p_r$.

4° Se va exprima funcția de forțe U în funcție de variabilele q_1, $q_2, \ldots, q_r$ și se va forma diferența $H = T - U$.

5° Se vor calcula derivatele

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_r}; -\frac{\partial H}{\partial q_1}, -\ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

și se vor scrie ecuațiile lui *Hamilton* care se vor integra.

15. **Notă.** Plecând dela ecuațiile (16) putem regăsi integrala forțelor vii. In adevăr, potrivit acestor ecuații, avem

$$\frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} = o.$$

Adunând cele r asemenea ecuații, ce se obțin dând variabilelor p și q indicii $1, 2, \ldots r$, găsim

$$D_t H = o \quad \text{adică} \quad H = \text{const.}$$

Ori, $H = T - U$ sau $H = T + V$, însemnând prin V potențialul. Regăsim astfel următoarea teoremă: *Când legăturile sunt independente de timp și când forțele direct aplicate admit un potențial, suma forței vii și a potențialului rămâne constantă pe tot timpul mișcării.*

V. TEOREME ASUPRA ECHILIBRULUI SISTEMELOR MATERIALE. [1]

Teoremele care urmează sunt referitoare la sistemele supuse la *legături independente de timp* și solicitate de *forțe care admit o funcție de forțe.*

16. **Teorema I.** ***Ori ce poziție a sistemului, pentru care funcția de forțe este maximă sau minimă, este o poziție de echilibru.***

Fie, în adevăr, $U(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n)$ funcția de forțe și $f_1 = o, f_2 = o, \ldots, f_k = o$ ecuațiile de legătură.

Dacă un sistem de valori (x, y, z) face pe U maxim sau

---

[1]) In mod logic, chestiunile de echilibru ar fi trebuit toate înglobate în Partea II-a a cursului, la capitolul *Echilibrului Sistemelor Materiale*. Chestiunile de față nu puteau fi însă așezate în acel loc, deoarece se bazează pe considerente de Dinamică a sistemelor materiale.

minim, avem după regula analitică cunoscută, pe de o parte

$$dU = 0$$

iar pe de altă parte

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \ldots, \quad df_k = 0 .$$

Avem, adică, următoarele ecuaţii la care trebue să satisfacă variaţiile cordonatelor:

$$\sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = 0$$

$$\sum \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) = 0$$

. . . .

$$\sum \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} dx + \frac{\partial f_k}{\partial y} dy + \frac{\partial f_k}{\partial z} dz \right) = 0 .$$

Ori, înlocuind pe dx, dy, dz prin δx, δy, δz ecuaţiile acestea sunt tocmai acelea pe care le-am obţine dacă am exprima că travaliul virtual al forţelor direct aplicate este nul pentru orice deplasare compatibilă cu legăturile. Ele exprimă deci condiţia de echilibru a sistemului.

17. **Teorema II.** ***Orice poziţie a sistemului pentru care funcţia de forţe este maximă, este o poziţie de echilibru stabil.***

O poziţie de echilibru este zisă stabilă, dacă deranjând foarte puţin sistemul din poziţia de echilibru şi abandonându-l apoi acţiunii forţelor, după ce mai întâi s'au imprimat punctelor sale viteze foarte mici, deplasările punctelor rămân necontenit foarte apropiate de poziţiile lor de echilibru. Cu alte cuvinte se pot determina astfel de poziţiuni vecine de poziţiile de echilibru şi astfel de viteze ce să se imprime punctelor, încât deplasările acestora, sub acţiunea forţelor aplicate, să rămână coprinse între nişte limite date, oricât de mici.

Să însemnăm prin literele a, b, c afectate de indicii dela 1 la n, cordonatele punctelor în poziţia de echilibru şi prin literele α, β, γ afectate de aceiaşi indici, creşterile cordonatelor a, b, c, când se trece dela poziţia de echilibru la o altă po-

ziţie a sistemului. Pentru această din urmă poziţie, valoarea funcţiei de forţe poate fi pusă sub forma [1]).

$U(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma; \ldots) = U(a, b, c; \ldots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma; \ldots)$

şi, prin ipoteză, $U(a, b, c; \ldots)$ este un maximum.

Vom observa că funcţia φ se bucură de proprietăţile următoare:

1^0 ea tinde către zero, odată cu $\alpha, \beta, \gamma; \ldots$;

2^0 ea rămâne pozitivă când $\alpha, \beta, \gamma; \ldots$ sunt destul de mici şi, în particular, când sunt mai mici decât limitele date, pe care le vom însemna prin $l, m, n, \ldots$, în valoare absolută.

Aceasta stabilit, să deranjăm puţin sistemul din poziţia sa de echilibru. Fie $a+\alpha_0, b+\beta_0, c+\gamma_0; \ldots$ noile cordonate ale punctelor şi

$$U(a, b, c; \ldots) - \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \ldots)$$

noua valoare a funcţiei de forţe.

In această poziţie, considerată ca poziţie iniţială, să dăm tuturor punctelor viteze foarte mici, abandonând apoi sistemul la acţiunea forţelor ce-i sunt aplicate. Sistemul se pune în mişcare; fie $a+\alpha, b+\beta, c+\gamma; \ldots$ cordonatele punctelor sale după un timp oarecare t şi

$$U(a, b, c; \ldots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma; \ldots)$$

valoarea respectivă a funcţiei de forţe.

Insemnând prin T forţa lui vie din acel moment şi prin T_0 forţa vie corespunzătoare poziţiei iniţiale, avem potrivit teoremei forţelor vii:

$$T + \varphi(\alpha, \beta, \gamma; \ldots) = T_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \ldots)$$

sau

$$T = T_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \ldots) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma; \ldots). \tag{1}$$

In funcţia $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; \ldots)$ să dăm lui α valoarea sa limită l şi să variem pe $\beta, \gamma; \ldots$ între limitele lor $-m$ la $+m$, $-n$ la $+n$; ... însă fără a atinge aceste limite. Să dăm apoi

[1]) Prin $U(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma; \ldots)$ se va înţelege $U(a_1+\alpha_1, b_1+\beta_1, c_1+\gamma_1; \ldots; a_n+\alpha_n, b_n+\beta_n, c_n+\gamma_n)$ şi aşa mai departe.

lui α valoarea $-l$ şi să repetăm aceiaşi operaţie. In locul lui α să luăm acum pe β, căruia să-i dăm succesiv valorile limită $+m$ şi $-m$, variind celelalte litere între limitele lor fără însă a le atinge, şi aşa mai departe. Fie A cea mai mică dintre valorile pe care le va lua funcţia φ prin asemenea operaţii.

Să alegem poziţiile iniţiale ale punctelor şi forţa vie iniţială T_0 aşa fel încât

$$(2) \qquad T_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \ldots) < A$$

sau

$$(2)^{bis} \qquad T_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \ldots) = A - \varepsilon$$

ε fiind pozitiv.

Aceasta este totdeauna posibil căci funcţia $\varphi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \ldots)$ tinde spre zero odată cu creşterile $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \ldots)$ şi forţa vie T_0 tinde şi ea spre zero odată cu vitezele iniţiale date punctelor.

Zic, că dacă condiţia (2) este îndeplinită, atunci $\alpha, \beta, \gamma; \ldots$ nu vor putea atinge limitele $l, m, n; \ldots$ luate pozitiv sau negativ.

In adevăr, dacă una dintre ele ar atinge limita sa respectivă, atunci funcţia $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; \ldots)$ ar deveni cel puţin egală cu A şi atunci egalitatea (1), ţinând socoteală de egalitatea $(2)^{bis}$, ne-ar da

$$T = (A - \varepsilon) - A = -\varepsilon$$

adică T ar fi negativ, ceea ce e imposibil.

In concluziune, condiţiile iniţiale pot fi determinate aşa fel ca deplasările să rămână coprinse între limitele date, ori cât de mici ar fi acestea, şi prin urmare echilibrul este stabil.

Demonstraţia de mai sus a fost dată de *Lejeune-Dirichlet*.

Dacă în loc de funcţia de forţe U, considerăm potenţialul $V = -U$, atunci teorema II se enunţă în felul următor: *Ori ce poziţie a sistemului pentru care potenţialul este minim, este o poziţie de echilibru stabil.*

18. **Aplicaţie la sistemele grele.** Să considerăm un sistem

cu legături independente de timp și să presupunem că acest sistem este supus numai acțiunei greutății.

Dacă P este greutatea totală și z înălțimea centrului de greutate deasupra unui plan orizontal de comparație, potențialul este Pz și toate pozițiile pentru care z este maxim sau minim sunt poziții de echilibru. In acelea unde z trece printr'un minimum, echilibrul este stabil.

Ca exemplu, să reluăm problema cu bara sprijinită pe două planuri înclinate.

D fiind mijlocul barei, pozițiile de echilibru vor corespunde maximului și minimului înălțimei Dd.

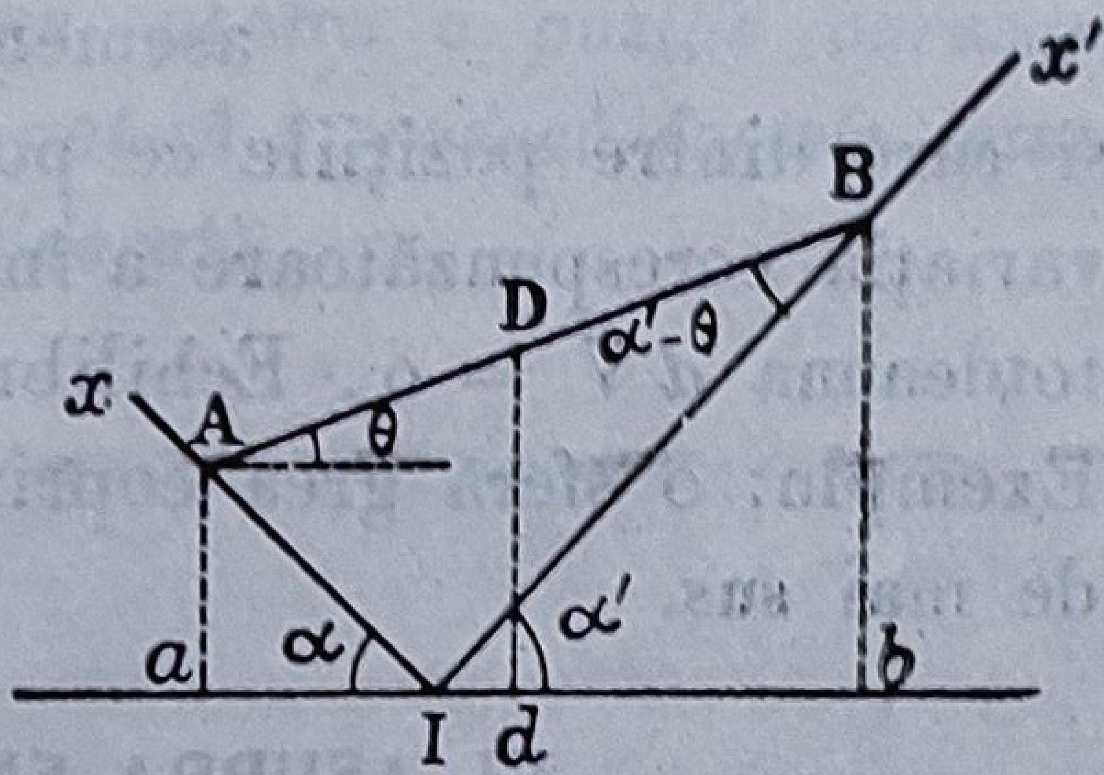


Fig. 155

Punând: $AB=2l$, $Dd=H$, $IA=x$ și $IB=x'$, figura ne dă imediat

$$2H = Aa + Bb = x \sin\alpha + x' \sin\alpha'$$

și

$$\frac{x}{\sin(\alpha'-\theta)} = \frac{x'}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{2l}{\sin(\alpha-\alpha')}.$$

In consecință,

$$H = \frac{l}{\sin(\alpha+\alpha')}\left[\sin\alpha \ \sin(\alpha'-\theta) + \sin\alpha' \ \sin(\alpha+\theta)\right].$$

Anulând prima derivată, se obține

$$-\sin\alpha \,.\, \cos(\alpha'-\theta) + \sin\alpha' \cos(\alpha+\theta) = 0$$

de unde se deduce

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\alpha \,.\, \sin\alpha'}.$$

Echilibrul este ne-stabil, căci înălțimea H corespunzătoare reprezintă un maximum [1]).

Dacă în loc de a se sprijini pe planuri, extremitățile barei

---

[1]) Derivata a doua $-\sin\theta \sin(\alpha'-\alpha)$ este negativă pentru valoarea θ găsită. Inlocuirea în această derivată a lui $\sin\theta$ în funcție de $\operatorname{tg}\theta$, ne dă, în adevăr, o fracție al cărei numitor este pozitiv iar numărătorul egal cu $-\sin^2(\alpha'-\alpha)$ deci negativ.

sunt obligate de a rămâne pe un cerc, se obţin două poziţii de echilibru AB şi A′B′, dintre care AB corespunde la echilibru ne-stabil, iar A′B′ la un echilibru stabil.

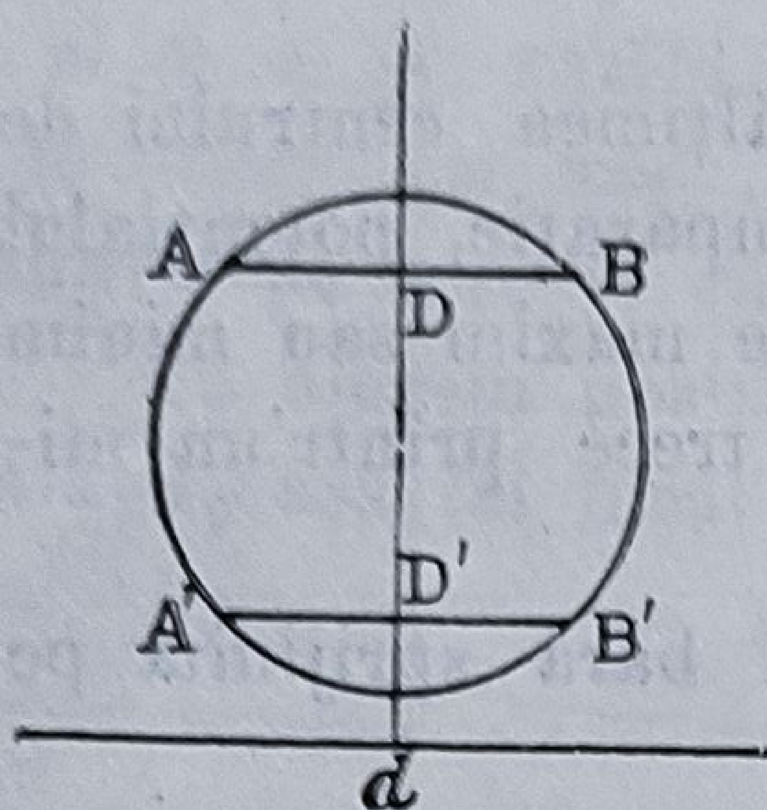


Fig. 156

Echilibru indiferent. Legăturile unui sistem material greu, asupra căruia nu lucrează alte forţe exterioare în afară de greutate, pot să fie astfel încât centrul de greutate al sistemului să rămână necontenit într'un acelaşi plan orizontal. Un asemenea sistem este în echilibru în ori şi care dintre poziţiile ce poate lua în virtutea legăturilor, căci, variaţia corespunzătoare a înălţimei H fiind egală cu zero, avem totdeauna $dV = 0$. Echilibrul în acest caz este zis indiferent. Exemplu: o sferă grea coprinsă între cele 2 planuri ale figurei de mai sus.

VI. ASUPRA ENERGIEI POTENŢIALE.

Fie un sistem material *supus numai la forţe interioare* şi să presupunem că aceste forţe admit un potenţial V_i, care reprezintă după cum ştim energia potenţială a sistemului.

Ori ce poziţie a sistemului pentru care V_i este minim, este, după cum am văzut, o poziţie de echilibru stabil. Să considerăm dintre valorile minime ale lui V_i, dacă sunt mai multe, pe cea mai mică dintre ele. Putem întotdeauna admite că această valoare este nulă, căci prin definiţiune

$$V_i = -U_i + C$$

şi putem dispune de constanta arbitrară C aşa fel ca V_i să fie nul pentru una din poziţiile sistemului. Fie C_m valoarea acestei constante. Pentru toate celelalte poziţii, V_i va fi atunci pozitiv şi egal cu $-U_i + C_m$.

Când sistemul trece dela o poziţie oarecare S de potenţial egal cu V_i, la poziţia S_m corespunzătoare lui minimum minimorum despre care am vorbit, avem, însemnând prin $\mathfrak{T}_i$ travaliul forţelor interioare,

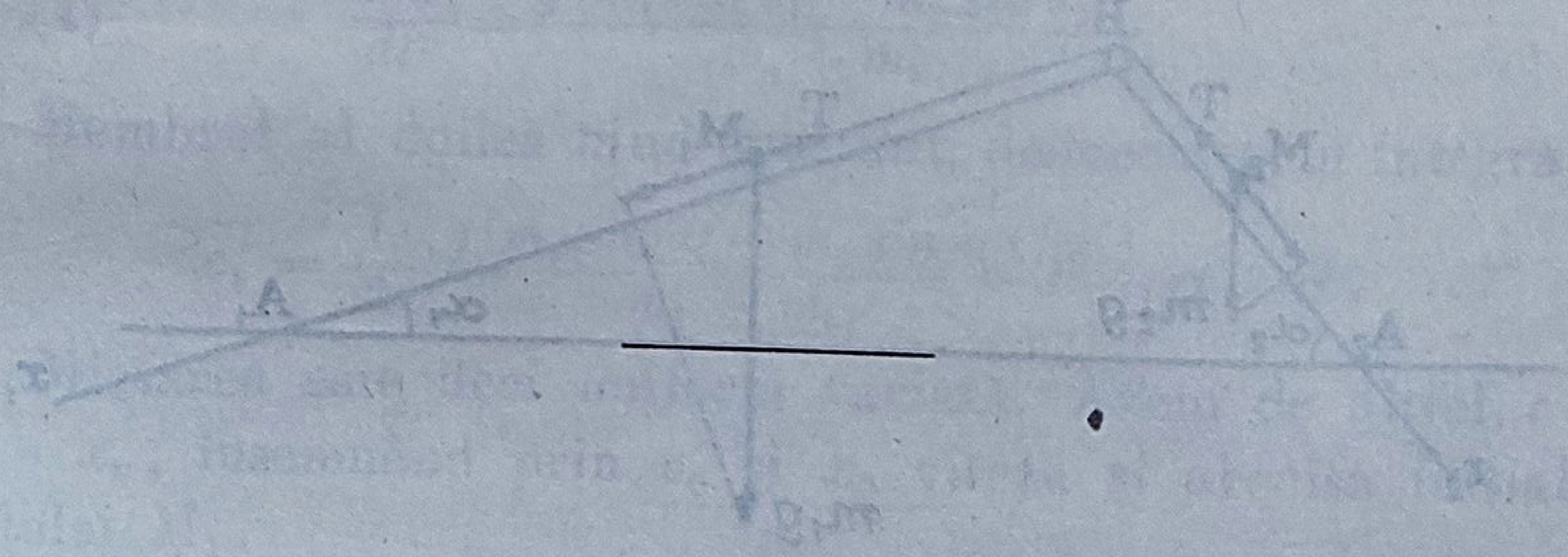
$$\mathfrak{T}_i = (-U_i + C_m)_s - (-U_i + C_m)_{S_m}$$

adică, pentru că termenul din paranteza a doua este nul,

$$\mathcal{T}_i = - U_i + C_m = V_i .$$

Cu alegerea făcută pentru valoarea constantei C care intră în expresia lui V_i, conchidem că energia potenţială a unui sistem, într'o poziţie oarecare, corespunde travaliului forţelor interioare când sistemul trece dela poziţia considerată la aceea unde energia potenţială are cea mai mică valoare. Găsim astfel o semnificare mai precisă a energiei potenţiale care se poate exprima în felul următor:

Energia potenţială a unui sistem, pentru o poziţie oarecare, este cel mai mare travaliu pe care pot să-l producă forţele interioare cu începere de la poziţia considerată.



III. APLICAȚIUNEA DIFERITELOR METODE LA REZOLVAREA UNEI PROBLEME DE DINAMICĂ.

PROBLEMA I.

Să se studieze mișcarea sistemului format de două puncte grele M_1 *și* M_2 *pe planurile înclinate* $A_1 B$, $B A_2$, *punctele fiind legate printr'un fir flexibil și inextensibil și presupunându-se că nu există frecare.*

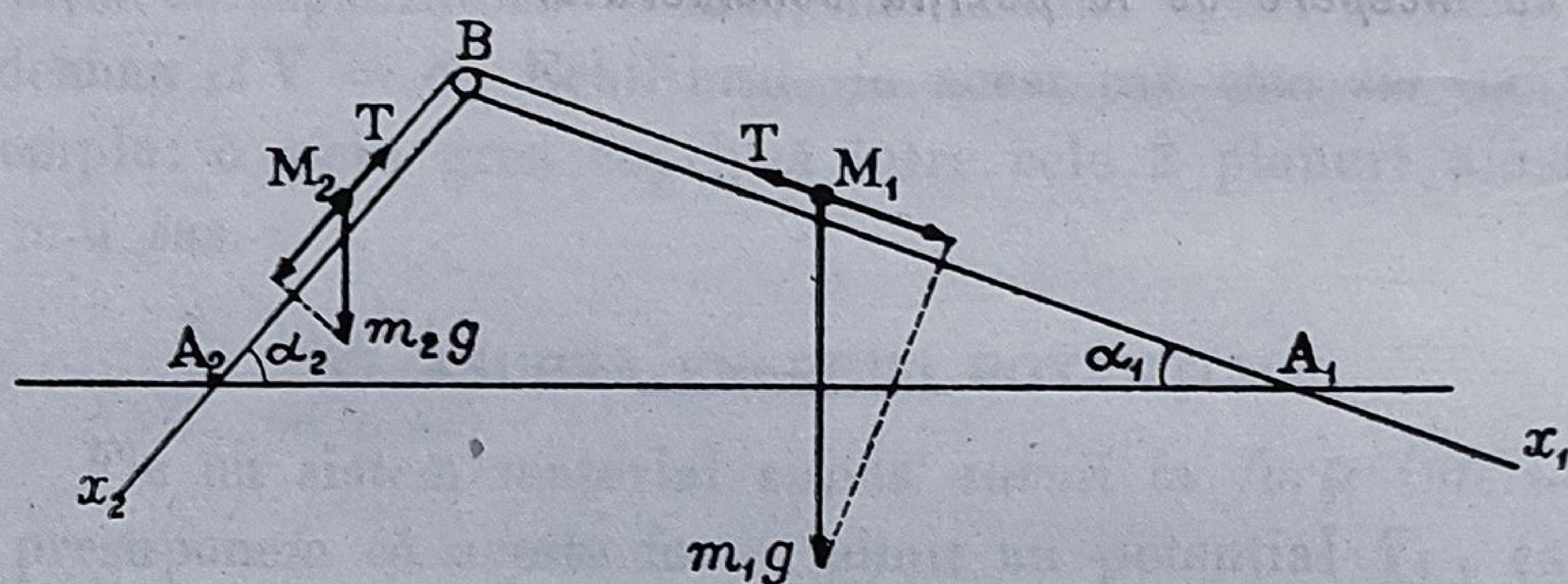


Fig. 157

1⁰. **Metoda forțelor de legătură.** Fie T tensiunea firului; punctul M_1 trage de punctul M_2 cu forța T aplicată în M_2 și invers, M_2 trage de M_1 cu aceiași forță T aplicată în M_1. Mișcările punctelor pot fi considerate ca efectuându-se liber pe direcțiile BA_1 și BA_2, sub acțiunea tensiunilor și a componentelor greutăților pe aceste direcții.

Ecuațiile mișcărei vor fi deci

(1) $$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g \sin \alpha_1 - T$$

(2) $$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g \sin \alpha_2 - T$$

cu ecuația de legătură

(3) $$x_1 + x_2 = l$$

însemnând prin l lungimea firului.

Mai putem zice că mișcarea este aceiași ca și cum punc-

tele s'ar mişca pe aceiaşi dreaptă Ox sub acţiunea forţelor $m_1 g \sin \alpha_1 - T$ şi $m_2 g \sin \alpha_2 - T$ cu condiţia $x_1 + x_2 = l$.

Cum din ecuaţia (3) deducem

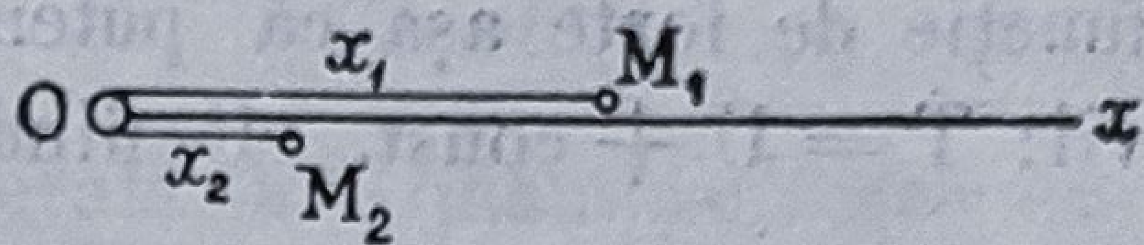


Fig. 158

$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ ecuaţia (2) se poate scrie

$$(2)^{\text{bis}} \qquad m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -m_2 g \sin \alpha_2 + T$$

şi eliminarea lui T între (1) şi (2) $^{\text{bis}}$ ne dă

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2}(m_1 + m_2) = m_1 g \sin \alpha_1 - m_2 g \sin \alpha_2$$

de unde

$$(4) \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2}.$$

Membrul al doilea fiind constant, deducem prin integraţiune

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2} t^2 + ct + c'.$$

Mişcarea este deci uniform variată. Avem de altfel, $c = v_0$ şi $c' = x_0$, însemnând prin v_0 şi x_0 viteza şi abscisa iniţială a punctului M_1.

Valoarea lui x_2 este, potrivit ecuaţiei de legătură, egală cu $l - x_1$.

Putem calcula şi tensiunea T. Ecuaţia (1) ne dă în adevăr

$$T = m_1 g \sin \alpha_1 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

şi înlocuind pe $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ prin expresia sa (4) obţinem

$$T = m_1 g \left(\sin \alpha_1 - \frac{m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2}{m_1 + m_2} \right)$$

adică

$$T = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2}.$$

Tensiunea este deci constantă pe tot timpul mişcării.

2°. **Aplicaţia teoremelor generale.** Sistemul fiind din cele zise cu legături complecte, nu avem nevoe decât de o singură ecuaţie pentru determinarea mişcării. Vom aplica teorema forţelor vii. Ea ne va da soluţia, căci pe de o parte legăturile fiind inde-

pendente de timp nu vom avea a ţine seama de forţele de legătură, iar pe de altă parte forţele direct aplicate admit o funcţie de forţe aşa că putem aplica direct integrala forţelor vii: $T = U + \text{const.}$, U fiind funcţia de forţe.

Ori, cum ecuaţia de legătură ne dă $\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}$ şi deci $\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2$, avem

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2.$$

Pe de altă parte,

$$U = (m_1 g \sin \alpha_1)\, x_1 + (m_2 g \sin \alpha_2)\, x_2$$

sau, înlocuind pe x_2 prin $l - x_1$,

$$U = g\,(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)\, x_1 + m_2\, gl \sin \alpha_2 .$$

Integrala forţelor vii este, în consecinţă,

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = g\,(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)\, x_1 + k,$$

însemnând prin k o constantă arbitrară.

Integraţiunea acestei ecuaţii ne conduce la acelaşi rezultat ca ecuaţia (4) de mai sus. In adevăr, dacă o derivăm, obţinem

$$(m_1 + m_2)\frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} = g\,(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)\frac{dx_1}{dt}$$

adică, simplificând,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{g\,(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2},$$

care este ecuaţia (4).

3°. Aplicaţiunea principiului lui d'Alembert.

a) Dacă n'ar fi mişcare, ecuaţia de echilibru ar fi, evident,

$$m_1\, g \sin \alpha_1 = m_2\, g \sin \alpha_2$$

deci ecuaţia mişcării este, introducând forţele de inerţie,

$$m_1\, g \sin \alpha_1 - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_2\, g \sin \alpha_2 - m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}.$$

adică

$$g\,(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) = (m_1 + m_2)\,\frac{d^2x_1}{dt^2}\;.$$

b) Dacă aplicăm ecuația generală a Dinamicei, care exprimă că suma travaliurilor virtuale a forțelor direct aplicate și a forțelor de inerție este nulă în deplasările compatibile cu legăturile, obținem

$$\left(m_1\,g \sin \alpha_1 - m_1\,\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)\delta x_1 + \left(m_2\,g \sin \alpha_2 - m_2\,\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)\delta x_2 = 0\;.$$

Cum însă $\delta x_2 = -\,\delta x_1$ și $\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\,\frac{d^2x_1}{dt^2}$, ecuația se scrie

$$\left[g\,(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) - (m_1 + m_2)\,\frac{d^2x_1}{dt^2}\right]\delta x_1 = 0\;.$$

Coeficientul lui δx_1 trebuind să fie nul, rezultă

$$g\,(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) = (m_1 + m_2)\,\frac{d^2x_1}{dt^2}\;.$$

c) Putem aplica și metoda multiplicatorilor, dacă, după cum am explicat mai sus, asimilăm mișcarea cu aceea care ar avea loc în lungul aceluiași ax Ox.

Aplicația numitei metode ne dă

$$m_1\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1\,g \sin \alpha_1 + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$m_2\,\frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2\,g \sin \alpha_2 + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_2}\;.$$

Ori, $f = x_1 + x_2 - l$; deci $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{d x_2} = 1$ așa încât

$$m_1\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1\,g \sin \alpha_1 + \lambda$$

$$m_2\,\frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2\,g \sin \alpha_2 + \lambda\;.$$

Regăsim astfel ecuațiile (1) și (2), λ reprezentând pe $-T$.

4°. Ecuaţii Lagrange. Avem $x_1 + x_2 = l$. Să punem de la noi $x_1 - x_2 = q$. Obţinem astfel sistemul

$$x_1 + x_2 = l\,, \qquad x_1 - x_2 = q$$

din care rezultă

$$x_1 = \frac{l+q}{2}\,, \qquad x_2 = \frac{l-q}{2}$$

In consecinţă,

$$\frac{\partial x_1}{\partial q} = \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial q} = -\frac{1}{2}$$

şi

$$Q = \Sigma X \frac{\partial x}{\partial q} = m_1 g \sin\alpha_1 \cdot \frac{1}{2} + m_2 g \sin\alpha_2 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

adică

$$Q = \frac{1}{2} g (m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2).$$

Pe de altă parte, $x'_1 = \frac{1}{2} q'$, $x'_2 = -\frac{1}{2} q'$ şi prin urmare

$$T = \frac{1}{2} \sum m x'^2 = \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\frac{q'}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{-q'}{2}\right)^2 \right]$$

adică

$$T = \frac{1}{8} (m_1 + m_2) q'^2.$$

Din această expresie a forţei vii, rezultă

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0\,, \quad \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) q'\,, \quad D_t \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{1}{4} (m_1 + m_2) \frac{d^2 q}{dt^2}.$$

Ecuaţia lui Lagrange este astfel

$$\frac{1}{4} (m_1 + m_2) \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{1}{2} g (m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2)$$

sau

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = 2 g \frac{m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2}{m_1 + m_2}$$

din care rezultă, prin integrațiune,

$$q = g \frac{m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2}{m_1 + m_2} t^2 + ht + h'.$$

Introducând această valoare în expresiunea lui x_1, găsim

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2} t^2 + ct + c'.$$

5°. **Ecuații Hamilton.** Plecând de la expresia de mai sus a forței vii:

$$T = \frac{1}{8} (m_1 + m_2) q'^2$$

vom pune

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = p \qquad \text{adică} \qquad \frac{1}{4} (m_1 + m_2) q' = p$$

de unde

$$q' = \frac{4p}{m_1 + m_2}$$

și, ca urmare,

$$T = \frac{1}{8} (m_1 + m_2) \left(\frac{4p}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{2p^2}{m_1 + m_2}.$$

Pe de altă parte

$$U = m_1 g x_1 \sin \alpha_1 + m_2 g x_2 \sin \alpha_2 = g \left(m_1 \sin \alpha_1 \frac{l+q}{2} + m_2 \sin \alpha_2 \frac{l-q}{2} \right)$$

deci

$$H = T - U = \frac{2p^2}{m_1 + m_2} - g \left(m_1 \sin \alpha_1 \frac{l+q}{2} + m_2 \sin \alpha_2 \frac{l-q}{2} \right)$$

și în consecință

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{4p}{m_1 + m_2}, \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{2} g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2).$$

Ecuațiile lui Hamilton vor fi

$$\frac{dq}{dt} = \frac{4p}{m_1 + m_2}, \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} g (m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2).$$

Ecuaţia a doua ne dă

$$p=\frac{1}{2}g(m_1\sin\alpha_1-m_2\sin\alpha_2)t+\frac{1}{4}h(m_1+m_2)$$

h fiind o constantă arbitrară. Introducând această valoare în ecuaţia întâia, obţinem

$$\frac{dq}{dt}=\frac{2g(m_1\sin\alpha_1-m_2\sin\alpha_2)}{m_1+m_2}t+h$$

de unde rezultă

$$q=g\frac{m_1\sin\alpha_1-m_2\sin\alpha_2}{m_1+m_2}t^2+ht+h'.$$

PROBLEMA II.

Să se studieze mişcarea într'un plan vertical a unei bare omogene, supusă greutăţii şi acţiunii unui cuplu.

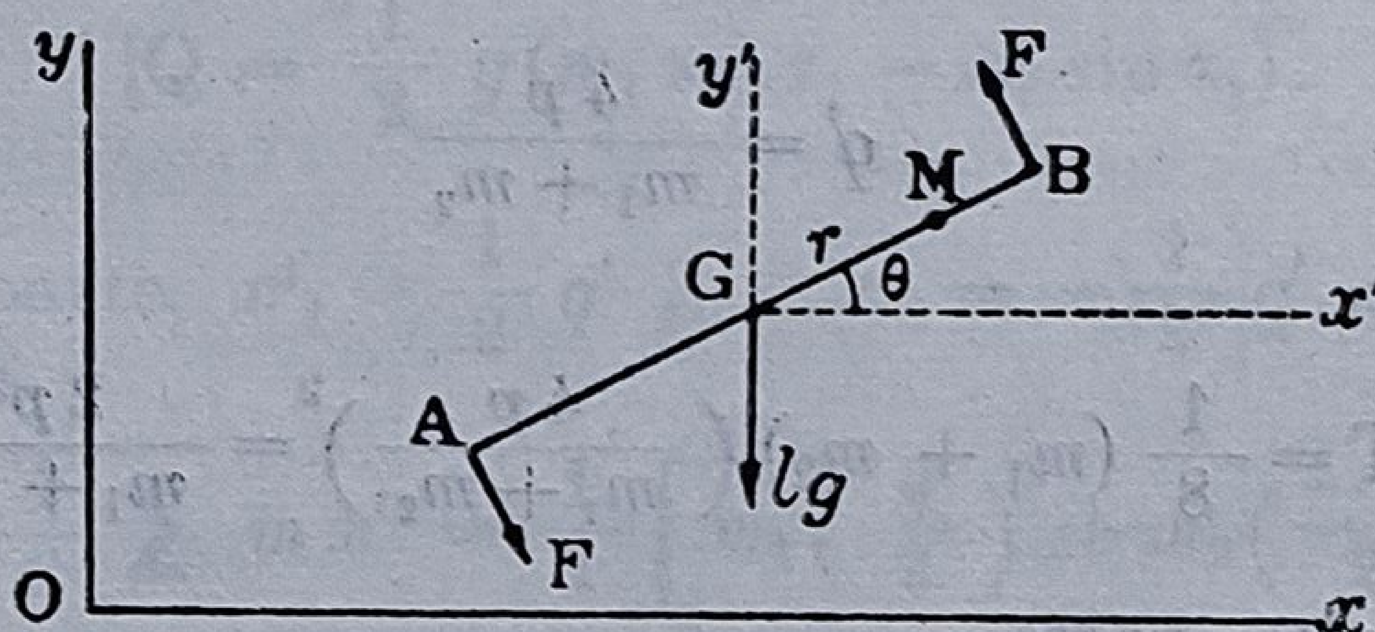


Fig. 159

Fie l lungimea barei. Ne având a compara densitatea barei AB cu aceea a unei alte bare de aceiaşi lungime, putem presupune densitatea egală cu unitatea; vom lua, în consecinţă, ca element de massă elementul de lungime dl şi atunci massa barei fiind egală cu l, greutatea ei va fi lg. Vom presupune, însfârşit, că cuplul este reprezentat prin două forţe F egale şi de sensuri opuse, perpendiculare în A şi B pe direcţia barei; momentul cuplului va fi deci Fl.

1°. **Mişcarea centrului de greutate**. Cum, cu notaţiile obişnuite, avem $\Sigma X=0$ şi $\Sigma Y=-lg=$ const., putem determina mişcarea centrului de greutate.

Ecuaţiile mişcărei acestui punct fiind

$$l\frac{d^2a}{dt^2}=0\,,\qquad l\frac{d^2b}{dt^2}=-lg$$

deducem

$$a=ct+c'\,,\qquad b=-\frac{1}{2}gt^2+ht+h'.$$

2°. **Teorema momentelor cantităţilor de mişcare.** Centrul de greutate G este evident la mijlocul barei. Să ducem prin G sistemul de axe $x'Gy'$ paralel cu xOy. Cum mişcarea punctului G este cunoscută, cunoaşterea mişcării barei nu mai pretinde decât determinarea unghiului θ de pe figură, în funcţie de timp.

Să aplicăm teorema momentelor cantităţilor de mişcare, în raport de sistemul mobil $x'Gy'$:

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)=\sum(x'\,\mathrm{Y}-y'\,\mathrm{X})\,.$$

M fiind un punct oarecare al barei, să punem $GM=r$; vom avea

$$x'=r\cos\theta\,,\qquad y'=r\sin\theta$$

$$\frac{dx'}{dt}=-r\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\,,\qquad \frac{dy'}{dt}=r\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\,.$$

Pe de altă parte, momentul greutăţii lg este nul în raport de G, iar momentul cuplului este egal cu $\mathrm{F}l$.

Formula (1) în care elementul de masă m este egal cu elementul de lungime dr, se scrie în consecinţă,

$$\frac{d}{dt}\sum dr\left(r^2\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt}+r^2\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}\right)=\mathrm{F}l$$

adică

$$\frac{d}{dt}\sum r^2\frac{d\theta}{dt}dr=\mathrm{F}l\,.$$

Insă $\frac{d\theta}{dt}$ fiind acelaşi pentru toate punctele barei, iese de sub semnul Σ, iar suma Σr^2dr trebuind efectuată asupra tuturor elementelor dr ale barei, dela A la B, devine integrala diferenţialei r^2dr luată între limitele $-\frac{l}{2}$ şi $+\frac{l}{2}$.

Avem deci

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r^2\,dr = \mathrm{F}\,l$$

şi, prin efectuarea derivării şi integraţiunii,

$$\frac{l^3}{12}\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathrm{F}\,l \qquad \text{sau} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{12\,\mathrm{F}}{l^2} = \mathrm{A}$$

însemnând prin A valoarea constantei $\frac{12\,\mathrm{F}}{l^2}$. Deducem

$$\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}t^2 + kt + k'.$$

Problema este deci complect rezolvată.

3°. **Teorema forţelor vii.** Să aplicăm teorema forţelor vii în mişcarea relativă în jurul punctului G:

$$d\sum \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \sum (\mathrm{X}\,dx' + \mathrm{Y}\,dy')$$

sau, mai pe scurt,

$$(2) \qquad d\,\mathrm{T}' = d\,\mathcal{T}'.$$

Avem

$$v' = r\,\frac{d\theta}{dt}, \quad \text{deci} \quad \mathrm{T}' = \sum \frac{1}{2}\,dr\left(r\,\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r^2 dr$$

adică

$$\mathrm{T}' = \frac{l^3}{24}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

In ce priveşte pe $d\,\mathcal{T}'$, ştim, că fiind vorba de o rotaţie, travaliul elementar al unei forţe este egal cu momentul forţei în raport de axul de rotaţie, înmulţit cu deplasarea unghiulară elementară. Deci

$$d\,\mathcal{T}' = \mathrm{F}l\,d\theta.$$

Aplicaţia formulei (2) ne dă prin urmare,

$$(3) \qquad d\cdot\frac{l^3}{24}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \mathrm{F}l\,d\theta$$

sau, efectuând diferenţiarea şi simplificând,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{12\,\mathrm{F}}{l^2}$$

valoare identică cu aceea obţinută mai sus.

Notă. Evident, că în loc de a efectua diferenţiarea în ecuaţia (3), putem ajunge la rezultat şi prin integraţiunea directă a acestei ecuaţii. Ea se poate scrie, în adevăr,

$$d\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,\mathrm{A}\,d\theta, \qquad \text{punând } \mathrm{A} = \frac{12\,\mathrm{F}}{l^2},$$

şi integraţiunea ne dă

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,\mathrm{A}\theta + k''.$$

Deducem succesiv

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2\,\mathrm{A}\theta + k''}, \quad \frac{2\,\mathrm{A}\,d\theta}{2\sqrt{2\,\mathrm{A}\theta + k''}} = \mathrm{A}\,dt, \quad \sqrt{2\,\mathrm{A}\theta + k''} = \mathrm{A}t + k,$$

$$2\,\mathrm{A}\theta + k'' = \mathrm{A}^2 t^2 + 2\,\mathrm{A}kt + k^2$$

de unde

$$\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}\,t^2 + kt + \frac{k^2 - k''}{2\,\mathrm{A}}$$

sau

$$\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}\,t^2 + kt + k',$$

punând $\dfrac{k^2 - k''}{2\,\mathrm{A}} = k'$.

Deci aceiaşi expresie ca la No. 2°.

PROBLEMA III.

Să se studieze mişcarea într'un plan vertical a unei bare omogenə şi grele, extremităţile A şi B ale barei fiind respectiv obligate de a descrie verticala Oy şi orizontala Ox.

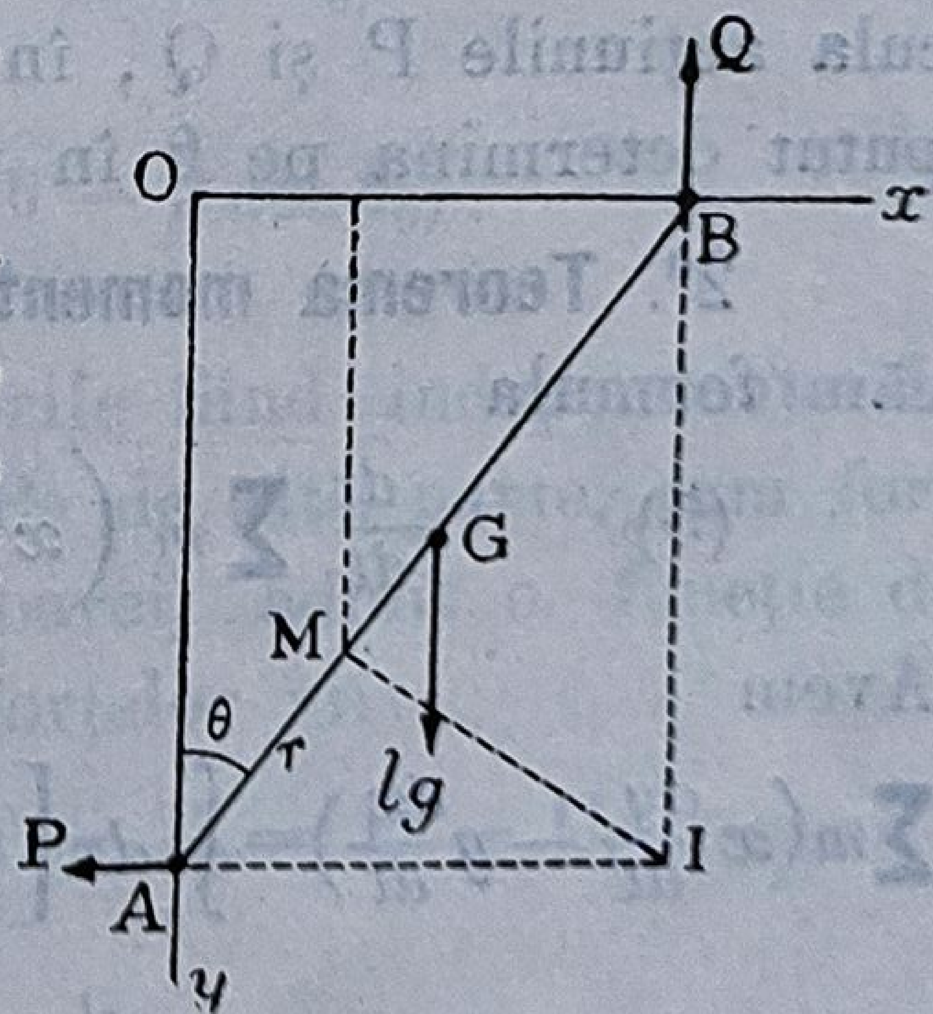


Fig. 160

M fiind un punct oarecare al barei, vom pune $\mathrm{AM} = r$ şi vom însemna prin l lungimea barei. Elementul de masă va fi reprezentat prin dr, ca şi în problema precedentă, greutatea barei fiind egală în consecinţă cu lg.

Avem

$$x = r\sin\theta, \qquad y = (l - r)\cos\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = r\cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = -(l-r)\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(r^2 + l^2\sin^2\theta - 2\,lr\sin\theta\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Punctul I fiind centrul instantaneu de rotaţie, putem scrie că $v = IM . \omega$. Ori $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ iar $\overline{IM}^2$ în triunghiul IAM este tocmai egal cu $r^2 + l^2 \sin^2 \theta - 2 lr \sin^2 \theta$.

1°. **Teorema cantităţilor de mişcare.** Fie P şi Q acţiunile normale ale dreptelor Oy şi Ox asupra barei în punctele A şi B, adică forţele de legătură. Avem

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = -P, \qquad \frac{d}{dt} \sum m \frac{dy}{dt} = lg - Q$$

Ori,

$$\sum m \frac{dx}{dt} = \int_0^l r dr \cos . \theta \frac{d\theta}{dt} = \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \int_0^l r\, dr = \frac{l^2}{2} \cos\theta \frac{d\theta}{dt},$$

$$\sum m \frac{dy}{dt} = \int_0^l dr\, (r - l) \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \int_0^l (r - l)\, dr = -\frac{l^2}{2} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Derivând şi înlocuind în ecuaţiile (1), aceste ecuaţii ne dau

$$(3) \qquad P = -\frac{l^2}{2} \left[\cos\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$(4) \qquad Q = lg + \frac{l^2}{2} \left[\sin\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right].$$

Teorema cantităţilor de mişcare ne permite deci de a calcula acţiunile P şi Q, în cazul când printr'o altă teoremă am putut determina pe θ în funcţie de t.

2°. **Teorema momentelor cantităţilor de mişcare.** Să aplicăm formula

$$(5) \qquad \frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \sum (xY - yX).$$

Avem

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \int_0^l dr \left[r \sin\theta . (r - l) \sin\theta \frac{d\theta}{dt} - (l - r) \cos\theta . r \cos\theta \frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= \frac{d\theta}{dt} \int_0^l r\,(r - l)\, dr = -\frac{l^3}{6} \frac{d\theta}{dt}$$

şi

$$\sum (xY - yX) = Pl \cos\theta - Ql \sin\theta + lg . \frac{l}{2} \sin\theta.$$

Deci, potrivit formulei (5),

$$-\frac{l^3}{6}\frac{d^2\theta}{dt^2} = Pl\cos\theta - Ql\sin\theta + \frac{l^2}{2}g\sin\theta$$

adică

$$l^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = 6(Q\sin\theta - P\cos\theta) - 3\,lg\sin\theta\,.$$

Să înlocuim în această ecuaţie pe P şi Q prin expresiile lor (3) şi (4). Obţinem după efectuarea tuturor calculelor,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l}\sin\theta\,. \tag{6}$$

Această ecuaţie ne este cunoscută dela mişcarea pendulului circular. Unghiul θ variază deci după aceiaşi lege.

Dacă înmulţim ambii membri ai ecuaţiei (6) cu $2\frac{d\theta}{dt}dt$ şi integrăm, obţinem, presupunând viteza unghiulară iniţială nulă,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)\,. \tag{7}$$

Insfârşit, introducând valorile (6) şi (7) în expresiile (3) şi (4) ale acţiunilor P şi Q, găsim

$$P = \frac{3\,lg}{4}\sin\theta\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

$$Q = \frac{lg}{4} + \frac{3\,lg}{4}\cos\theta\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\,.$$

3°. **Teorema forţelor vii.** Legăturile fiind independente de timp, putem aplica această teoremă. Pe de altă parte, cum forţele direct aplicate (adică greutatea barei) admit o funcţie de forţe, putem scrie imediat integrala forţelor vii:

$$T = U + \text{const.} \qquad \text{sau} \qquad T - T_0 = U - U_0\,.$$

Ori

$$T = \sum \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\int_0^l dr\,(r^2 + l^2\sin^2\theta - 2\,lr\sin^2\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left[\int_0^l r^2\,dr + l\sin^2\theta\int_0^l (l - 2r)\,dr\right]$$

adică

$$T = \frac{l^3}{6}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Pe de altă parte, cum ordonata punctului G este egală cu $\frac{l}{2}\cos\theta$, funcţia de forţe U are ca expresie

$$U = lg \cdot \frac{l}{2}\cos\theta .$$

Integrala forţelor vii este prin urmare

$$\frac{l^3}{6}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{l^2 g}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

adică

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

presupunând viteza unghiulară iniţială nulă, adică $T_0 = o$.

Regăsim deci direct ecuaţia (7) de mai sus.

4°. Ecuaţii Lagrange. Expresiile cordonatelor x şi y ale unui punct oarecare M fiind

$$x = r\sin\theta, \qquad y = (l - r)\cos\theta$$

θ va reprezenta pe q din ecuaţiile lui Lagrange.

Avem succesiv, observând că pentru un element dr, forţa direct aplicată este greutatea $Y = g\,dr$,

$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = (r - l)\sin\theta$$

$$Q = \Sigma Y\frac{\partial y}{\partial\theta} = \Sigma g\,dr.(r - l)\sin\theta = g\sin\theta\int_o^l (r - l)\,dr = -\frac{l^2 g}{2}\sin\theta$$

$$T = \frac{l^3}{6}\theta'^2, \quad \frac{\partial T}{\partial\theta'} = \frac{l^3}{3}\theta', \quad D_t\frac{\partial T}{\partial\theta'} = \frac{l^3}{3}\frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial\theta} = o.$$

Deci, ecuaţia lui Lagrange este

$$\frac{l^3}{3}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{l^2 g}{2}\sin\theta$$

adică

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l}\sin\theta$$

care este ecuaţia (6).

5⁰. Ecuaţii Hamilton. Punând

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = p \qquad \text{adică} \quad \frac{l^3}{3}\theta' = p$$

deducem

$$\theta' = \frac{3\,p}{l^3} \quad \text{şi prin urmare} \quad T = \frac{l^2}{6}\left(\frac{3\,p}{l^3}\right)^2 = \frac{3p^2}{2\,l^3}\,.$$

Pe de altă parte, cum

$$U = \frac{l^2\,g}{2}\cos\theta$$

avem

$$H = T - U = \frac{3}{2\,l^3}\,p^2 - \frac{l^2\,g}{2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{3}{l^3}\,p\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{l^2\,g}{2}\sin\theta\,.$$

Ecuaţiile lui Hamilton vor fi în consecinţă

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{l^3}\,p\,, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{l^2\,g}{2}\sin\theta\,.$$

Dacă derivăm ecuaţia întâia în raport de t şi înlocuim în ea pe $\frac{dp}{dt}$ prin valoarea sa, obţinem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3}{l^3}\left(-\frac{l^2\,g}{2}\sin\theta\right)$$

adică

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3\,g}{2\,l}\sin\theta\,.$$

6⁰. Ecuaţia generală a Dinamicei. Să aplicăm însfârşit ecuaţia generală a Dinamicei:

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y\right] = 0\,. \tag{8}$$

Avem mai întâi

$$X = 0\,, \qquad Y = g\,dr$$

apoi din egalităţile

$$\frac{dx}{dt} = r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,, \qquad \frac{dy}{dt} = (r - l)\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

deducem

$$\frac{d^2x}{dt^2}=r\left(\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-\sin\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\right);\ \frac{d^2y}{dx^2}=(r-l)\left(\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}+\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\right).$$

Pe de altă parte

$$\delta x=r\cos\theta\,\delta\theta,\qquad \delta y=(r-l)\sin\theta\,\delta\theta.$$

Cu aceste valori, ecuaţia (8) se scrie:

$$\sum\Big[-dr\,.\,r\left(\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-\sin\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)r\cos\theta+$$

$$\left\{g\,dr-dr\,(r-l)\left(\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}+\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)\right\}(r-l)\sin\theta\Big]\delta\theta=0$$

şi rezultă

$$-\cos\left(\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-\sin\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)\int_0^l r^2\,dr+g\,\sin\theta\int_0^l(r-l)\,dr-$$

$$\sin\theta\left(\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}+\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)\int_0^l(r-l)^2\,dr=0.$$

Această ecuaţie, în care

$$\int_0^l r^2\,dr=\frac{l^3}{3},\qquad \int_0^l(r-l)\,dr=-\frac{l^2}{2},\qquad \int_0^l(r-l)^2\,dr=\frac{l^3}{3}$$

se reduce la

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{3\,g}{2\,l}\sin\theta$$

termenii în $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ reducându-se.

Metoda multiplicatorilor conduce, dacă adunăm toate ecuaţiile în x şi toate ecuaţiile în y, la cele două ecuaţii:

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2}=-P.$$

$$\sum m\frac{d^2y}{dt^2}=lg-Q$$

care corespund teoremei cantităţilor de mişcare.

PROBLEMA IV.

Să se studieze mişcarea unei bare omogene şi grele OA, care are punctul O fix.

Vom lua ca axe sistemul dreptunghiular $Oxyz$, axul Oz fiind vertical și îndreptat în sensul greutății.

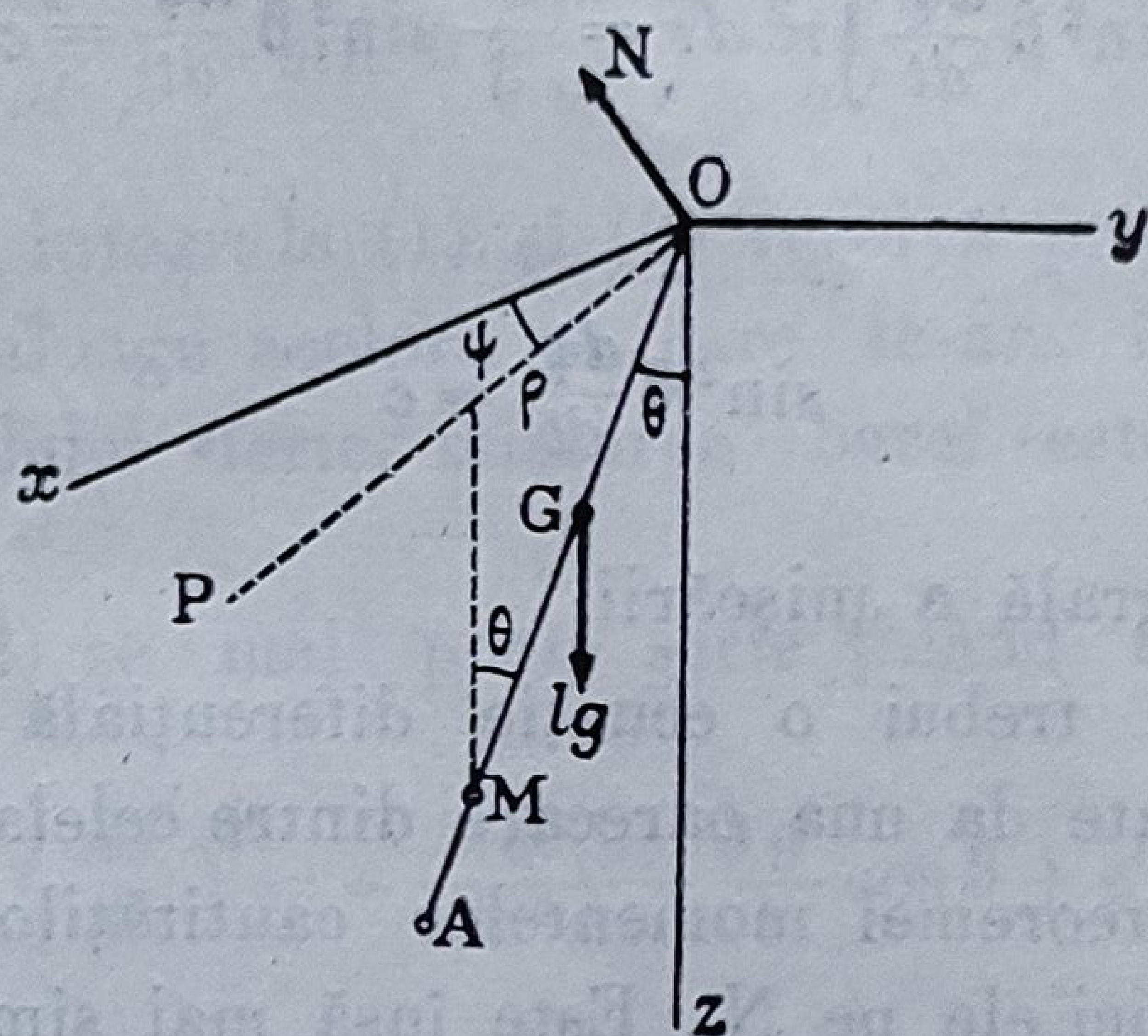


Fig. 161

Fie OP intersecția planului vertical dus prin OA cu planul Oxy.

M fiind un punct oarecare al barei, dacă însemnăm lungimea OM prin r, avem pe figură,

$$x = \rho \cos\psi = r \sin\theta \cos\psi$$

$$y = \rho \sin\psi = r \sin\theta \sin\psi$$

$$z = r \cos\theta .$$

1°. **Teorema momentelor cantităților de mișcare**. Bara poate fi considerată ca liberă sub acțiunea greutății ei și a unei forțe N aplicată în O. Cum momentele ambelor forțe sunt nule în raport de axul Oz, avem

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0 .$$

și prin urmare

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c .$$

Aceasta este echivalent cu a zice că teorema ariilor are loc pentru planul Oxy, adică

$$\sum m \rho^2 \frac{d\psi}{dt} = c$$

şi înlocuind pe ρ prin $r \sin\theta$,

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}\int_0^l r^2\,dr = \frac{l^3}{3}\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = c$$

deci în definitiv

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = c \tag{1}$$

care este o integrală a mişcării.

Ne-ar mai trebui o ecuaţie diferenţială în θ şi ψ. Pe aceasta ne-o poate da una oarecare dintre celelalte două ecuaţii care corespund teoremei momentelor cantităţilor de mişcare şi care nu conţin nici ele pe N. Este însă mai simplu de a aplica teorema forţelor vii care ne dă o à doua integrală a mişcării, căci forţele direct aplicate admit o funcţie de forţe.

2°. **Teorema forţelor vii**. Avem, utilizând cordonatele cilindrice:

$$v^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\rho\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$$

adică

$$v^2 = r^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right]$$

deci

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\int_0^l v^2\,dr = \frac{l^3}{6}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right].$$

Pe de altă parte, cum cota centrului de greutate G este egală cu $\frac{l}{2}\cos\theta$, funcţia de forţe este

$$\mathrm{U} = lg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta .$$

Integrala forţelor vii este în consecinţă

$$\frac{l^3}{6}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = \frac{l^2 g}{2}\cos\theta + c'$$

sau, mai simplu,

$$(2) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \frac{3\,g}{l}\cos\theta = c'.$$

Cele două integrale (1) și (2) rezolvă problema, în sensul că ele fiind analoage acelora pe care le-am întâlnit la studiul mișcărei pendulului sferic, mișcarea barei este și ea analoagă acestei mișcări.

Ecuația (2) se mai poate scrie ținând socoteală de ecuația (1):

$$(2)^{\text{bis}} \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{c^2}{\sin^2\theta} + \frac{3\,g}{l}\cos\theta + c'.$$

3°. **Ecuații Lagrange.** Vom lua drept parametri q_1 și q_2 pe θ și ψ. Ori, din $z = r\cos\theta$, deducem

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = -r\sin\theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial\psi} = 0$$

și, cum $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g\,dr$, rezultă

$$Q_1 = \sum Z\frac{\partial z}{\partial\theta} = -g\sin\theta\int_0^l r\,dr = -\frac{l^2 g}{2}\sin\theta$$

$$Q_2 = \sum Z\frac{\partial z}{\partial\psi} = 0.$$

Pe de altă parte, după cum s'a văzut mai sus,

$$T = \frac{l^3}{6}(\theta'^2 + \sin^2\theta\,.\,\psi'^2)$$

deci

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = \frac{l^3}{3}\theta', \qquad D_t\frac{\partial T}{\partial\theta'} = \frac{l^3}{3}\frac{d^2\theta}{dt^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{l^3}{3}\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi'} = \frac{l^3}{3}\sin^2\theta\,.\,\psi', \qquad \frac{\partial T}{\partial\psi} = 0.$$

Ca urmare, ecuațiile lui Lagrange se scriu

$$\frac{l^3}{3}\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{l^3}{3}\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = -\frac{l^2 g}{2}\sin\theta$$

$$D_t\left(\frac{l^3}{3}\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\right) = 0.$$

Ecuația a doua ne dă

$$\sin^2\theta \cdot \frac{d\psi}{dt} = c$$

care este integrala (1).

Dacă în ecuația întâia, simplificată cu l^2, înlocuim pe $\frac{d\psi}{dt}$ prin $\frac{c}{\sin^2\theta}$, obținem

$$(3) \qquad 2\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2c^2\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{3g}{l}\sin\theta .$$

Inmulțind ambii membri cu $\frac{d\theta}{dt}dt$ și integrând, găsim

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{c^2}{\sin^2\theta} + \frac{3g}{l}\cos\theta + c'$$

care este integrala (2) pusă sub forma (2)$^{\text{bis}}$.

4⁰. **Ecuații Hamilton**. Plecând dela expresia forței vii

$$T = \frac{l^3}{6}(\theta'^2 + \sin^2\theta\,\psi'^2)$$

vom pune

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = \frac{l^3}{3}\theta' = p_1 \qquad \text{deci} \quad \theta' = \frac{3p_1}{l^3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi'} = \frac{l^3}{3}\sin^2\theta\,.\,\psi' = p_2 \qquad \text{„} \quad \psi' = \frac{3p_2}{l^3\sin^2\theta}$$

și prin urmare

$$T = \frac{3}{2l^3}\left(p_1{}^2 + \frac{p_2{}^2}{\sin^2\theta}\right).$$

Pe de altă parte

$$U = \frac{l^2}{2}g\cos\theta$$

așa că

$$H = T - U = \frac{3}{2l^3}\left(p_1{}^2 + \frac{p^2{}_2}{\sin^2\theta}\right) - \frac{l^2}{2}g\cos\theta .$$

Deducem

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{3}{l^3}p_1 , \qquad \frac{\partial H}{\partial\theta} = -\frac{3\cos\theta}{l^3\sin^3\theta}p_2{}^2 + \frac{l^2}{2}g\sin\theta$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{3}{l^3\sin^2\theta}p_2 , \qquad \frac{\partial H}{\partial\psi} = 0 .$$

Ecuaţiile Hamilton sunt în consecinţă

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{l^3} p_1 , \qquad \frac{dp_1}{dt} = \frac{3 \cos\theta}{l^3 \sin^3\theta} p_2{}^2 - \frac{l^2}{2} g \sin\theta$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3}{l^3 \sin^2\theta} p_2 , \qquad \frac{dp_2}{dt} = 0 .$$

Ultima ecuaţie dă $p_2 = c$, deci $\frac{d\psi}{dt} = \frac{3c}{l^3 \sin^2\theta}$, sau

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \text{const.}$$

care este integrala (1) de mai sus.

Dacă dividem ecuaţia a doua prin ecuaţia întâia şi separăm variabilele, obţinem

$$2 p_1 dp_1 = \left(\frac{2c^2 \cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{l^5 g}{3} \sin\theta \right) d\theta$$

şi integrând,

$$p_1{}^2 = - \frac{c^2}{\sin^2\theta} + \frac{l^5 g}{3} \cos\theta + c'$$

valoare, care introdusă în ecuaţia întâia ridicată la patrat, ne dă

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(- \frac{c^2}{\sin^2\theta} + \frac{l^5 g}{3} \cos\theta + c' \right) \left(\frac{3}{l^3}\right)^2$$

adică, băgând factorii numerici în constantele arbitrare,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = - \frac{c^2}{\sin^2\theta} + \frac{3g}{l} \cos\theta + c' .$$

Regăsim deci integrala (2) pusă sub forma (2) bis.

5⁰. **Principiul lui d'Alembert.** Condiţiile generale de echilibru ale unui solid care are un punt fix, fiind

$$\Sigma (yZ - zY) = 0 , \qquad \Sigma (zX - xZ) = 0 , \qquad \Sigma (xY - yX) = 0$$

ecuaţiile mişcării se obţin înlocuind respectiv în aceste trei egalităţi pe X, Y, Z prin

$$X - m \frac{d^2x}{dt^2} , \qquad Y - m \frac{d^2y}{dt^2} , \qquad Z - m \frac{d^2z}{dt^2} .$$

Prin asemenea operaţie regăsim însă cele 3 ecuaţii din care rezultă teorema momentelor cantităţilor de mişcare, de care ne-am ocupat la No. 1.

Să calculăm valoarea forţei N *din punctul* O. In virtutea principiului lui d'Alembert, există echilibru între forţele direct aplicate, forţele de legătură şi forţele de inerţie. Fiind vorba de un solid, aceste condiţii de echilibru se exprimă prin 6 ecuaţii, dintre care cele 3 ale proecţiilor sunt:

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{N}_x \, , \qquad \sum m \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{N}_y \, , \qquad \sum m \frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{N}_z + lg$$

iar cele 3 ale momentelor sunt chiar ecuaţiile din care rezultă teorema momentelor cantităţilor de mişcare. Acestea nu conţin însă pe N aşa că nu ne interesează în chestiunea de faţă.

In definitiv dar, aplicăm teorema cantităţilor de mişcare presupunând bara liberă.

Scriind ecuaţiile precedente sub forma

$$\frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = \mathrm{N}_x \, , \quad \frac{d}{dt} \sum m \frac{dy}{dt} = \mathrm{N}_y \, , \quad \frac{d}{dt} \sum m \frac{dz}{dt} = \mathrm{N}_z + lg$$

vom înlocui pe m prin dr şi pe $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ prin valorile lor în funcţie de θ şi ψ, apoi vom efectua integraţiunile şi vom deriva rezultatele aflate.

Să calculăm spre exemplu pe N_z. Avem

$$\sum m \frac{dz}{dt} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \int_0^l r\,dr = -\frac{l^2}{2} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

şi prin urmare, derivând,

$$-\frac{l^2}{2}\left(\sin\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos\theta \frac{d\theta^2}{dt^2}\right) = \mathrm{N}_z + lg \, .$$

Inlocuind pe $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ şi pe $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ prin expresiile lor (2) bis şi (3), se obţine după efectuarea operaţiilor,

$$\mathrm{N}_z = -\frac{lg}{4}(1 + 9\cos^2\theta) - \frac{l^2}{2} c' \cos\theta \, .$$

PROBLEMA V.

Să se studieze mişcarea unui punct de massă m, obligat de a aluneca fără frecare pe o curbă care variază în fiece moment de poziţie şi chiar de formă.

Fie

$$f_1(x, y, z, t) = 0$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0$$

ecuaţiile curbei variabile şi X, Y, Z componentele forţei direct aplicată mobilului. Vom scrie sistemul de ecuaţii:

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z}\delta z = 0$$

şi eliminând pe δx, δy, δz vom obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea în x, y, z, t care împreună cu cele două ecuaţii ale curbei va determina pe x, y, z în funcţie de t.

Dacă voim a calcula şi forţa de legătură, va fi avantajos de a aplica metoda multiplicatorilor.

Teorema forţelor vii nu se poate aplica, căci legăturile depind de timpul t. Se pot însă aplica ecuaţiile lui Lagrange.

Exemplu. ***Să se determine mişcarea unui punct obligat de a rămâne pe o dreaptă, care se învârteşte într'un plan în jurul unuia din punctele sale, tangenta unghiului de rotaţie variind proporţional cu timpul.***

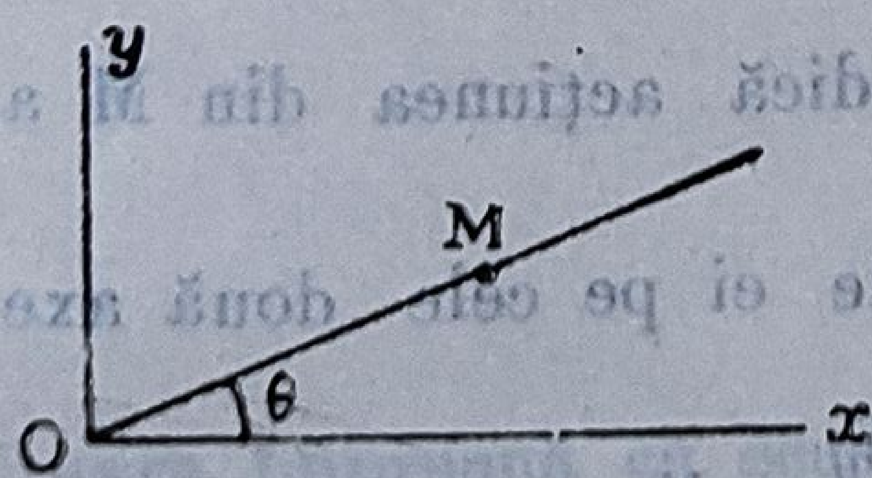


Fig. 162

Se dă deci $\operatorname{tg}\theta = kt$. Intr'un moment oarecare, ecuaţia dreptei este prin urmare

$$(1) \qquad y = ktx.$$

Cum nu există forţă direct aplicată, avem $X = 0$, $Y = 0$. Aplicaţia metodei de mai sus ne dă în consecinţă sistemul de două ecuaţii

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y = 0$$

$$\delta y = kt\,\delta x$$

şi eliminarea lui δx şi δy ne procură ecuaţia diferenţială

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + kt\frac{d^2y}{dt^2} = 0\,.$$

Insă din ecuaţia (1) deducem

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2k\frac{dx}{dt} + kt\frac{d^2x}{dt^2}$$

aşa că ecuaţia (2) se poate scrie

$$\left(1 + k^2t^2\right)\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,k^2t\,\frac{dx}{dt} = 0\,.$$

Această ecuaţie trebue integrată. Punând $\frac{dx}{dt} = p$, avem succesiv

$$(1 + k^2t^2)\frac{dp}{dt} + 2\,k^2t\,p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\,k^2t}{1 + k^2t^2}\,dt$$

$$\text{Log}\ p = -\text{Log}\ (1 + k^2t^2) + \text{Log}\ c$$

$$p = \frac{dx}{dt} = \frac{c}{1 + k^2t^2}\,, \qquad dx = \frac{c}{k}\cdot\frac{k\,dt}{1 + k^2t^2}$$

$$x = \frac{c}{k}\ \text{arctg}\ kt + c'.$$

Ca urmare, ecuaţia (1) dă

$$(3) \qquad y = ct\ \text{arctg}\ kt + c'kt\,.$$

Să calculăm forţa de legătură, adică acţiunea din M a dreptei asupra punctului.

Insemnând prin X_1 şi Y_1 proecţiile ei pe cele două axe avem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X_1\,, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y_1$$

căci mişcarea se execută sub singura acţiune a acestei forţe.

Este însă preferabil de a aplica metoda multiplicatorilor [1]) care, având în vedere că ecuaţia de legătură este $y - ktx = o$, ne dă

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda kt \ , \qquad m \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda$$

valoarea forţei fiind

$$\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = \lambda \sqrt{1 + k^2t^2} \ .$$

Va fi deci suficient să calculăm pe λ.

Ori, din egalitatea (3) deducem

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2\,ck}{(1 + k^2t^2)^2} .$$

In consecinţă

$$Y_1 = \lambda = \frac{2\,cmk}{(1 + k^2t^2)^2} \ , \qquad X_1 = -\lambda kt = -\frac{2\,cmk^2t}{(1 + k^2t^2)^2}$$

şi însfârşit

$$\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = \lambda \sqrt{1 + k^2t^2} = \frac{2\,cmk\sqrt{1 + k^2t^2}}{(1 + k^2t^2)^2} \ .$$

PROBLEMA VI.

Să se studieze mişcarea unui punct obligat de a se mişca fără frecare pe o suprafaţă variabilă.

Fie

$$f\,(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t) = o$$

ecuaţia suprafeţii.

Metoda multiplicatorilor procură cele 3 ecuaţii

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m \frac{d^2z}{dt} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

care împreună cu ecuaţia suprafeţii determină pe x, y, z, λ în funcţie de t.

---

[1]) Am fi putut utiliza din capul locului numai această metodă.

Cantitățile $\lambda \frac{\partial f}{\partial x}$, $\lambda \frac{\partial f}{\partial y}$, $\lambda \frac{\partial f}{\partial z}$ sunt componentele acțiunii suprafeței asupra punctului și intensitatea acestei acțiuni are ca valoare

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Ca și în cazul problemei V nu se poate aplica teorema forțelor vii.

Exemplu. ***Să se determine mișcarea unui punct greu, obligat de a rămâne într'un plan care se învârtește cu o mișcare uniformă în jurul unui ax orizontal.***

Să luăm axul orizontal de rotație drept ax Ox, axul Oz fiind vertical și îndreptat în sensul greutății.

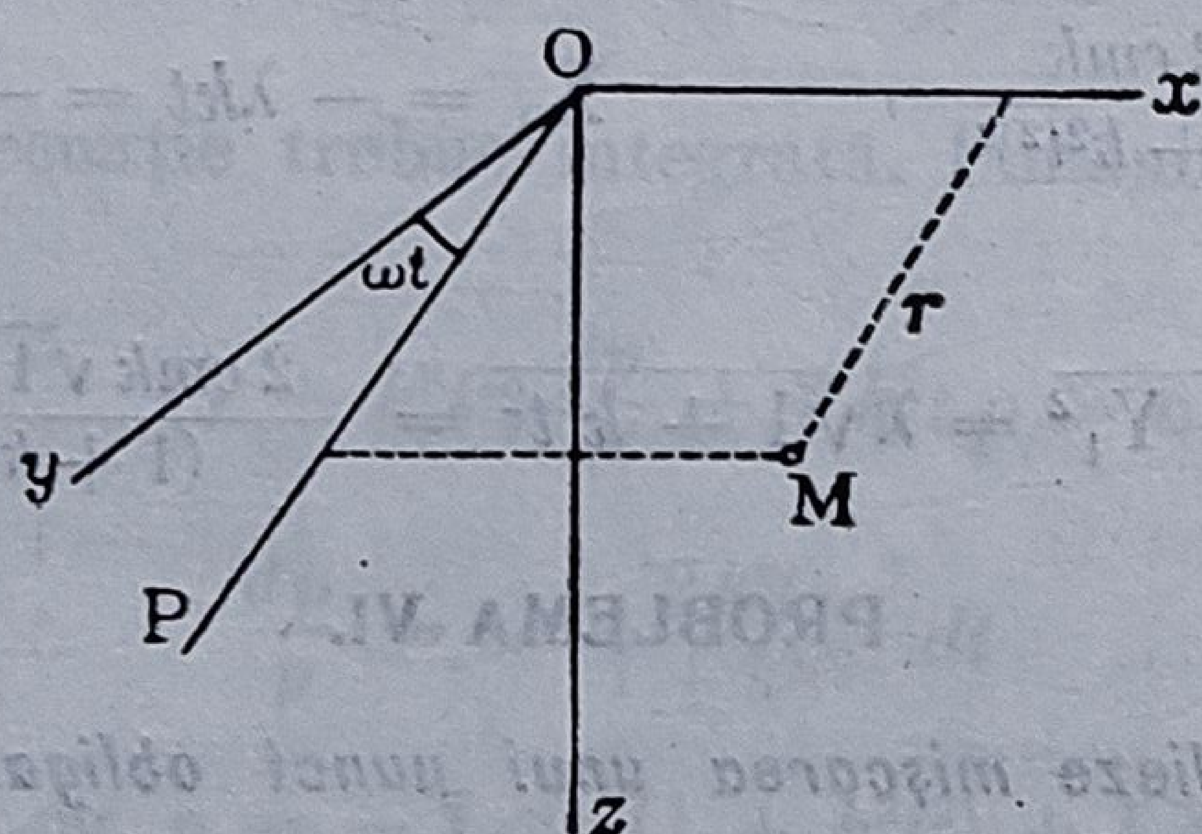


Fig. 163

Insemnând prin ω viteza unghiulară de rotație a planului mobil și presupunând că în momentul inițial acest plan coincide cu planul Oxy, unghiul coprins între planul Oxy și planul mobil, într'un moment oarecare t, va fi ωt, așa încât ecuația planului va fi

$$z = y \cdot \operatorname{tg} \omega t . \tag{1}$$

Metoda multiplicatorilor ne dă

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda \operatorname{tg} \omega t \tag{2}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = mg + \lambda .$$

Din cea dintâi dintre aceste ecuaţii deducem

$$x = ct + c' .$$

Eliminând pe λ între celelalte două, se obţine

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} \operatorname{tg} \omega t = g \cdot \operatorname{tg} \omega t . \tag{3}$$

Ecuaţiile (1) şi (3) determină pe y şi z în funcţie de t. Pentru efectuarea calculului este mai simplu de a lua ca necunoscută distanţa r a punctului la axul Ox; avem de altfel

$$\begin{aligned} y &= r \cos \omega t \\ z &= r \sin \omega t \end{aligned} \tag{4}$$

de unde deducem

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos \omega t - 2\,\omega \frac{dr}{dt} \sin \omega t - r\omega^2 \cos \omega t \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \sin \omega t + 2\,\omega \frac{dr}{dt} \cos \omega t - r\omega^2 \sin \omega t . \end{aligned} \tag{5}$$

Substituind în ecuaţia (3), aceasta devine

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = g \sin \omega t \tag{6}$$

şi integrând, obţinem [1])

$$r = -\frac{g}{2\,\omega^2} \sin \omega t + A\, e^{\omega t} + B\, e^{-\omega t} . \tag{7}$$

Nu rămâne decât să substituim această valoare în expresiile (4) ale cordonatelor y şi z.

Să calculăm acţiunea planului asupra mobilului. Intensitatea acestei acţiuni are ca valoare, potrivit ecuaţiilor (2)

$$\lambda \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega t} \quad \text{sau} \quad \frac{\lambda}{\cos \omega t} .$$

---

[1]) Integrala generală a ecuaţiilor de forma $\frac{d^2x}{dt^2} - Px + Q = o$ este

$x = \frac{Q}{2P} + A\, e^{\alpha' t} + B\, e^{\alpha'' t}$, α' şi α'' fiind rădăcinile ecuaţiei $\alpha^2 - P = o$.

Ori ecuaţia a treia din sistemul (2) ne dă

$$\lambda = m\left(\frac{d^2 z}{dt^2} - g\right)$$

şi, cum potrivit ecuaţiei (5) avem

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2\right)\sin \omega t + 2\,\omega\,\frac{dr}{dt}\cos \omega t$$

obţinem în cele din urmă, ţinând socoteală de ecuaţia (6) şi înlocuind pe $\frac{dr}{dt}$ prin valoarea ce rezultă din ecuaţia (7),

$$\frac{\lambda}{\cos \omega t} = 2\,m\left[\omega^2\left(\mathrm{A}\,e^{\omega t} - \mathrm{B}\,e^{-\omega t}\right) - g\cos \omega t\right].$$

Dacă punctul ar fi numai aşezat pe plan, el va părăsi planul în momentul când $\frac{\lambda}{\cos \omega t}$ devine egal cu zero. Acest moment este definit prin ecuaţia

$$g\cos \omega t = \omega^2\left(\mathrm{A}\,e^{\omega t} - \mathrm{B}\,e^{-\omega t}\right).$$

Ecuaţii Lagrange. Ecuaţia (6) care determină parametrul r poate să se obţină şi prin ecuaţia lui Lagrange:

$$\mathrm{D}_t \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} = \mathrm{X}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \mathrm{Y}\,\frac{\partial y}{\partial r} + \mathrm{Z}\,\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Ori, avem

$$\mathrm{X} = o, \quad \mathrm{Y} = o, \quad \mathrm{Z} = mg, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin \omega t$$

iar pe de altă parte, cum formulele (4) ne dau

$$y' = r'\cos \omega t - r\omega \sin \omega t$$

$$z' = r'\sin \omega t + r\omega \cos \omega t$$

rezultă:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,m\,(x'^2 + r'^2 + r^2\omega^2)$$

şi prin urmare

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r'} = m\,r', \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} = m\,r\omega^2.$$

Ecuaţia lui Lagrange este în consecinţă

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - m\,r\omega^2 = mg\sin\omega t$$

adică, simplificând cu m, identică cu ecuaţia (6).

PROBLEMA VII.

Să se determine poziţiile de echilibru ale unei bare grele şi omogene AB, *ale cărei extremităţi* A *şi* B *sunt respectiv obligate de a descrie verticala* Oy *şi orizontala* Ox, *fiecare element al barei fiind supus unei repulsiuni din partea axului* Oy, *proporţională cu massa elementului şi cu distanţa acestuia la* Oy.

Se va considera cazul particular când coeficientul numeric de proporţionalitate este $k = 2\frac{g}{l}$, *l fiind lungimea barei.*

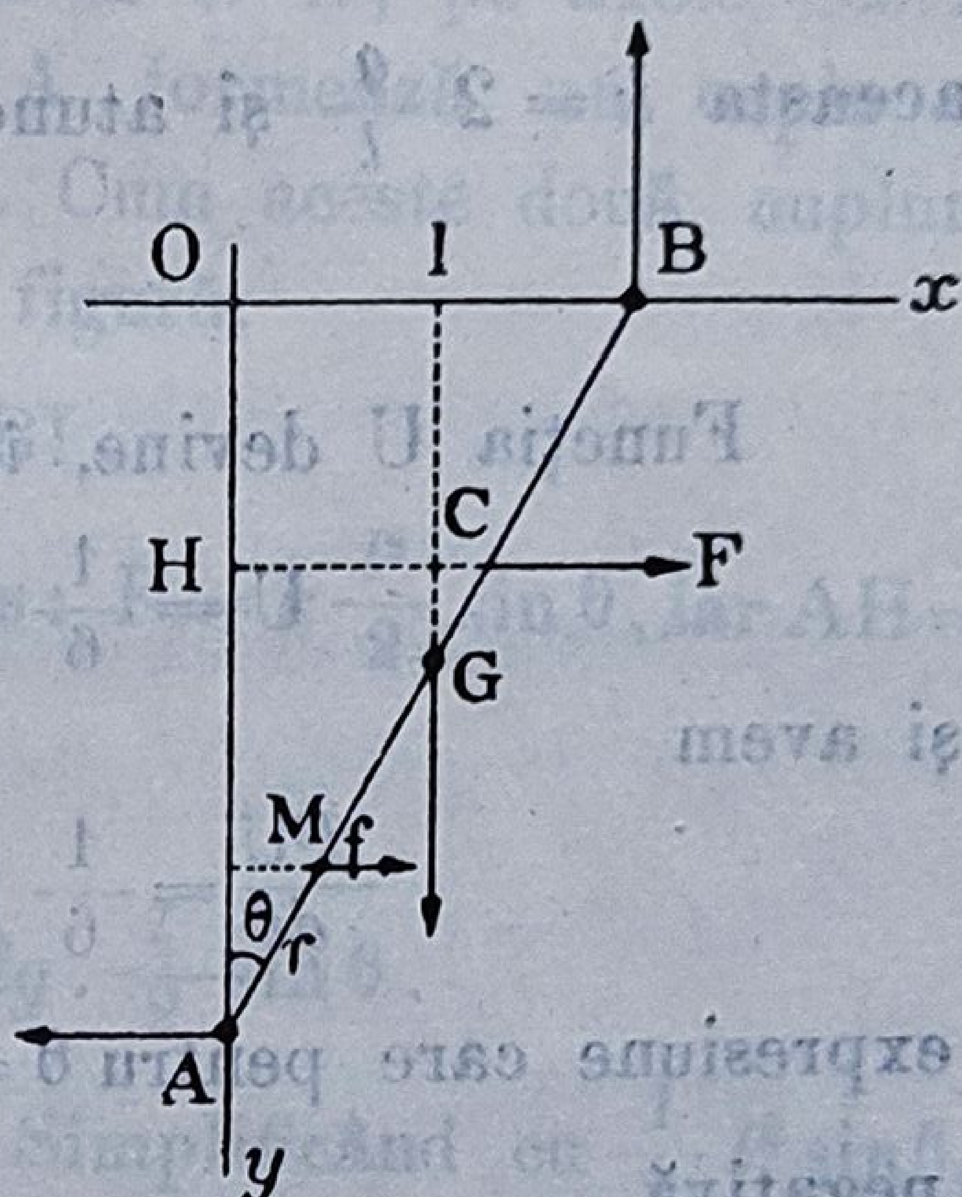


Fig. 164.

Suntem în cazul unui sistem supus la legături independente de timp, când forţele direct aplicate admit o funcţie de forţe.

In adevăr, greutatea admite ca funcţie de forţe, după cum s'a mai văzut

$$U_1 = \frac{1}{2}l^2 g\cos\theta\,.$$

Pe de altă parte, însemnând repulsiunea elementară prin f, avem

$$f = k\,dr\,.\,x \qquad \text{deci} \qquad u_2 = \frac{1}{2}k\,dr\,.\,x^2 = \frac{1}{2}k\,dr\,.\,r^2\sin^2\theta$$

şi prin urmare

$$U_2 = \sum u_2 = \frac{1}{2}k\sin^2\theta\int_0^l r^2\,dr = \frac{1}{6}k\,l^3\sin^2\theta\,.$$

Aşa dar funcţia de forţe a forţelor direct aplicate este

$$U = U_1 + U_2 = \frac{l^2}{6}(3\,g\cos\theta + kl\sin^2\theta)\,.$$

Poziţiile de echilibru corespund maximului şi minimului funcţiei U. Anularea primei derivate ne dă

$$\sin\theta\,(2\,kl\cos\theta - 3\,g) = 0 \qquad (1)$$

deci două soluţii

$$\sin\theta = 0\,, \qquad \cos\theta = \frac{3g}{2\,kl}\,.$$

Valoarea $\frac{3g}{2kl}$ nu poate reprezenta un cosinus decât dacă este mai mică decât unitatea. Ni se dă însă tocmai pentru aceasta $k = 2\,\frac{g}{l}$ şi atunci

$$\cos\theta = \frac{3}{4}\,.$$

Funcţia U devine, în aceiaşi ipoteză,

$$U = \frac{1}{6}\,l^2 g\,(3\cos\theta + 2\sin^2\theta)$$

şi avem

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{1}{6}\,l^2 g\,(4\cos 2\,\theta - 3\cos\theta)$$

expresiune care pentru $\theta = 0$ este pozitivă iar pentru $\cos\theta = \frac{3}{4}$ negativă.

Prima valoare corespunde deci unei poziţii de echilibru ne-stabil, iar a doua unei poziţii de echilibru stabil.

Observaţie. Forţele elementare, direct aplicate, având respectiv ca proecţii

$$\begin{array}{lll} 0\,, & k\,x\,dr & \text{pe } Ox \\ g\,dr\,, & 0 & \text{„ } Oy \end{array}$$

aplicaţia directă a teoremei travaliului virtual ne dă

$$\Sigma\,(k\,x\,dr\,.\,\delta x + g\,dr\,.\,\delta y) = 0\,.$$

Inlocuind în această ecuaţie pe x şi y prin

$$x = r\sin\theta\,, \qquad y = (l - r)\cos\theta$$

se obţine, după eliminarea lui $\delta\theta$,

$$k\sin\theta\cos\theta\int_0^l r^2\,dr + g\sin\theta\int_0^l (r - l)\,dr = 0$$

adică

$$\sin\theta\,(2\,k\,l\cos\theta - 3\,g) = o$$

care este tocmai ecuaţia (1) de mai sus.

Insfârşit, se poate uşor stabili că rezultanta F a forţelor f are ca valoare $k\frac{l^2}{2}\sin\theta$ şi, că punctul ei de aplicaţie este în C aşa fel că $AC = \frac{2}{3}AB$. Pe de altă parte, proecţia forţelor F, G şi a celor două reacţii din A şi B, pe axele Ox şi Oy, arată că forţa F şi reacţia din A formează un cuplu şi deasemenea forţa G şi reacţia din B. Cum aceste două cupluri trebue să-şi facă echilibru, avem, pe figură,

$$F\,.\,AH = G\,.\,BI\,.$$

Insă, după cum am spus mai sus: $F = k\frac{l^2}{2}\sin\theta$, iar $AH = \frac{2}{3}\,l\cos\theta$ şi $BI = \frac{l}{2}\sin\theta$, deci

$$k\,\frac{l^2}{2}\sin\theta\,.\,\frac{2}{3}\,l\cos\theta = lg\,.\,\frac{l}{2}\sin\theta\,.$$

O primă soluţie este $\sin\theta = o$. Simplificând cu $\frac{1}{2}\,l^2\sin\theta$, rămâne

$$\frac{kl}{3}\cos\theta = \frac{g}{2}$$

de unde, a doua soluţie: $\cos\theta = \frac{3}{4}$, dacă se ia $k = 2\,\frac{g}{l}$. Regăsim deci aceleaşi rezultate, fără a putea preciza însă prin această metodă şi felul de echilibru (stabil sau nestabil) la care corespund cele două valori ale lui θ.

NOTĂ FINALĂ.

Ca un fel de rezumat asupra aplicaţiunii teoremelor generale, a principiului lui d'Alembert, a teoremei travaliului virtual şi a teoremei forţelor vii, precizăm următoarele:

1º) Ecuaţiile de echilibru ale unui solid sunt:

$$\Sigma X = o\,, \qquad \Sigma Y = o\,, \qquad \Sigma Z = o;$$

$$\Sigma(yZ - zY) = o\,, \quad \Sigma(zX - xZ) = o\,, \quad \Sigma(xY - yX) = o\,.$$

Ecuaţiile mişcării se obţin înlocuind pe X, Y, Z pentru fiecare în parte din punctele solidului, prin

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Prin asemenea înlocuire,[1]) regăsim cele 6 ecuaţii de la teorema cantităţilor de mişcare şi teorema momentelor cantităţilor de mişcare.

Ele sunt suficiente pentru determinarea mişcării solidului.

2⁰) Ecuaţiile de echilibru ale unui sistem de n puncte materiale coprind câte trei ecuaţii

$$(\alpha) \qquad X = o, \qquad Y = o, \qquad Z = o$$

pentru fiecare din punctele sistemului, deci în total $3n$ ecuaţii.

Când sistemul este în echilibru, îl putem considera ca fiind solidificat aşa că avem, ca şi pentru solide,

$$(\beta) \quad \begin{array}{lll} \Sigma X = o, & \Sigma Y = o, & \Sigma Z = o; \\ \Sigma(yZ - zY) = o, & \Sigma(zX - xZ) = o, & \Sigma(xY - yX) = o. \end{array}$$

Aceste 6 ecuaţii reprezintă numai *condiţii necesare* de echilibru, aşa că numai ele singure nu rezolvă chestiunea echilibrului.

Ecuaţiile mişcărei se obţin înlocuind în cele $3n$ ecuaţii de forma (α) pe X, Y, Z prin

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Se obţine astfel un sistem de $3n$ ecuaţii. Dacă facem aceiaşi înlocuire şi în ecuaţiile (β) obţinem un sistem de 6 ecuaţii care au cu adevărat loc, însă nu pot determina ele singure mişcarea sistemului.

3⁰) In caz când există legături, aplicaţia teoremei travaliului virtual ne dă ecuaţiile de echilibru, sau în combinaţie cu principiul lui d'Alembert, pe acelea ale mişcărei, fără a ţine

---

[1]) Când se face înlocuirea, se va considera că în fiecare punct lucrează o forţă, indiferent că această forţă de componente X, Y, Z este sau nu este nulă.

seama de forţele de legătură. Evident însă, că aceste ecuaţii rezultă şi din ecuaţiile dela No. 1⁰ pentru solide şi No. 2⁰ pentru sistemele materiale, când se elimină forţele de legătură. Procedeul are însă avantajul de a se aplica *ori care ar fi forma ecuaţiilor de legătură*, iar nu numai în cazul când legăturile au o semnificaţie geometrică simplă care să permită de a le exprima şi a le introduce în ecuaţiile dela No. 1⁰ sau 2⁰.

4⁰) Teorema forţelor vii este tot o consecinţă a ecuaţiilor mişcării. Ea se poate aplica, fără a se ţine seama de forţele de legătură, numai atunci când legăturile sunt independente de timp. In asemenea caz, dacă forţele direct aplicate admit o funcţie de forţe, teorema procură o ecuaţie diferenţială a mişcărei de ordinul întâi.

Când sistemul este cu legături complecte, această ecuaţie diferenţială rezolvă ea singură chestiunea mişcărei, dacă poate fi integrată.

V. ALTE APLICAŢIUNI ALE ECUAŢIILOR LUI LAGRANGE.

I. STABILIREA ECUAŢIILOR MIŞCĂRII UNUI SISTEM MATERIAL ÎN CAZUL LEGĂTURILOR ZISE NE-HOLONOAME.

1. In cele ce precedă, am presupus că ecuaţiile de legătură sunt de forma zisă *finită*.

(1) $$f(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0.$$

Se poate însă întîmpla ca în unele probleme de Dinamică o parte din ecuaţiile de legătură să coprindă nu numai cordonatele punctelor şi timpul, dar şi primele derivate ale cordonatelor, adică să fie de forma

(2) $$\varphi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}; \ldots; t\right) = 0.$$

Legăturile de forma (1) sunt zise *holonoame* iar cele de forma (2) *ne-holonoame.*

Dacă, după metoda lui Lagrange, se exprimă x, y, z în funcţie de r parametri q, ecuaţia (2) se scrie

$$\psi(q_1, q_2, \ldots q_r; q_1', q_2', \ldots q_r'; t) = 0.$$

Chestiunile care comportă legături ne-holonoame se pot rezolva, pentru mai toate cazurile ce se întâlnesc în practică, prin *utilizarea ecuaţiilor lui Lagrange în combinaţie cu metoda multiplicatorilor.*

Iată în ce constă acest procedeu:

Dintre diversele ecuaţii de legătură ale problemei, se dau de o camdată la o parte ecuaţiile care corespund legăturilor ne-holonoame şi se formează ecuaţiile lui Lagrange numai pe baza legăturilor holonoame, aşa ca şi cum n'ar exista decât

acestea din urmă. Cele r ecuaţii obţinute pot fi concentrate, după cum ştim în ecuaţia unică

$$(3) \qquad \sum\left(D_t \frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q}\right)\delta q = \sum Q\,\delta q\,.$$

Odată această ecuaţie stabilită, se iau în consideraţie legăturile ne-holonoame. Pentru cazurile ce se întâlnesc în practică, aceste legături se exprimă mai totdeauna prin ecuaţii diferenţiale lineare în raport de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ şi ne-integrabile:

$$(4) \quad \left\{\begin{array}{l} A_1\, q'_1 + A_2\, q'_2 + \ldots + A_r\, q'_r + A_{r+1} = 0 \\ B_1\, q'_1 + B_2\, q'_2 + \ldots + B_r\, q'_r + B_{r+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1\, q'_1 + P_2\, q'_2 + \ldots + P_r\, q'_r + P_{r+1} = 0 \end{array}\right.$$

coeficienţii $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}; \ldots; P_1, P_2, \ldots, P_{r+1}$ fiind funcţii date de $q_1, q_2, \ldots, q_r$ şi t. Putem scrie înmulţind cu dt

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{l} A_1\, dq_1 + A_2\, dq_2 + \ldots + A_r\, dq_r + A_{r+1}\, dt = 0 \\ B_1\, dq_1 + B_2\, dq_2 + \ldots + B_r\, dq_r + B_{r+1}\, dt = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1\, dq_1 + P_2\, dq_2 + \ldots + P_r\, dq_r + P_{r+1}\, dt = 0\,. \end{array}\right.$$

Pentru o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile (5), *în momentul* t, vom avea, făcând $dt = 0$,

$$(6) \quad \left\{\begin{array}{l} A_1\, \delta q_1 + A_2\, \delta q_2 + \ldots + A_r\, \delta q_r = 0 \\ B_1\, \delta q_1 + B_2\, \delta q_2 + \ldots + B_r\, \delta q_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1\, \delta q_1 + P_2\, \delta q_2 + \ldots + P_r\, \delta q_r = 0\,. \end{array}\right.$$

Fie p numărul acestor ecuaţii. Ecuaţia (3) va trebui să aibe loc pentru toate deplasările $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_r$ care verifică relaţiile (6). Potrivit metodei multiplicatorilor, să înmulţim atunci cu coeficienţii nedeterminaţi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ aceste relaţii,

să le adunăm cu primul membru al ecuației (3), apoi, să anulăm pe fiecare în parte dintre coeficienții variațiilor δq_1, δq_2, ..., δq_r. Vom obține sistemul de ecuații

$$(7)\quad \begin{cases} D_t \dfrac{\partial T}{\partial q'_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1 + \ldots + \lambda_p P_1 \\ D_t \dfrac{\partial T}{\partial q'_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 + \lambda_1 A_2 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_p P_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_t \dfrac{\partial T}{\partial q'_r} - \dfrac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \lambda_1 A_r + \lambda_2 B_r + \ldots + \lambda_p P_r \,. \end{cases}$$

Aceste ecuații unite cu cele p ecuații (4) formează un sistem de $r+p$ ecuații între cele $r+p$ necunoscute q_1, q_2, ... q_r; λ_1, λ_2, ..., λ_p. Ele sunt ecuațiile mișcării.

Este esențial de remarcat, că metoda expusă presupune că travaliul virtual al tuturor forțelor de legătură este nul pentru deplasări compatibile cu legăturile. Se va examina deci în fiecare caz dacă forțele care corespund legăturilor ne-holonoame satisfac acestei condiții.

2. **Exemplu** [1]). *Fie două sfere egale, unite printr'o vergea de massă neglijabilă. Presupunem că fiecare sferă este formată dintr'o substanță foarte ușoară și că o greutate de mici dimensiuni este așezată în centru, așa încât toată greutatea sferei să poată fi privită ca concentrată în acest punct. Se așează sistemul pe un plan orizontal și i se dă o impulsiune inițială. Să se găsească legea mișcării, presupunând că una dintre sfere este așa de netedă că nu poate decât să alunece pe plan, pe când cealaltă care nu este netedă se rostogolește fără alunecare.*

Fie A centrul sferei care se rostogolește, B centrul aceleia care alunecă, a lungimea AB a vergelei, m massa concentrată în A și μ massa concentrată în B.

---

1) *Lecornu*, Cours de Mécanique, 1915, vol. II, pag. 105.

Cum mişcarea sferei de centru A este o rostogolire fără alunecare, viteza punctului ei de contact C cu planul orizontal este nulă. Mişcarea elementară a întregului sistem este deci o rotaţiune în jurul unui ax care trece prin C. Ori, viteza punctului B este orizontală; rezultă că axul de rotaţie este coprins în planul vertical dus prin CB şi prin urmare că proecţia lui pe planul orizontal în care se mişcă punctele A şi B este dreapta AB.

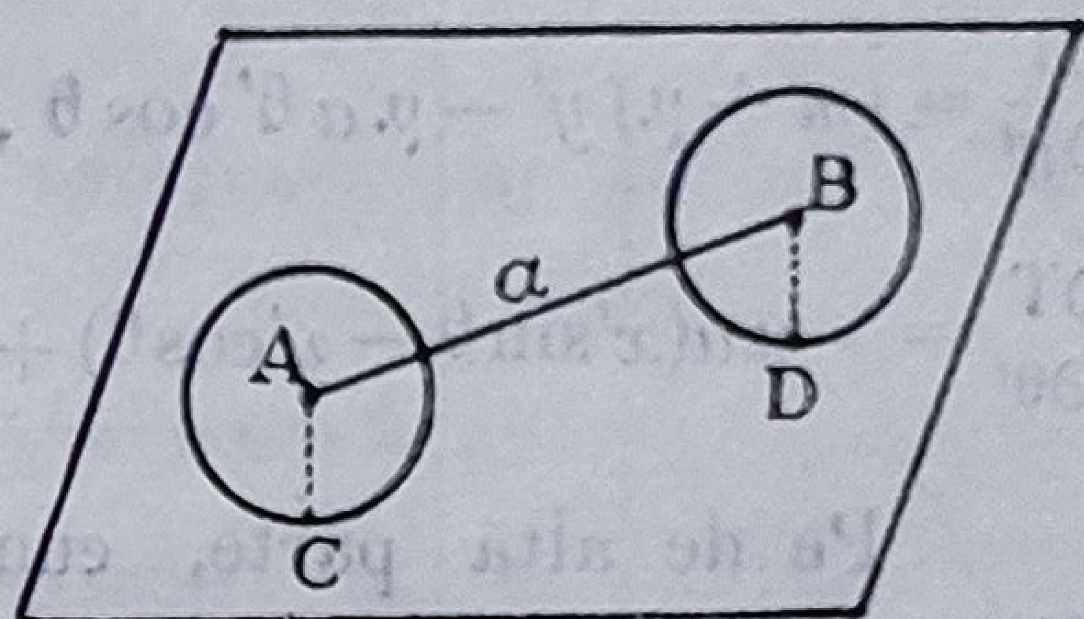


Fig. 165

Viteza punctului B este deci perpendiculară pe AB.

Fie în raport de două axe dreptunghiulare fixe, luate în planul orizontal care conţine pe AB,

$$x, \quad y \qquad \text{cordonatele lui A},$$
$$x + a\cos\theta, \quad y + a\sin\theta \qquad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{B},$$

θ fiind unghiul dreptei AB cu axul absciselor. Avem astfel trei parametri x, y, θ care vor juca rolul variabilelor q_1, q_2, q_3.

Componentele vitezei punctului B fiind

$$x' - a\sin\theta \,.\, \theta', \qquad y' + a\cos\theta \,.\, \theta'$$

condiţia de perpendicularitate a acestei viteze pe direcţia AB se exprimă prin ecuaţia

$$(x' - a\sin\theta \,.\, \theta')\cos\theta + (y' + a\cos\theta \,.\, \theta')\sin\theta = 0$$

care se reduce la

$$x'\cos\theta + y'\sin\theta = 0\,.$$

Această ecuaţie, care exprimă că şi viteza punctului A este perpendiculară pe AB, reprezintă legătura ne-holonoamă.

Forţa vie a sistemului este

$$T = \frac{1}{2}\left[m(x'^2 + y'^2) + \mu\left\{(x' - a\sin\theta \,.\, \theta')^2 + (y' + a\cos\theta \,.\, \theta')^2\right\}\right]$$

sau

$$T = \frac{1}{2}\left[(m + \mu)(x'^2 + y'^2) - 2\mu a\theta'(x'\sin\theta - y'\cos\theta) + \mu a^2\theta'^2\right].$$

Deducem

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = (m+\mu)\,x' - \mu\, a\, \theta' \sin\theta\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y'} = (m+\mu)\,y' - \mu\, a\, \theta' \cos\theta\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = -\mu a (x' \sin\theta - y' \cos\theta) + \mu a^2 \theta', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = = \mu a \theta' (x' \cos\theta + y' \sin\theta).$$

Pe de altă parte, cum travaliurile virtuale ale forţelor direct aplicate adică ale greutăţilor, sunt evident nule, termenii Q_1, Q_2, Q_3 sunt egali cu zero [1]).

Aplicaţia ecuaţiilor lui Lagrange, în combinaţie cu metoda multiplicatorilor, ne dă prin urmare sistemul de trei ecuaţii

$$(1) \qquad (m+\mu)\,x'' - \mu\, a\,(\theta' \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta) = \lambda \cos\theta$$

$$(2) \qquad (m+\mu)\,y'' + \mu\, a\,(\theta'' \cos\theta - \theta'^2 \sin\theta) = \lambda \sin\theta$$

$$(3) \qquad x'' \sin\theta - y'' \cos\theta - a\,\theta'' = 0$$

la care se adaogă ecuaţia legăturei ne-holonoame

$$(4) \qquad x' \cos\theta + y' \sin\theta = 0$$

deci în total patru ecuaţii pentru determinarea celor 4 necunoscute x, y, θ şi λ.

Eliminarea lui λ între ecuaţiile (1) şi (2) dă

$$(m+\mu)\,(x'' \sin\theta - y'' \cos\theta) - \mu\, a\, \theta'' = 0\,.$$

Din această ecuaţie şi ecuaţia (3) rezultă $\theta'' = 0$, deci $\theta' = \omega$, însemnând prin ω o constantă, şi

$$x'' \sin\theta - y'' \cos\theta = 0\,.$$

Ţinând socoteală de ecuaţia (4) putem deci scrie

$$x'' \sin\theta - y'' \cos\theta + (x' \cos\theta + y' \sin\theta)\,\theta' = 0$$

---

[1]) **Aplicaţia teoremei travaliului virtual presupune, după cum s'a mai spus, ca travaliul forţelor de legătură să fie nul în deplasările compatibile cu legăturile. Ori, travaliul reacţiunilor normale din C şi D este evident nul; travaliul frecărei din C este nul pentru motivul că viteza lui C este nulă, iar travaliul tensiunilor din A şi B este şi el nul din cauza invariabilităţii lungimei AB.**

adică

$$d\,(x' \sin\theta - y' \cos\theta) = o$$

și în consecință

$$(5) \qquad x' \sin\theta - y' \cos\theta = -v$$

v fiind o constantă.

Ca urmare, ecuațiile (4) și (5) rezolvate în raport de x' și y' ne dau

$$(6) \qquad x' = -v \sin\theta\,, \qquad y' = v \cos\theta$$

și, cum $\theta = \omega t$, obținem prin integrațiune

$$x = \frac{v}{\omega} \cos\omega t + c_1\,, \qquad y = \frac{v}{\omega} \sin\omega t + c_2$$

de unde

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \frac{v^2}{\omega^2}\,.$$

Așa dar punctul A descrie un cerc de rază $\frac{v}{\omega}$ cu o viteză constantă și egală cu v potrivit ecuațiilor (6); dreapta AB fiind necontenit perpendiculară pe direcția acestei viteze trece prin centrul cercului și prin urmare traectoria lui B este un cerc concentric cu cel dintâi.

Observațiune. S'ar părea la prima vedere, că în loc de a proceda așa cum s'a arătat mai sus, s'ar putea trage spre exemplu valoarea lui x' din ecuația legăturei ne-holonoame, care introdusă în expresia forței vii T ar face ca T să nu mai depindă decât de parametrii y și θ; ecuațiile mișcării s'ar obține atunci scriind cele două ecuații ale lui Lagrange referitoare acestor doi parametri.

Procedeul acesta conduce însă la concluzii false, pentru motivul că ecuațiile lui Lagrange rezultă din transformarea termenului

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)$$

al ecuației generale a Dinamicei, în expresia

$$\sum \left(\mathrm{D}_t\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}\right)\delta q$$

iar nu din consideraţia directă a expresiei forţei vii coprinzând un număr mai redus de parametri, graţie relaţiilor ne-holonoame existente. Transformarea în chestiune pretinde, după cum ştim, ca cordonatele punctelor să poată fi exprimate în funcţie de parametrii independenţi $q_1, q_2, \ldots, q_r$ şi ea nu poate avea loc când între aceşti parametri există vre o relaţie ne-integrabilă şi deci nesusceptibilă de a micşora numărul parametrilor.

3. ***Notă.*** Ilustrul profesor *Appell* a dat o metodă [1]), care permite de a stabili ecuaţiile mişcării *ori care ar fi sistemele de legături holonoame sau ne-holonoame.*

Metoda constă în formarea expresiei

$$S = \frac{1}{2} \sum m \left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)$$

în care x'', y'', z'' se exprimă în funcţie de parametrii problemei $q_1, q_2, \ldots, q_r, q_{r+1}, \ldots, q_{r+p}$ şi derivatele acestor parametri de ordinul întâi şi al doilea. Se profită apoi de cele p ecuaţii de legături ne-holonoame pentru a reduce la r numărul de parametri care să figureze în S ([2]). Odată această transformare făcută, se formează derivatele parţiale

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial q''_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial S}{\partial q''_r}$$

şi se scriu ecuaţiile

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_1} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q''_2} = Q_2, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial q''_r} = Q_r$$

termenii $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ fiind aceiaşi ca în ecuaţiile lui Lagrange.

Cele r ecuaţii (α) împreună cu cele p ecuaţii ale legăturilor ne-holonoame vor da valorile celor $r+p$ parametri $q_1, q_2, \ldots, q_r, q_{r+1}, \ldots, q_{r+p}$ în funcţie de t şi deci soluţia problemei.

---

[1]) *P. Appell*, Traité de Mécanique rationnelle, vol. II, 1924, pag. 382.

([2]) Se rezolvă adică cele p ecuaţii în raport de $q'_{r+1}, q'_{r+2}, \ldots, q'_{r+p}$ se formează apoi $q''_{r+1}, q''_{r+2}, \ldots, q''_{r+p}$ şi se introduc ambele aceste sisteme de valori în expresia lui S.

Vedem astfel că reducerea numărului de parametri la minimum posibil, care nu se poate aplica forţei vii T pentru a scrie direct ecuaţiile lui Lagrange în cazul legăturilor ne-holonoame, se poate aplica funcţiei S.

Să aplicăm metoda profesorului Appell la exemplul precedent.

Derivatele de ordinul al doilea ale cordonatelor celor două puncte A şi B sunt, respectiv,

$$x'' \qquad , \qquad y''$$

$$x''-a\cos\theta\,.\,\theta'^2-a\sin\theta\,.\,\theta'' \quad , \quad y''-a\sin\theta\,.\,\theta'^2+a\cos\theta\,.\,\theta''.$$

Expresia funcţiei S este, în consecinţă,

$$(\beta)\quad 2\,S=m\,(x''^2+y''^2)+\mu\left[(x''-a\cos\theta\,.\,\theta'^2-a\sin\theta\,.\,\theta'')^2+(y''-a\sin\theta\,.\,\theta'^2+a\cos\theta\,.\,\theta'')^2\right].$$

Ori, din ecuaţia legăturei neholonoame

$$x'\cos\theta+y'\sin\theta=0$$

deducem $x'=-y'\operatorname{tg}\theta$ şi prin urmare

$$x''=-y''\operatorname{tg}\theta-\frac{y'\,\theta'}{\cos^2\theta}.$$

Substituind această valoare în egalitatea (β), S rămâne funcţie numai de parametrii y şi θ şi avem atunci

$$\frac{\partial S}{\partial y''}=\frac{m+\mu}{\cos^2\theta}\,y''+\frac{(m+\mu)\sin\theta}{\cos^3\theta}\,y'\,\theta'+\frac{a\,\mu}{\cos\theta}\,\theta''$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta''}=\mu\,a\left[\frac{y''}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,y'\,\theta'+a\,\theta''\right].$$

Ecuaţiile mişcărei vor fi prin urmare, ţinând socoteală că Q_1, Q_2 şi Q_3 sunt nuli,

$$(1)\quad (m+\mu)\cos\theta\,.\,y''+(m+\mu)\sin\theta\,.\,y'\,\theta'+a\,\mu\cos^2\theta\,.\,\theta''=0$$

$$(2)\quad \cos\theta\,.\,y''+\sin\,.\,y'\,\theta'+a\cos^2\theta\,.\,\theta''=0$$

$$(3)\quad x'\cos\theta+y'\sin\theta=0.$$

Ori, înmulţind ecuaţia (2) cu μ şi scăzând-o apoi din (1) obţinem

$$(4)\quad \cos\theta\,.\,y''+\sin\theta\,.\,y'\,\theta'=0.$$

Ecuaţia (2) ne dă în consecinţă

$$\theta''=0 \qquad \text{deci } \theta'=\omega \qquad \text{şi } \theta=\omega t$$

ω fiind o constantă.

Ţinând seama de aceste rezultate, ecuaţia (4) se scrie

$$y'' \cos \omega t + \omega y' \sin \theta = o$$

de unde deducem

$$\frac{y''}{y'} = -\omega \operatorname{tg} \omega t$$

şi, prin integraţiune,

$$\operatorname{Log} y' = \operatorname{Log} \cos \omega t + \operatorname{Log} v \qquad \text{adică } y' = v \cos \omega t$$

însemnând prin v o constantă.

O nouă integraţiune ne dă apoi

$$(5) \qquad y = \frac{v}{\omega} \sin \omega t + c_2 .$$

Ca urmare, din ecuaţia (3) rezultă

$$x' = v \sin \omega t$$

de unde

$$(6) \qquad x = -\frac{v}{\omega} \cos \omega t + c_1 .$$

Eliminarea lui t între ecuaţiile (5) şi (6) ne dă însfârşit

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \frac{v^2}{\omega^2} .$$

Regăsim astfel rezultatele obţinute mai sus prin utilizarea ecuaţiilor lui Lagrange în combinaţie cu metoda multiplicatorilor.

II. APLICAŢIUNEA ECUAŢIILOR LUI LAGRANGE LA STUDIUL MIŞCĂRLOR RELATIVE.

1. Fie $Oxyz$ un sistem de axe fixe, $O'XYZ$ un sistem de axe mobile şi S un sistem de puncte materiale în mişcare.

Ştim, că mişcarea sistemului material S faţă de sistemul mobil $O'XYZ$ poate fi tratată ca o mişcare absolută, dacă pentru fiecare punct al sistemului alăturăm forţelor realmente aplicate punctului, forţa de inerţie de antrenare şi forţa centrifugă compusă.

Aceasta fiind reamintit, să însemnăm prin $q_1, q_2, \ldots, q_r$ parametrii de care depinde mişcarea sistemului S faţă de sistemul de axe mobile $O'XYZ$. Cum mişcarea sistemului de axe $O'XYZ$ în raport de $Oxyz$ este presupusă ca fiind cunoscută, putem exprima proecţiile tuturor forţelor pe axele mobile în

funcţie de parametrii $q_1, q_2, \ldots, q_r$, de derivatele acestor parametri $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ şi, eventual, de timpul t. Forţa vie va fi deasemenea o funcţie de aceleaşi variabile.

Astfel fiind, nimic nu împiedecă de a forma ecuaţiile lui Lagrange şi a studia mişcarea relativă pe baza acestor ecuaţii.

2. Exemplu. *Fie* Oy *o dreaptă verticală fixă şi* P *un plan care trece prin* Oy *şi se învârteşte în jurul acestei drepte cu o viteză unghiulară constantă* ω. *Să se determine mişcarea în planul* P *a unei bare grele* AB.

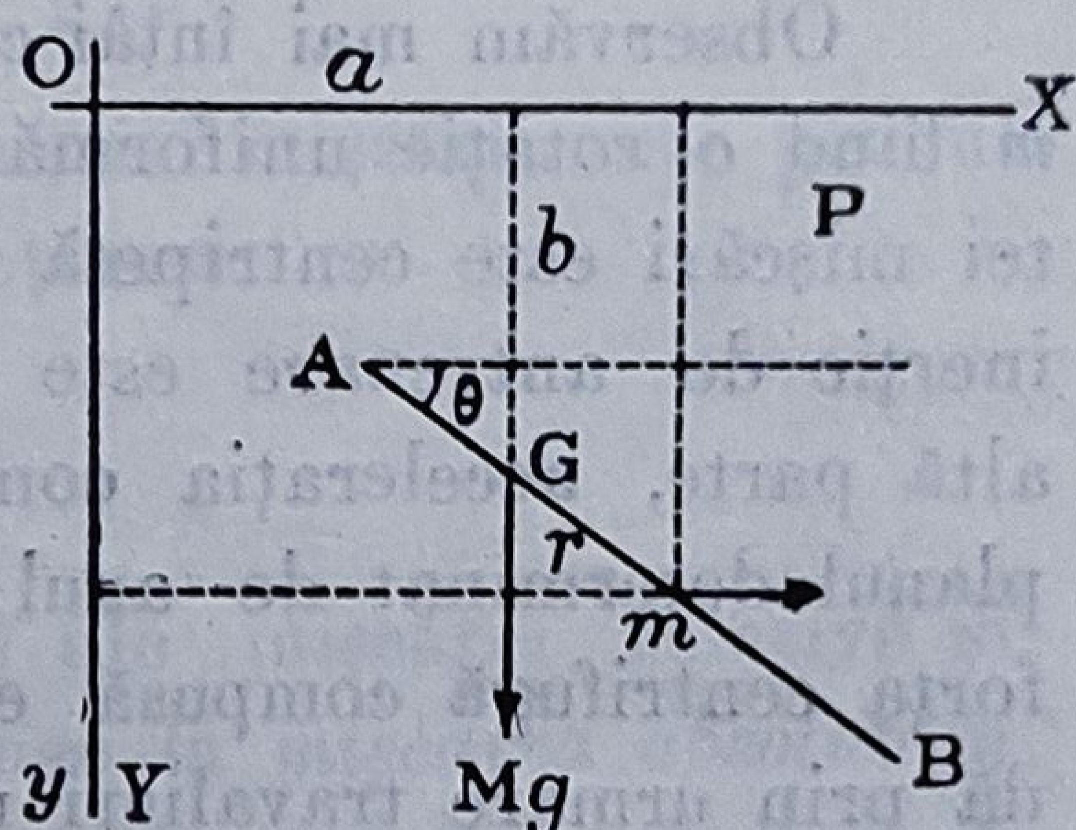


Fig. 166

Poziţia barei în planul P poate fi definită prin cordonatele a, b ale centrului de greutate G şi prin unghiul θ al dreptei AB cu OX. Elementele a, b, θ vor juca rolul parametrilor q_1, q_2, q_3 din ecuaţiile lui Lagrange.

Pentru un punct de massă m al barei avem, în planul P,

$$X = a + r\cos\theta \quad , \quad Y = b + r\sin\theta$$

însemnând prin r distanţa algebrică a punctului m la G. Deducem

$$X' = a' - r\sin\theta \,.\, \theta' \quad , \quad Y' = b' + r\cos\theta \,.\, \theta'$$

şi în consecinţă

$$T_r = \frac{1}{2}\sum m v_r^2 = \frac{1}{2}\sum m \left[(a' - r\theta' \sin\theta)^2 + (b' + r\theta' \cos\theta)^2 \right]$$

adică

$$T_r = \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2)\sum m + \frac{1}{2}\theta'^2 \sum m r^2 + \theta'(b'\cos\theta - a'\sin\theta)\sum m r$$

sau, însemnând prin M massa totală a barei, prin MK^2 valoarea sumei $\sum m r^2$, şi pentru că suma $\sum m r$ este o cantitate nulă,

$$T_r = \frac{1}{2} M (a'^2 + b'^2) + \frac{1}{2} M K^2 \theta'^2 .$$

Aceasta este expresia forţei vii din mişcarea relativă, în funcţie de cei trei parametri a, b, θ[1]). Deducem

$$\frac{\partial T_r}{\partial a'} = M a' \ , \qquad \frac{\partial T_r}{\partial b'} = M b' \ , \qquad \frac{\partial T_r}{\partial \theta'} = MK^2 \theta'$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial a} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial T_r}{\partial b} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial T_r}{\partial \theta} = 0 \ .$$

Să calculăm acum termenii Q_1, Q_2, Q_3 din ecuaţiile lui Lagrange.

Observăm mai întâi că mişcarea de antrenare a unui punct m fiind o rotaţie uniformă în jurul axului Oy, acceleraţia acestei mişcări este centripetă şi egală cu $-X\omega^2$, aşa că forţa de inerţie de antrenare este centrifugă şi egală cu $mX\omega^2$. Pe de altă parte, acceleraţia complimentară fiind perpendiculară pe planul determinat de axul de rotaţie Oy şi de viteza relativă, forţa centrifugă compusă este perpendiculară pe planul P; ea dă prin urmare travaliuri nule pentru ori-ce deplasări virtuale în acest plan.

Ori, $Q_1 \delta a$ este travaliul virtual al forţelor când nu variază decât parametrul a. Fiecare punct m se mişcă atunci paralel cu OX; travaliul greutăţii este nul pentru asemenea deplasare, iar acela al forţelor de inerţie de antrenare egal cu $\delta a \Sigma mX\omega^2$. Avem deci $Q_1 = \omega^2 \Sigma mX$ adică $Q_1 = Ma\omega^2$.

In mod analog, găsim că $Q_2 = Mg$. In ceea ce priveşte travaliul $Q_3 \delta\theta$, el corespunde unei rotaţii virtuale a barei în jurul punctului G; în această mişcare greutatea totală dă un travaliu nul iar forţele de inerţie de antrenare dau un travaliu egal cu $-\delta\theta\Sigma(mX\omega^2)(r\sin\theta)$. Rezultă că

$$Q_3 = -\omega^2 \sin\theta \,\Sigma mXr$$
$$= -\omega^2 \sin\theta \,\Sigma m(a + r\cos\theta)\ r = -\omega^2 \sin\theta \left[a \Sigma mr + \cos\theta \,\Sigma m r^2\right]$$

---

[1]) Puteam aplica, bine înţeles, teorema lui *Koenig* pentru calcularea lui T_r. Ea ne ar fi dat

$$T_r = \frac{1}{2} M (a'^2 + b'^2) + \frac{1}{2} \Sigma m \left[(-r \sin\theta \,.\, \theta')^2 + (r\cos\theta \,.\, \theta')^2\right]$$

adică acelaşi rezultat ca mai sus, însă ceva mai expeditiv.

adică, ţinând seama că $\Sigma m r = o$,

$$Q_3 = - M K^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta .$$

Ecuaţiile lui Lagrange sunt prin urmare

$$(1) \qquad \frac{d^2 a}{dt^2} = a\omega^2 , \quad \frac{d^2 b}{dt^2} = g , \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta\cos\theta .$$

Cele două dintâi ne dau

$$a = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} \quad , \quad b = \frac{1}{2} g t^2 + C t + D .$$

Cea de a treia este analoagă ecuaţiei mişcării unui pendul simplu, căci, dacă punem $2\theta = \varphi$, obţinem

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \sin\varphi .$$

Notă. Putem obţine ecuaţiile (1) ale mişcărei relative şi prin aplicaţiunea ecuaţiilor lui Lagrange la *mişcarea absolută* a barei A B, definind această mişcare prin rotaţia unghiulară dată ω a planului P în jurul lui Oy şi prin cei trei parametri a, b, θ ai mişcărei barei în plan.

Pentru calculul forţei vii T_a, se va exprima viteza absolută v_a în funcţie de vitezele v_r şi v_e care sunt funcţii de cei trei parametri, uşoare de calculat (v_e coprinzând bine înţeles şi pe ω). De altfel, cum viteza de antrenare v_e este perpendiculară pe planul P, avem $v_a^2 = v_r^2 + v_e^2$.

Singura forţă de luat în consideraţie va fi greutatea Mg aplicată în G.

Se va găsi ca expresie a forţei vii,

$$T_a = \frac{1}{2} M (a'^2 + b'^2 + K^2 \theta'^2) + \frac{1}{2} M \omega^2 (K^2 \cos^2\theta + a^2)$$

primul termen din membrul al doilea corespunzând sumei $\frac{1}{2} \Sigma m v_r^2$, iar celălalt sumei $\frac{1}{2} \Sigma m v_e^2$.

PARTEA IV.

MIŞCAREA SOLIDELOR INVARIABILE.

I. TEORIA MOMENTELOR DE INERŢIE.

1. **Definiţie,** Fie o dreaptă Δ şi un punct material de massă m situat la distanţa r de Δ.

Se numeşte *moment de inerţie* al punctului material în raport de Δ, productul $m.r^2$.

Dacă considerăm un sistem de puncte materiale, momentul de inerţie al sistemului în raport de Δ va fi prin definiţie

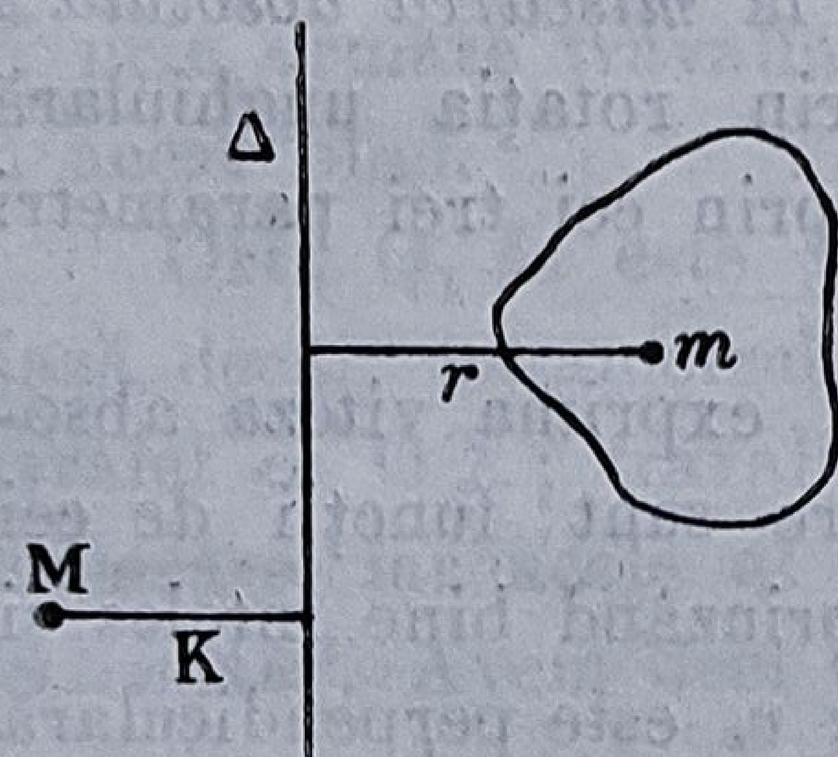


Fig. 167

$$I = \Sigma\, mr^2$$

adică o sumă de producte de forma mr^2.

Fie M massa totală a sistemului. Să determinăm o lungime K aşa fel încât să avem

$$MK^2 = \Sigma\, mr^2.$$

Lungimea K se numeşte *rază de giraţie* a sistemului. Ea reprezintă distanţa faţă de Δ, la care presupunând aşezată întreaga massă M a sistemului, concentrată într'un singur punct, momentul de inerţie al acestui punct material în raport de Δ este egal cu momentul de inerţie al sistemului.

In particular, dacă toate punctele materiale ar fi situate la aceiaşi distanţă r de dreapta Δ, adică dacă ar fi aşezate pe un cilindru circular, am avea

$$I = \Sigma\, mr^2 = r^2\, \Sigma\, m = Mr^2$$

şi atunci K ar fi egal cu r.

Insfârşit, în cazul când solidul ar fi plan, momentul său de inerţie, în raport de o dreaptă perpendiculară planului, este evident egal cu momentul de inerţie în raport de punctul unde perpendiculara întâlneşte planul.

2. Relaţiuni între momentele de inerţie luate în raport de drepte paralele. Fie Δ şi Δ' două drepte paralele şi P un punct oarecare dintr'un sistem, situat la distanţele $AP = r$ şi $A'P = r'$ de aceste drepte.

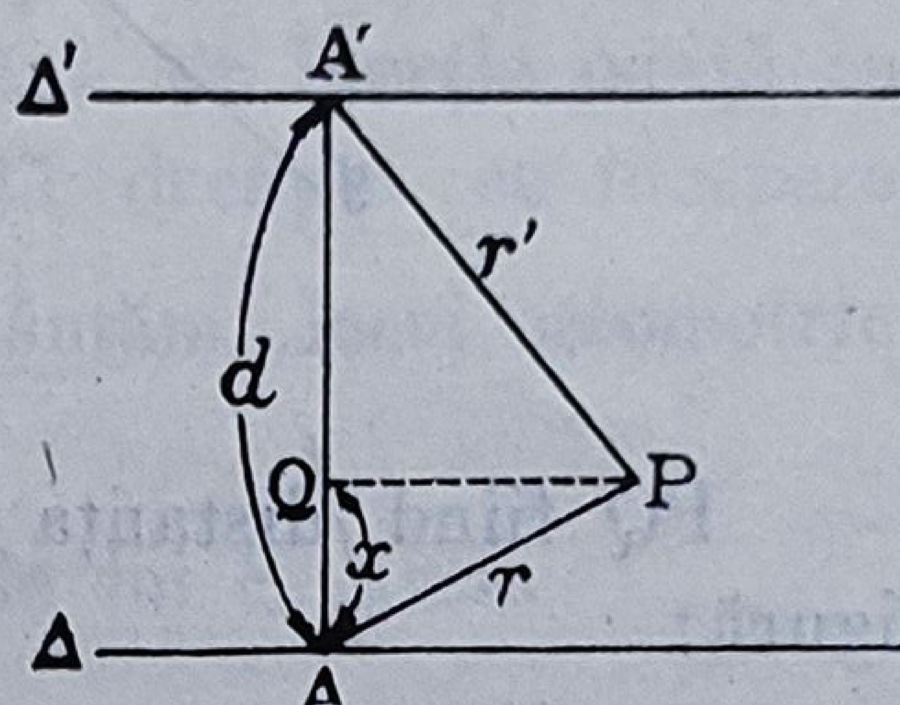


Fig. 168

Insemnând prin d distanţa dintre cele două drepte şi prin x distanţa punctului A până la proecţia Q a punctului P pe AA', avem

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2\,d.x\,.$$

Inmulţind ambii membri cu massa m a punctului P şi adunând rezultatele analoage pentru toate punctele sistemului, obţinem

$$\Sigma\, mr'^2 = \Sigma\, mr^2 + \mathrm{M}\,d^2 - 2\,d\,\Sigma\, mx\,.$$

Această relaţie se simplifică dacă presupunem că dreapta Δ trece prin centrul de greutate al sistemului. Avem în adevăr atunci $\Sigma\, mx = 0$ şi prin urmare

$$\Sigma\, mr'^2 = \Sigma\, mr^2 + \mathrm{M}d^2\,.$$

sau, mai pe scurt,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{I}' = \mathrm{I_G} + \mathrm{M}d^2\,.$$

Deci: *Momentul de inerţie în raport de o dreaptă oarecare, este egal cu momentul de inerţie luat în raport de paralela dusă acestei drepte prin centrul de greutate, plus productul massei sistemului cu patratul distanţei centrului său de greutate la dreapta considerată.*

3. Relaţiuni între momentele de inerţie luate în raport de drepte concurente. Fie un punct O şi o dreaptă oarecare Δ trecând prin acest punct. Să însemnăm prin α, β, γ unghiurile pe

care le face Δ cu trei axe dreptunghiulare duse prin O, şi prin x, y, z cordonatele unui punct oarecare P al sistemului.

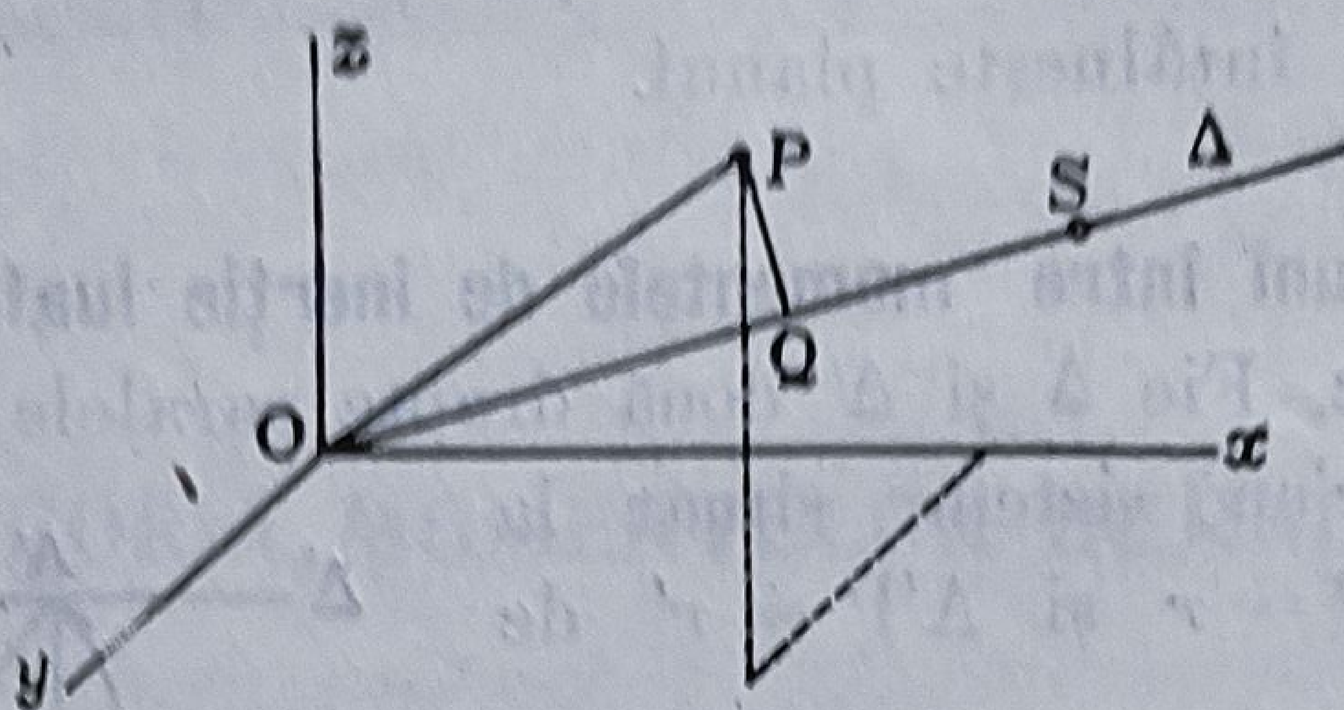


Fig. 169

PQ fiind distanţa punctului P la dreapsa Δ, avem pe figură:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 .$$

Insă OP fiind suma geometrică a vectoarelor x, y, z, proecţia sa OQ pe dreapta Δ este egală cu suma proecţiilor vectoarelor x, y, z pe Δ, deci

$$OQ = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

şi, în consecinţă,

$$\overline{PQ}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$

ceea ce este tot una cu

$$\overline{PQ}^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2) .$$

Punând $PQ = r$ şi desvoltând membrul al doilea, putem scrie

$$r^2 = (y^2 + z^2)\cos^2 \alpha + (z^2 + x^2)\cos^2 \beta + (x^2 + y^2)\cos^2 \gamma - 2\, yz \cos \beta \cos \gamma - 2\, zx \cos \gamma \cos \alpha - 2\, xy \cos \alpha \cos \beta .$$

Deducem, pentru momentul de inerţie al sistemului în raport de Δ,

$$(2) \qquad I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2\, D \cos \beta \cos \gamma - 2\, E \cos \gamma \cos \alpha - 2\, F \cos \alpha \cos \beta$$

punând

$$(3)\quad \begin{aligned} A &= \Sigma m (y^2 + z^2), & B &= \Sigma m (z^2 + x^2), & C &= \Sigma m (x^2 + y^2) \\ D &= \Sigma m y z, & E &= \Sigma m z x, & F &= \Sigma m x y . \end{aligned}$$

Coeficienţii A, B, C reprezintă, respectiv, momentele de inerţie ale sistemului în raport de axele Ox, Oy, Oz.

4. **Elipsoid de inerţie.** Pentru a reprezenta în mod geometric legea după care variază momentul de inerţie odată cu direcţia dreptei Δ, să purtăm pe această dreaptă cu începere din O lungime OS egală cu $\frac{1}{\sqrt{I}}$ şi să căutăm locul geometric al punctului S[1]).

Insemnând prin X, Y, Z cordonatele lui S, avem

$$\cos\alpha = \frac{X}{OS} = X\sqrt{I}, \quad \cos\beta = Y\sqrt{I}, \quad \cos\gamma = Z\sqrt{I} .$$

Substituind aceste valori în egalitatea (2) obţinem

$$(4)\qquad AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2\,DYZ - 2EZX - 2\,FXY = 1 .$$

Această ecuaţie reprezintă o suprafaţă de gradul al doilea, având punctul O drept centru. Cum momentul de inerţie I nu devine nul pentru nici una din dreptele Δ care trec prin O, raza vectoare OS nu devine niciodată infinită. In consecinţă, ecuaţia (4) reprezintă un elipsoid; el poartă numele de *elipsoidul de inerţie al sistemului pentru punctul* O.

Axele acestui elipsoid sunt zise *axele principale de inerţie* pentru punctul O. Dacă le luăm drept axe cordonate, ecuaţia elipsoidului se simplifică reducându-se la

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

ecuaţie în care coeficienţii A, B, C au bine înţeles alte valori decât în ecuaţia (4).

Valoarea lui I devine

$$(5)\qquad I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

---

[1]) Evident că ar fi mai simplu de a lua OS = I, însă locul geometric ar fi atunci o suprafaţă de gradul al şaselea.

Coeficienţii A, B, C reprezintă momentele de inerţie în raport de axele elipsoidului, zise *momente de inerţie principale pentru punctul* O [1]).

Insfârşit, coeficienţii D, E, F fiind nuli, avem

$$(6) \qquad \Sigma\, myz = o\,, \qquad \Sigma\, mzx = o\,, \qquad \Sigma\, mxy = o\,.$$

Două dintre aceste trei egalităţi, spre exemplu cele două dintâi, exprimă că ecuaţia (4)-a elipsoidului nu conţine pe Z la puterea întâia; *ele constituiesc prin urmare condiţiile necesare şi suficiente pentru ca axul* Oz *să fie ax principal de inerţie pentru origina* O.

Elipsoid central. La fiecare punct din spaţiu corespunde, pentru un sistem material determinat, un elipsoid de inerţie; acela dintre elipsoide care corespunde centrului de greutate al sistemului, poartă numele de *elipsoid central.*

5. Condiţie ca o dreaptă să fie ax principal de inerţie pentru unul din punctele ei.

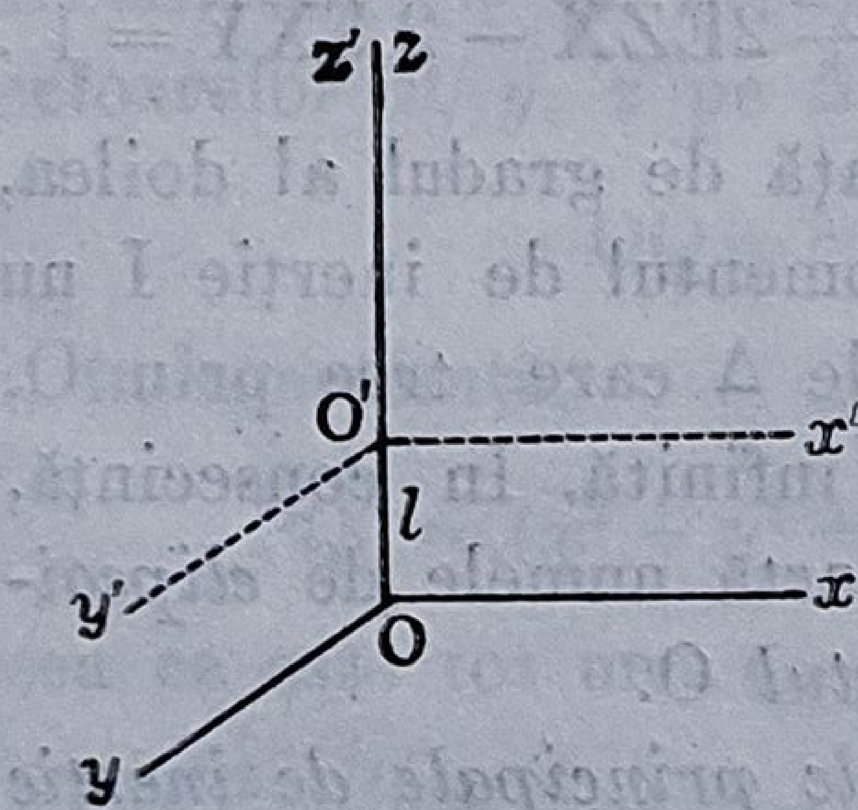


Fig. 170

Să luăm dreapta dată ca ax Oz al unui sistem dreptunghiular $Oxyz$. Fie O' punctul de pe Oz, situat la distanţa $OO' = l$, pentru care dreapta este ax principal de inerţie. Mutând axele Ox şi Oy paralel cu ele însăşi în punctul O', obţinem un nou sistem $O'x'y'z'$ în raport de care ecuaţia elipsoidului de inerţie pentru punctul O' nu conţine termeni în z' la puterea întâia. Avem deci

$$\Sigma\, m\, y'z' = o\,, \qquad \Sigma\, m\, z'x' = o$$

adică

$$\Sigma\, m\, y\,(z-l) = o\,, \qquad \Sigma\, m\, x\,(z-l) = o$$

---

[1]) Dacă însemnăm prin a, b, c lungimile celor 3 semi-axe ale elipsoidului, avem, potrivit formulei iniţiale $OS = \frac{1}{\sqrt{I}}$, egalităţile

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}\,, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{B}}\,, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{C}}\,.$$

sau

$$(7) \qquad \Sigma\, myz - l\mathrm{M}b = \mathrm{o}\,, \qquad \Sigma\, mzx - l\mathrm{M}a = \mathrm{o}$$

însemnând prin a şi b cordonatele centrului de greutate şi prin M massa totală a sistemului de puncte materiale.

Pentru ca cele două ecuaţii (7) să dea aceiaşi valoare pentru l trebue să avem

$$\frac{\Sigma\, myz}{\Sigma\, mzx} = \frac{b}{a}\,.$$

Această egalitate reprezintă condiţia căutată. Dacă ea are loc, distanţa l se determină prin una oarecare din cele două ecuaţii (7).

In cazul particular când centrul de greutate se află în planul xOz, avem $b = o$ şi ecuaţiile (7) dau ca condiţie $\Sigma\, myz = \mathrm{o}$, iar ca valoare pentru l:

$$l = \frac{\Sigma\, mzx}{\mathrm{M}a}\,.$$

6. **Condiţia ca o dreaptă să fie ax principal de inerţie pentru două din punctele ei.** Să luăm dreapta dată ca ax Oz şi să presupunem că ea este ax principal de inerţie pentru origina O. Avem atunci

$$\Sigma\, myz = \mathrm{o}\,, \qquad \Sigma\, mzx = \mathrm{o}\,.$$

Ca dreapta dată să fie ax principal de inerţie pentru un al doilea din punctele ei O′, trebue să mai avem potrivit ecuaţiilor (7):

$$\Sigma\, m\, yz = l\,\mathrm{M}\,b\,, \qquad \Sigma\, m\, zx = l\,\mathrm{M}a\,.$$

Deci

$$l\,\mathrm{M}b = \mathrm{o} \qquad , \qquad l\,\mathrm{M}a = \mathrm{o}$$

adică $a = \mathrm{o}$, $b = \mathrm{o}$, ceea ce înseamnă că centrul de greutate trebue să se găsească pe dreaptă. In asemenea condiţii însă, l devine nedeterminat, cu alte cuvinte dreapta considerată este ax principal de inerţie pentru ori şi care din punctele ei şi în particular pentru centrul de greutate; ea este deci un ax al elipsoidului central de inerţie.

Aşa dar: a) *Un ax al elipsoidului central este ax principal de inerţie pentru ori şi care din punctele sale;*

b) *Pentru ca* Oz *să fie un ax al elipsoidului central de inerţie, trebue să avem în acelaşi timp*

$$a=0, \quad b=0, \quad \Sigma m\,yz=0, \quad \Sigma m\,zx=0.$$

7. Calcularea momentelor de inerţie ale unui sistem continuu de puncte materiale.

Operaţia se execută după aceleaşi principii pe care le-am expus la capitolul determinării centrelor de greutate. In consecinţă, dacă raportăm sistemul la 3 axe dreptunghiulare, coeficienţii elipsoidului de inerţie pentru origină vor avea ca expresiuni potrivit formulelor (3):

$$A=\iiint \rho\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad D=\iiint \rho\,yz\,dx\,dy\,dz$$

$$B=\iiint \rho\,(z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad E=\iiint \rho\,zx\,dx\,dy\,dz$$

$$C=\iiint \rho\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz; \qquad F=\iiint \rho\,xy\,dx\,dy\,dz.$$

Pentru solidele omogene de formă geometrică, se calculează cele 3 momente de inerţie principale pentru centrul de greutate. Odată cunoscute aceste 3 momente, formula (5) dă momentul de inerţie în raport de ori ce dreaptă trecând prin centrul de greutate, iar formula (1) permite apoi de a calcula momentul de inerţie în raport de o dreaptă oarecare.

8. Consideraţiuni de avut în vedere pentru calcularea momentelor de inerţie ale solidelor omogene.

a). *Când un solid omogen are un ax de simetrie, acesta este un ax al elipsoidului central de inerţie,* căci dacă-l luăm ca ax Oz al unui sistem dreptunghiular, cum centrul de greutate se găseşte pe ax, avem $a=0$, $b=0$ şi pe de altă parte $\Sigma m\,yz=0$, $\Sigma m\,zx=0$ de oarece la fiecare massă de cordonate x, y, z corespunde o massă egală de cordonate $-x, -y, z$.

b). *Când un solid omogen are un plan de simetrie, ori ce dreaptă perpendiculară pe plan este ax principal de inerţie*

pentru punctul unde întâlnește planul, căci dacă luăm dreapta ca ax Oz, la fiecare massă de cordonate x, y, z corespunde o massă egală de cordonate x, y, $-z$ și prin urmare $\Sigma\, m\, yz = 0$, $\Sigma\, m\, zx = 0$.

c). *Când un solid omogen este de revoluție, elipsoidul de inerție pentru ori ce punct al axului de revoluție este și el de revoluție în jurul aceluiași ax.*

In adevăr, axul de revoluţie fiind un ax de simetrie, este ax al elipsoidului central de inerţie şi prin urmare principal de inerţie pentru ori şi ce punct al său. Celelalte două axe ale elipsoidului de inerţie sunt deci coprinse în planul perpendicular axului dus prin punctul considerat. Ori, toate momentele de inerţie în raport de dreptele conţinute în acest plan şi pornind din punctul considerat sunt evident egale unele cu altele. Aşa dar aceste drepte sunt toate principale de inerţie pentru acel punct [1]), adică sunt axe ale elipsoidului care este astfel un elipsoid de revoluţie.

Notă. Ca şi în Nota de la pag. 153 referitoare la centrele de greutate, vom observa că rezultatele specificate la cele trei litere a), b), c) de mai sus rămân adevărate şi în cazul când solidul considerat nu este omogen însă prezintă particularitatea că *punctele sale care se corespund simetric au aceiași massă.*

Astfel este cazul proectilelor de artilerie încărcate cu explosiv. Axul lor de figură, care este ax de revoluţie, este principal de inerţie pentru ori şi ce punct al său, elipsoidul respectiv de inerţie fiind şi el de revoluţie în jurul aceluiaşi ax.

II. MOMENTELE DE INERȚIE A CÂTORVA VOLUME OMOGENE.

Vom calcula numai cele trei momente de inerţie principale pentru centrul de greutate, presupunând corpurile omogene şi cu o densitate $\rho = 1$, ceea ce permite de a confunda elementul de

---

[1]) Aceasta se mai putea stabili şi prin aplicaţia rezultatului dela litera b) căci toate planurile duse prin axul de revoluţie sunt planuri de simetrie, aşa că ori ce dreaptă dusă prin punctul ales, perpendicular pe aceste planuri şi deci perpendiculară pe ax, este ax principal de inerţie pentru acel punct.

massă cu elementul de volum. După cum am spus mai sus, odată cunoscute aceste trei momente, formulele (5) şi (1) ne permit apoi să determinăm momentul de inerţie al corpului considerat în raport de ori şi ce dreaptă a spaţiului.

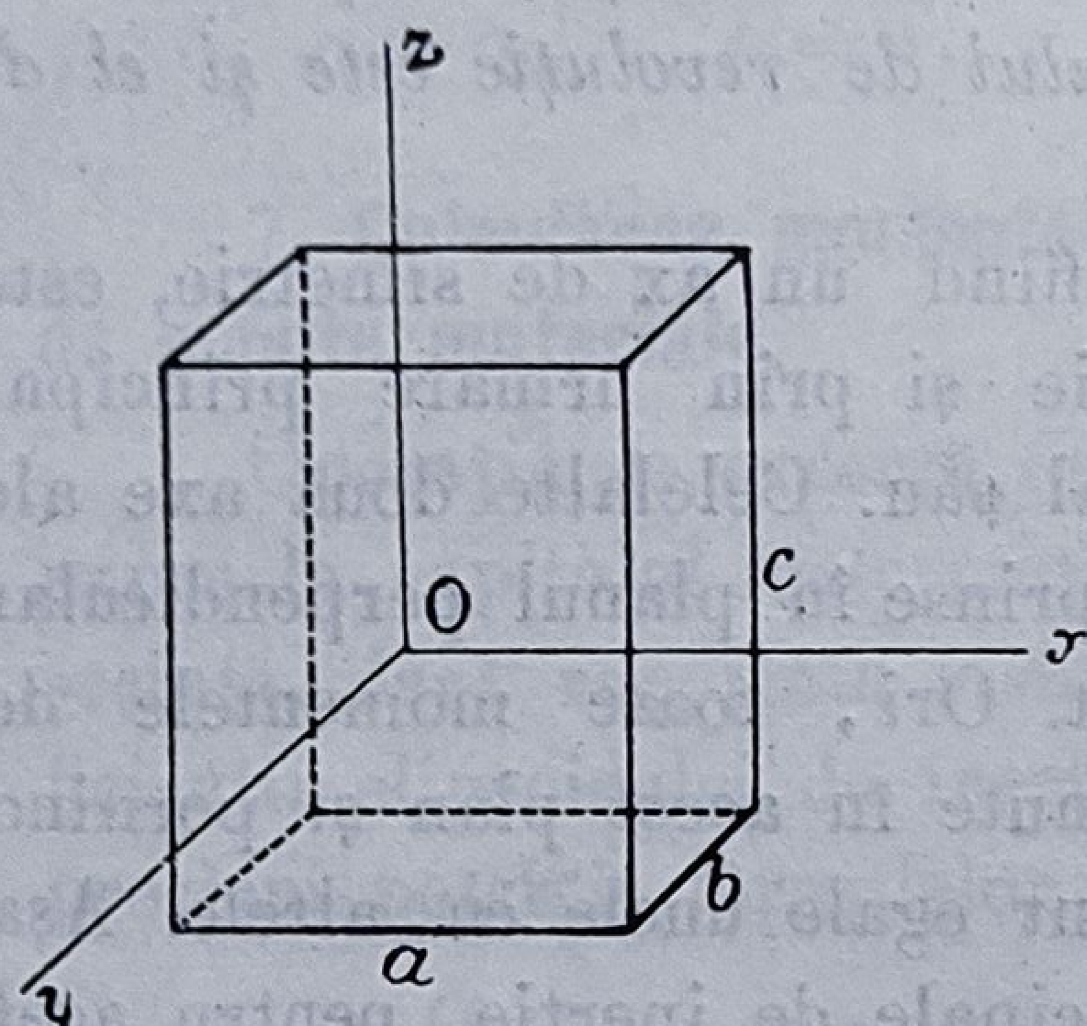


Fig. 171

1. **Paralelipiped dreptunghiu.** Centrul de greutate este în centrul de figură O, iar paralelele Ox, Oy, Oz duse muchiilor prin punctul O sunt axele principale de inerţie pentru acest punct, potrivit demonstraţiilor dela Nr. 8 precedent.

Vom avea de calculat cele 3 integrale:

$$A = \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz\,,$$

$$B = \iiint (z^2 + x^2)\, dx\, dy\, dz\,, \qquad C = \iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Ori, însemnând prin a, b, c lungimile celor 3 muchii ale paralelipipedului, avem

$$\iiint x^2\, dx\, dy\, dz = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\, dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz = bc \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{1}{12}\, a^3\, b\, c$$

şi de asemenea

$$\iiint y^2\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{12}\, a\, b^3\, c\,, \qquad \iiint z^2\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{12}\, a\, b\, c^3\,.$$

Deducem

$$A = \iiint y^2\, dx\, dy\, dz + \iiint z^2\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{12}\, a\, b\, c\, (b^2 + c^2)$$

$$B = \frac{1}{12}\, a\, b\, c\, (c^2 + a^2)\,, \quad C = \frac{1}{12}\, a\, b\, c\, (a^2 + b^2)\,.$$

Pe de altă parte, cum massa M a paralelipipedului redu-

să la volumul V are ca valoare abc, vedem că patratele celor trei raze de girație corespunzătoare momentelor de inerție A, B, C au ca expresii, potrivit formulei $MK^2 = \Sigma m r^2$,

$$\frac{1}{12}(b^2 + c^2), \qquad \frac{1}{12}(c^2 + a^2), \qquad \frac{1}{12}(a^2 + b^2).$$

Dacă presupunem $a < b < c$ observăm că $A > B > C$, însă, dacă însemnăm prin a', b', c' semi-axele elipsoidului de inerție, avem $a' < b' < c'$, căci

$$a' = \frac{1}{\sqrt{A}}, \qquad b' \frac{1}{\sqrt{B}}, \qquad c' \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

2. **Cilindru circular.** Centrul de greutate este pe axul cilindrului, la jumătatea lungimei sale. Să luăm acest punct ca origină a unui sistem de cordonate dreptunghiulare, axul Oz fiind chiar axul cilindrului iar celelalte două axe Ox și Oy orientate într'un mod oarecare în planul dus prin O perpendicular pe Oz. Aceste trei axe sunt axe principale de inerție pentru centrul de greutate.

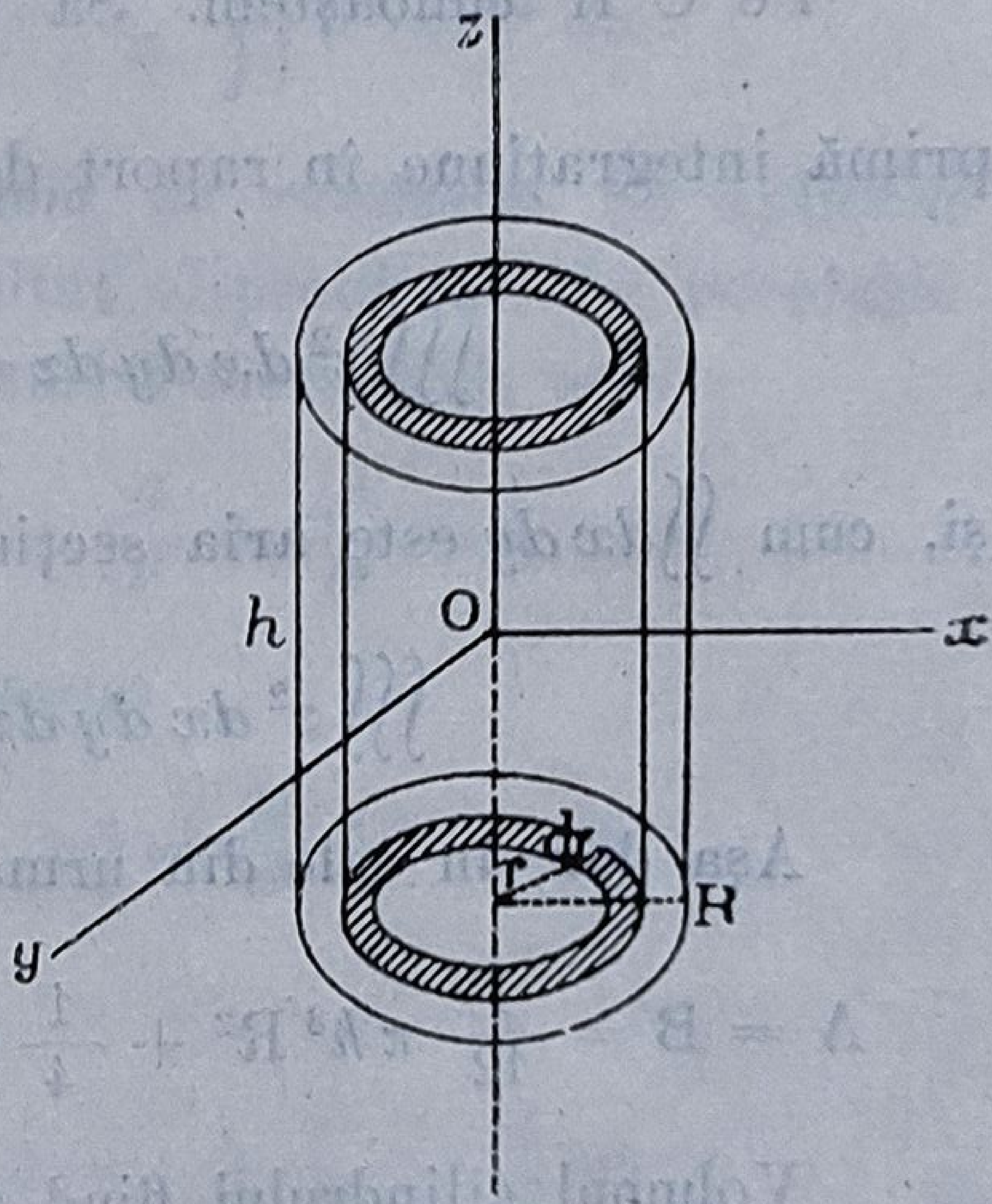


Fig. 172

Să calculăm mai întâi momentul de inerție în raport de axul Oz. Pentru aceasta, să descompunem cilindrul în straturi concentrice de grosime dr; dacă însemnăm prin h înălțimea cilindrului și prin R raza sa, momentul de inerție al unui strat în raport de Oz va avea ca expresie[1] $2\pi h r\,dr \cdot r^2$ și prin urmare

$$C = \int_0^R 2\pi h r\,dr \cdot r^2 = 2\pi h \int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi h R^4.$$

[1]) Volumul cilindrului de rază r fiind $\pi r^2 h$, diferențiala sa când nu variază decât r este $2\pi h r\,dr$.

Cum cilindrul circular este un corp de revoluţie, elipsoidul de inerţie pentru ori-ce punct al axului Oz este şi el de revoluţie în jurul lui Oz; deci $A = B$. Ori

$$A = \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz, \qquad B = \iiint (z^2 + x^2)\, dx\, dy\, dz,$$

$$C = \iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

prin urmare

$$A = B = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2} \iiint (2z^2 + x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

sau încă

$$A = B = \iiint z^2\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{2} C.$$

Pe C îl cunoaştem. Să calculăm pe celălalt termen. O primă integraţiune în raport de z dela $-\frac{h}{2}$ la $+\frac{h}{2}$ ne dă

$$\iiint z^2\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{12} h^3 \iint dx\, dy$$

şi, cum $\iint dx\, dy$ este aria secţiunii drepte a cilindrului, rezultă că

$$\iiint z^2\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{12} \pi h^3 R^2.$$

Aşa dar, în cele din urmă,

$$A = B = \frac{1}{12} \pi h^3 R^2 + \frac{1}{4} \pi h R^4 = \frac{\pi}{4} h R^2 \left(R^2 + \frac{1}{3} h^2\right).$$

Volumul cilindrului fiind $\pi R^2 h$, patratele celor două raze de giraţie care corespund momentelor de inerţie A şi C sunt respectiv egale cu

$$\frac{1}{4}\left(R^2 + \frac{1}{3} h^2\right), \qquad \frac{1}{2} R^2.$$

3. Momentul de inerţie al unui solid de revoluţie în raport de axul său. Să considerăm cilindrul elementar de înălţime dz

coprins între două planuri perpendiculare axului. Momentul său de inerţie în raport de Oz este, după cum s'a văzut mai sus,

$$\frac{1}{2} \pi x^4 dz$$

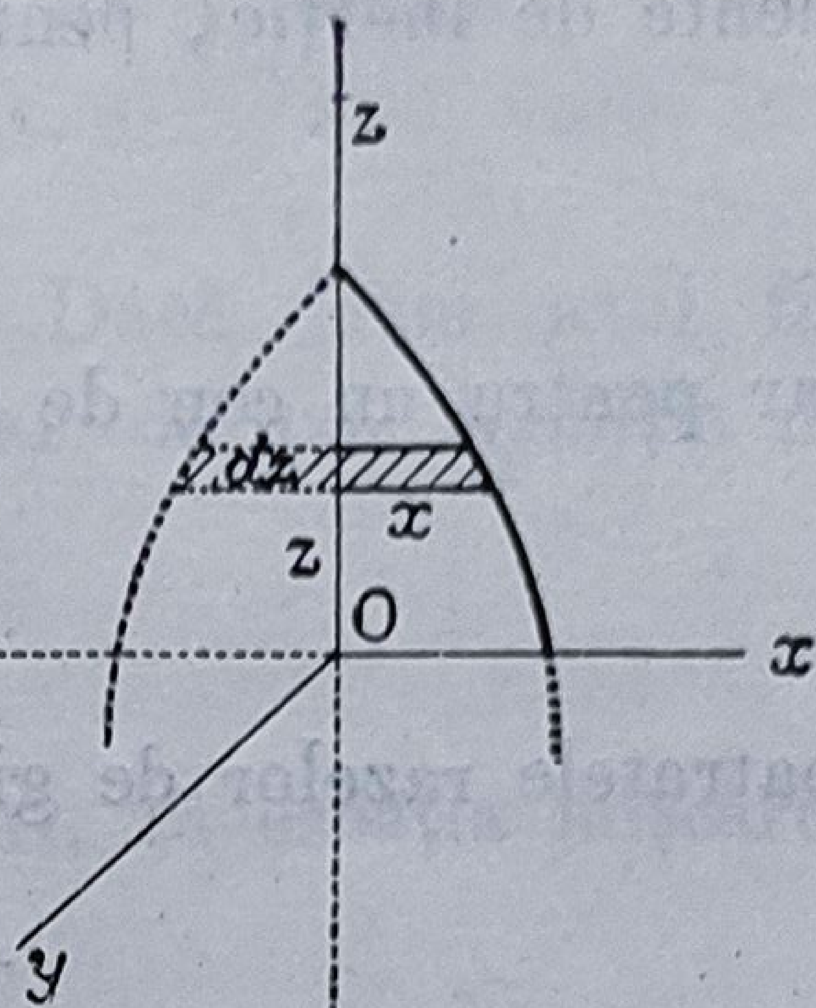


Fig. 173

x fiind raza cilindrului. Momentul de inerţie al întregului solid va fi în consecinţă

$$C = \frac{\pi}{2} \int x^4 dz.$$

Insă, dacă ecuaţia curbei meridiane este $f(x, z) = o$, deducem din ea $x = \varphi (z)$ şi prin urmare

$$C = \frac{\pi}{2} \int \left[\varphi (z) \right]^4 dz.$$

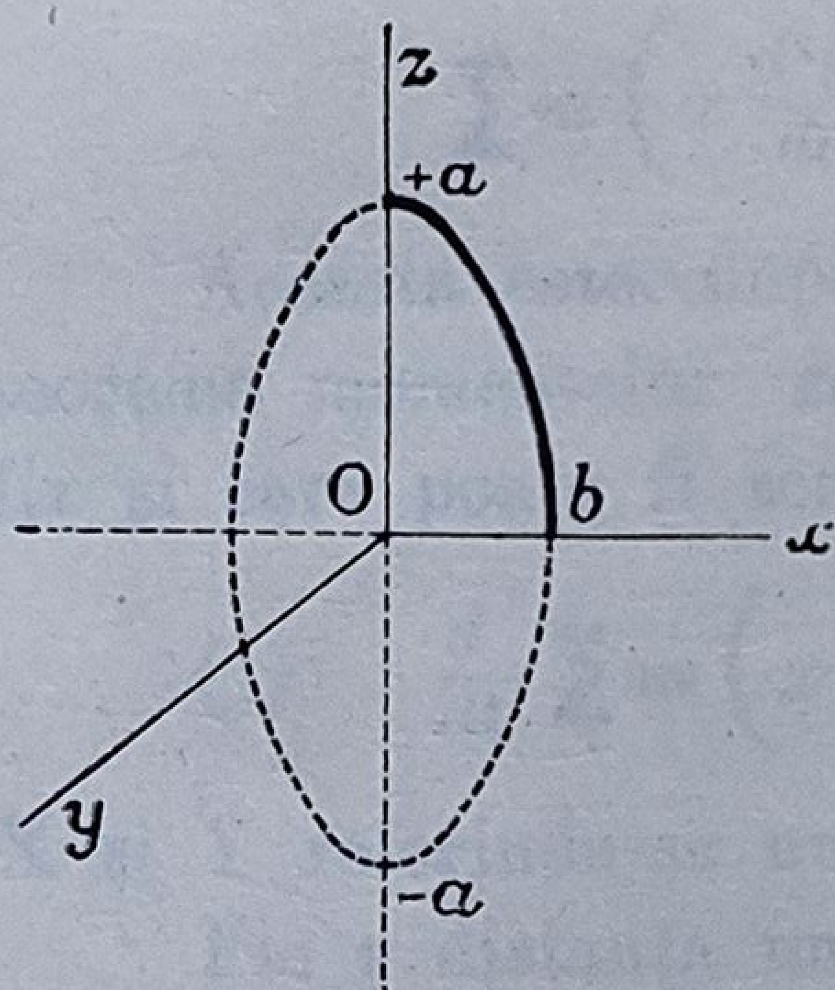


Fig. 174

Elipsoid de revoluţie. Să aplicăm acest rezultat elipsoidului de revoluţie a căruia curbă meridiană este

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Deducem

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - z^2)$$

aşa că avem

$$C = \frac{\pi}{2} \frac{b^4}{a^4} \int_{-a}^{+a} (a^2 - z^2)^2 dz = \frac{\pi}{2} \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{16}{15} a^5$$

adică

$$C = \frac{8}{15} \pi a b^4.$$

Volumul elipsoidului fiind egal cu $\frac{4}{3} \pi a b^2$, patratul razei de giraţie este $\frac{2}{5} b^2$.

Sferă și con de revoluție. In mod analog, găsim ca momente de inerție, pentru o sferă de rază R,

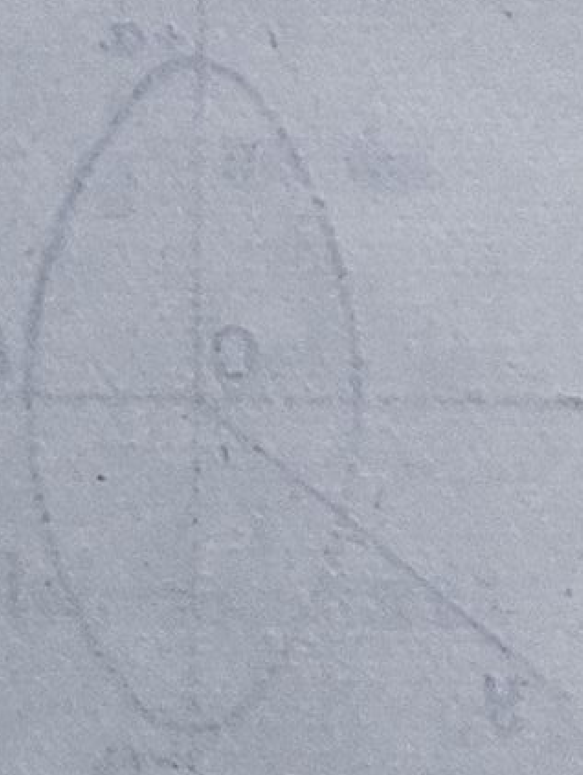
$$C = \frac{8}{15} \pi R^5$$

iar pentru un con de revoluție de înălțime h și rază la bază R,

$$C = \frac{\pi}{10} R^4 h$$

patratele razelor de girație fiind respectiv,

$$\frac{2}{5} R^2, \qquad \frac{3}{10} R^2.$$



III. MIŞCAREA UNUI SOLID IN JURUL UNUI AX FIX.

1. **Ecuaţia diferenţială a mişcărei.** Dacă luăm axul fix drept ax Oz al unui sistem dreptunghiular de axe, condiţia de echilibru a solidului fiind

$$\Sigma (xY - yX = 0$$

rezultă, potrivit principiului lui d'Alembert, că ecuaţia mişcărei solidului în jurul axului fix va fi

$$\sum \left[x\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right] = 0$$

sau

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum \left(xY - yX\right).$$

Aceasta este, după cum se vede, ecuaţia din care se deduce teorema momentelor cantităţilor de mişcare în raport de axul fix şi care poate fi scrisă

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \sum \left(xY - yX\right)$$

X şi Y referindu-se numai la *forţele direct aplicate*.

Fie r distanţa unuia oarecare M din punctele solidului la axul fix şi ω viteza unghiulară a solidului în momentul t. Cantitatea de mişcare a punctului M fiind un vector egal cu $mr\omega$ şi tangent circonferinţei pe care o descrie M în mişcarea sa de rotaţie, momentul cantităţei de mişcare în raport de axul fix Oz este egal cu $mr^2\omega$ aşa că aplicaţia ecuaţiei (1) ne dă

$$\frac{d}{dt}\sum mr^2\omega = \sum \left(xY - yX\right)$$

adică

$$\frac{d}{dt}\omega \sum mr^2 = \sum \left(xY - yX\right)$$

sau

$$(2) \qquad I\frac{d\omega}{dt} = N$$

punând $I = \Sigma mr^2$ şi $N = \Sigma (xY - yX)$.

Dacă însemnăm prin θ unghiul pe care-l descrie raza vectoare r a punctului M cu începere de la un plan fix, spre exemplu dela planul xOz, avem $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ și ecuația (2) se mai poate scrie

$$(2)^{\text{bis}} \qquad I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N .$$

Bine înțeles că puteam ajunge la această ecuație și înlocuind în primul membru al formulei (1) pe x și y prin expresiile

$$x = r\cos\theta , \qquad y = r\sin\theta .$$

Ecuația (2) sau $(2)^{\text{bis}}$ exprimă următorul rezultat: *Accelerația unghiulară a unui solid care se învârtește în jurul unui ax fix, este egală cu câtul dintre suma momentelor forțelor direct aplicate și momentul de inerție al solidului, luate amândouă în raport de axul fix.*

Să observăm că suma momentelor cantităților de mișcare (*momentul cinetic*) în raport de axul fix are ca expresie

$$\Sigma\, mr^2\omega = I\,\omega \text{ [1]}$$

---

[1]) a). Fie OK momentul cinetic în raport de origina O, și OH proecția lui OK pe Oz.

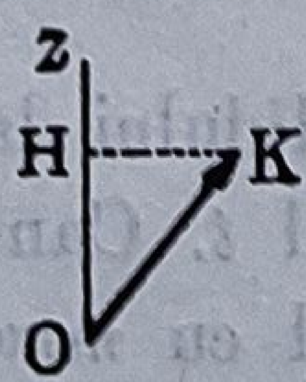


Fig. 175

OH fiind egal cu $I\omega$, ecuația (2) exprimă că viteza $I\frac{d\omega}{dt}$ a punctului H pe Oz este egală cu N.

b). Să calculăm proecțiile pe Ox și Oy ale lui OK. Acestea sunt respectiv egale cu

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \text{ și } \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right).$$

Ori, pentru un punct M, avem

$$x = r\cos\theta , \qquad y = r\sin\theta , \qquad z = \text{const.}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y , \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x , \qquad \frac{dz}{dt} = 0 .$$

Făcând aceste înlocuiri sub cele două semne Σ se obține

$$-\omega\,\Sigma\, mxz \quad \text{și} \quad -\omega\,\Sigma\, mzy.$$

Vectorul OK nu coincide prin urmare cu Oz decât dacă avem în același timp

$$\Sigma\, mxz = 0 \quad \text{și} \quad \Sigma\, mzy = 0$$

adică *dacă axul Oz este principal de inerție pentru punctul* O.

iar forța vie este

$$T = \frac{1}{2} \sum mv^2 = \frac{1}{2} \sum mr^2\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

De altfel, aplicația teoremei forțelor vii ne dă

$$dT = d\theta \, \Sigma \, (xY - yX)$$

căci, fiind vorba de o mișcare de rotație, travaliul elementar al forțelor este egal cu momentul lor în raport de axul de rotație, înmulțit cu deplasarea unghiulară elementară $d\theta$. Deci

$$(3) \qquad d \, \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = N d\theta$$

adică

$$I \frac{d^2\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \, dt = N d\theta$$

și prin urmare simplificând cu $d\theta$,

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

care este ecuația $(2)^{bis}$.

2. Integrațiunea ecuației diferențiale a mișcării. N, fiind în general funcție de t, θ, $\frac{d\theta}{dt}$, ecuația $(2)^{bis}$ se prezintă sub forma

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = F\left(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}\right).$$

Integrațiunea acestei ecuații diferențiale dă pe θ în funcție de t și de două constante arbitrare care corespund valorilor inițiale θ_0 și ω_0.

In cazul când N este funcție numai de θ, integrațiunea se reduce la simple cuadraturi. In adevăr, punând $N = f(\theta)$, ecuația (3) ne dă

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \int f(\theta) \, d\theta + \text{const.}$$

sau

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2}{I} \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta) \, d\theta + \omega_0^2$$

de unde

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I}\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta + \omega_0^2}}$$

şi, printr'o nouă cuadratură, se obţine t în funcţie de θ, şi invers θ în funcţie de t şi de două constante arbitrare θ_0 şi ω_0.

3. **Eforturi asupra axului în mişcarea de rotaţie a unui solid.** Fixitatea axului de rotaţie poate fi realizată prin fixitatea a două din punctele sale. Fie F_1 şi F_2 acţiunile acestor puncte asupra solidului în mişcare, într'un moment t. Eforturile exercitate de solid asupra axului vor fi două forţe egale şi direct opuse forţelor F_1 şi F_2, aplicate în cele două puncte fixe.

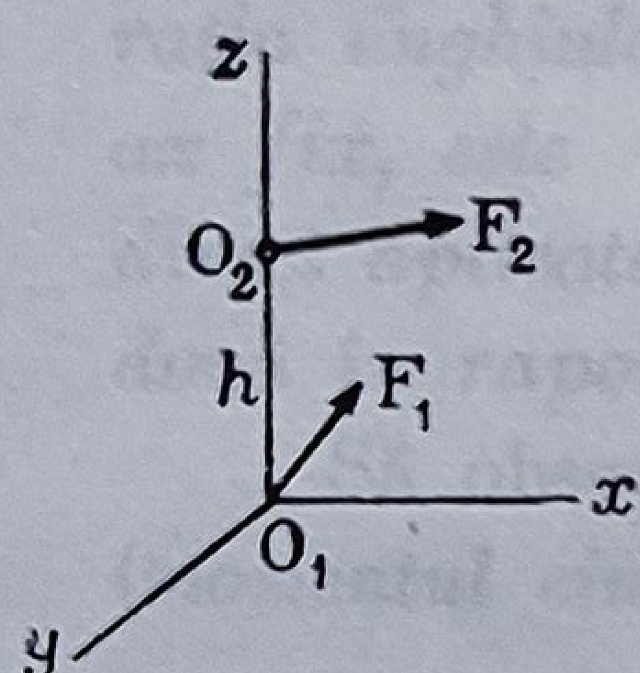


Fig. 176

Să calculăm pe F_1 şi F_2. Pentru aceasta vom scrie că există echilibru între forţele direct aplicate, forţele de legătură F_1 şi F_2 şi forţele de inerţie.

Să luăm axul de rotaţie drept ax O_1z al unui sistem dreptunghiular O_1xyz, origina fiind aşezată în unul din punctele fixe; fie O_2 celălalt punct fix situat la distanţa h de origină. Insemnând prin:

P, Q, R componentele vectorului rezultant al forţelor direct aplicate;

L, M, N componentele momentului rezultant al forţelor direct aplicate, în raport de origină;

X_1, Y_1, Z_1 componentele forţei F_1;

X_2, Y_2, Z_2 componentele forţei F_2;

X', Y', Z' componentele vectorului rezultant al forţelor de inerţie;

L', M', N' componentele momentului rezultant al forţelor de inerţie în raport de origină;

cele 6 ecuaţii, deduse din ecuaţiile generale de echilibru prin adăogirea forţelor de inerţie, se scriu:

$$(4) \quad \begin{cases} P + X_1 + X_2 + X' = 0 \\ Q + Y_1 + Y_2 + Y' = 0 \\ R + Z_1 + Z_2 + Z' = 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} L - h\,Y_2 + L' = 0 \\ M + h\,X_2 + M' = 0 \\ N + N' = 0 . \end{cases}$$

Să determinăm componentele X', Y', Z' şi L', M', N' referitoare forţelor de inerţie.

a). *Componentele* X', Y', Z'. Avem

$$X' = -\sum m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y' = -\sum m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z' = -\sum m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ori, relaţiile

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta, \quad z = \text{const}.$$

ne dau succesiv

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

$$(6) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - y\frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + x\frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Deducem

$$X' = \omega^2 \sum mx + \frac{d\omega}{dt}\sum m\,y$$

$$Y' = \omega^2 \sum my - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,x$$

$$Z' = 0$$

sau, dacă însemnăm prin $\overline{M}$ massa solidului şi prin a, b, c cordonatele centrului său de greutate,

$$(7) \quad \begin{aligned} X' &= \overline{M}\,a\,\omega^2 + \overline{M}\,b\frac{d\omega}{dt} \\ Y' &= \overline{M}\,b\,\omega^2 + \overline{M}\,a\frac{d\omega}{dt} \\ Z' &= 0. \end{aligned}$$

Valoarea $Z' = o$ se înţelegea din capul locului, căci mişcarea oricăruia din punctele solidului fiind o mişcare circulară, forţa efectivă care produce această mişcare, considerată ca liberă, fiind coprinsă în planul cercului nu are componentă paralelă cu $O_1 z$; forţa de inerţie fiind egală şi direct opusă forţei efective, nu are deci nici ea asemenea componentă.

Expresiunile (7) reprezintă de altfel componentele forţei de inerţie a centrului de greutate, dacă se consideră massa totală a corpului concentrată în acest punct. Avem, în adevăr, după cum se ştie,

$$X' = - \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \overline{M} \frac{d^2 a}{dt^2}$$

$$Y' = - \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \overline{M} \frac{d^2 b}{dt^2} .$$

b). *Componentele* L′, M′, N′. Avem

$$L' = - \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

$$M' = - \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

$$N' = - \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) .$$

Inlocuind derivatele prin expresiile lor (6) se obţine,

$$L' = \Sigma m z \left(x \frac{d\omega}{dt^2} - \omega^2 y \right)$$

$$M' = \Sigma m z \left(y \frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x \right)$$

$$N' = \Sigma m \left[x \left(\omega^2 y - x \frac{d\omega}{dt} \right) - y \left(\omega^2 x + y \frac{d\omega}{dt} \right) \right]$$

adică

$$L' = \frac{d\omega}{dt} \Sigma mxz - \omega^2 \Sigma myz , \quad M' = \frac{d\omega}{dt} \Sigma myz + \omega^2 \Sigma mxz$$

(8)

$$N' = - \frac{d\omega}{dt} \Sigma m (x^2 + y^2) = - I \frac{d\omega}{dt} .$$

Aceste valori depind, după cum se vede, de coeficienţii elipsoidului de inerţie pentru origina O_1.

c). Să substituim acum valorile (7) şi (8) în ecuaţiile (4) şi (5). Obţinem

$$(9)\quad \begin{cases} P + X_1 + X_2 + \overline{M}\, a\, \omega^2 + \overline{M}\, b \dfrac{d\omega}{dt} = 0 \\ Q + Y_1 + Y_2 + \overline{M}\, b\, \omega^2 - \overline{M}\, a \dfrac{d\omega}{dt} = 0 \\ R + Z_1 + Z_2 = 0 \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} L - hY_2 + \dfrac{d\omega}{dt} \Sigma\, m\, xz - \omega^2\, \Sigma\, m\, yz = 0 \\ M + hX_2 + \dfrac{d\omega}{dt} \Sigma\, m\, yz + \omega^2\, \Sigma\, m\, xz = 0 \\ N - I \dfrac{d\omega}{dt} = \cdot \end{cases}$$

Ultima ecuaţie ne este cunoscută; ea este ecuaţia diferenţială din care se deduce legea mişcării de rotaţie în jurul axului:

$$\theta = f(t), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = f'(t).$$

Să ne ocupăm de celelalte. Cantităţile P, Q, R, L, M, raportându-se la forţele date, sunt expresiuni cunoscute de t, θ, $\frac{d\theta}{dt}$ şi prin urmare de t, dacă s'a obţinut legea $\theta = f(t)$.

Cordonatele a şi b ale centrului de greutate sunt deasemenea funcţii de t potrivit formulelor:

$$a = \rho \cos \theta, \qquad b = \rho \sin \theta$$

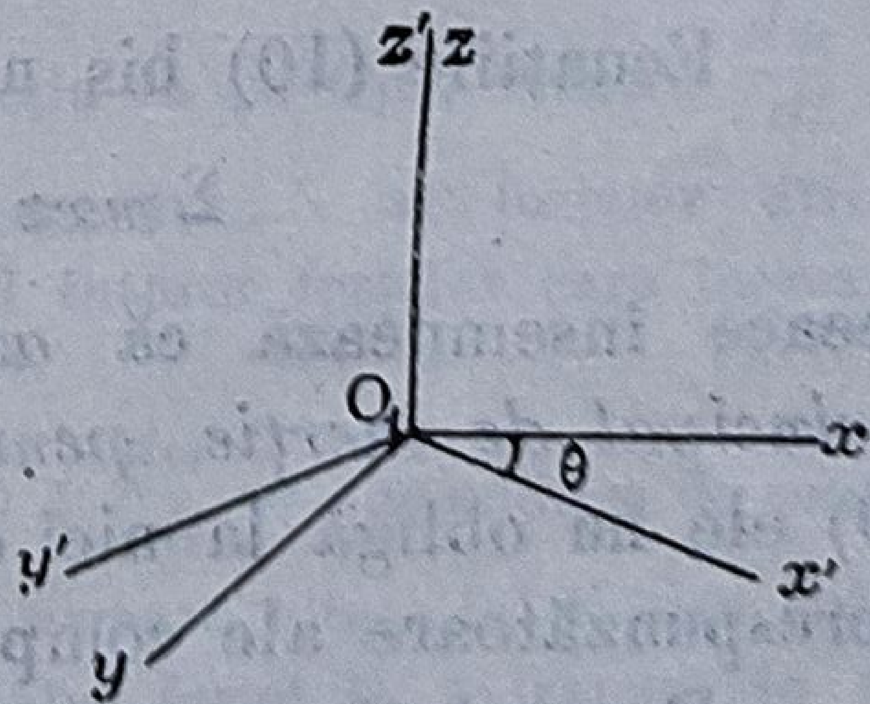


Fig. 177

în care ρ reprezintă depărtarea constantă a centrului de greutate la ax.

Insfârşit, pentru a se exprima $\Sigma\, m\, xz$ şi $\Sigma\, m\, yz$ în funcţie de θ şi deci de t, se va imagina un sistem dreptunghiular de axe $O_1\, x'y'z'$ ($z' = z$) care legat invariabil solidului să ia parte odată cu el la mişcarea de rotaţie.

Avem atunci

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

şi prin urmare

$$\Sigma\, m\, xz = \cos\theta\; \Sigma\, m\, x'z' - \sin\theta\; \Sigma\, m\, y'z'$$
$$\Sigma\, m\, yz = \sin\theta\; \Sigma\, m\, x'z' + \cos\theta\; \Sigma\, m\, y'z'$$

egalităţi în care sumele $\Sigma\, m\, x'z'$ şi $\Sigma\, m\, y'z'$ sunt cantităţi constante.

Din sistemul de egalităţi (9) şi (10) ecuaţiile întâia, a doua, a patra şi a cincia dau valorile X_1, X_2, Y_1, Y_2. Rămâne ecuaţia a treia care dă suma $Z_1 + Z_2$. Deci ca şi în cazul echilibrului, componentele Z_1 şi Z_2 nu se pot calcula separat.

Cazuri particulare. 1⁰) ***Să presupunem că forţele direct aplicate se reduc la o forţă unică trecând necontenit prin punctul*** O_1. Avem atunci

$$L = o, \qquad M = o, \qquad N = o$$

şi ecuaţiile (10) se reduc la

$$(10)^{bis} \left\{ \begin{aligned} & hY_2 - \frac{d\omega}{dt}\,\Sigma\, m\, xz + \omega^2\,\Sigma\, m\, yz = o \\ & hX_2 + \frac{d\omega}{dt}\,\Sigma\, m\, yz + \omega^2\,\Sigma\, m\, xz = o \\ & \cdot\frac{d\omega}{dt} = o\,. \end{aligned} \right.$$

Ultima ecuaţie dă ω = const. Să cercetăm dacă se poate întâmpla ca *punctul* O_2 *să nu suporte nici o presiune*. Trebue pentru aceasta ca ecuaţiile (9) şi (10) bis să fie satisfăcute când facem în ele $X_2 = o$, $Y_2 = o$, $Z_2 = o$.

Ecuaţiile (10) bis ne dau ca condiţii

$$\Sigma\, mxz = o\,, \qquad \Sigma\, myz = o$$

ceeace însemnează că *axul de rotaţie* O_1z *trebue să fie ax principal de inerţie pentru origina* O_1. Cât priveşte ecuaţiile (9) ele nu obligă la nici o condiţie şi dau pur şi simplu valorile corespunzătoare ale componentelor X_1, Y_1, Z_1.

Punctul O_2 ne suportând nici o presiune, solidul poate fi considerat ca liber în acest punct. De aci următoarea teoremă:

Dacă un solid mobil în jurul unui punct fix, este supus la forțe direct aplicate care admit o rezultantă trecând prin punctul fix, și dacă solidul în virtutea unor anumite condiții inițiale începe a se învârti în jurul unui ax principal de inerție pentru punctul fix, el va continua să se învârtească indefinit în jurul acestui ax cu o viteză unghiulară constantă și fără ca vre un alt punct al axului, în afară de cel fix, să suporte vre-o presiune [1]).

Din cauza acestei proprietăți, axele principale de inerție pentru un punct O, se mai numesc uneori *axe permanente de rotație* pentru acest punct.

2°). *Să presupunem acum că forțele direct aplicate își fac echilibru, sau că nu există asemenea forțe.* Avem în asemenea caz

$$P=o, \quad Q=o, \quad R=o;$$
$$L=o, \quad M=o, \quad N=o.$$

Pentru ca punctul O_2 să nu suporte nici o presiune, trebue să avem ca și mai sus

$$(11) \qquad \Sigma\, mxz=o, \qquad \Sigma\, myz=o$$

iar pe de altă parte N fiind nul, ω este constant.

Să cercetăm dacă se poate întâmpla ca presiunea în punctul O_1 să fie și ea nulă. Va trebui pentru aceasta ca ecuațiile (9)

---

1) La acest rezultat se poate ajunge și direct prin următoarele considerații:

Dacă presupunem că axul O_1z este principal de inerție pentru punctul O_1, vectorul O_1K al momentului cinetic în raport de O_1 are direcția O_1z și valoarea $I\omega$. Acest vector fiind identic cu proecția sa pe O_1z, viteza $I\frac{d\omega}{dt}$ a punctului K pe O_1z este egală atât cu momentul N al forțelor direct aplicate cât și cu momentul în raport de O_1 al tuturor forțelor care lucrează asupra solidului (pag. 326).

Considerația întâia ne dă (N fiind nul) $I\frac{d\omega}{dt}=o$ de unde $\omega=$ const. Momentul cinetic $I\omega$ este deci constant și prin urmare viteza lui K este nulă. Considerația a doua stabilește atunci că momentul forței F_2 în raport de O_1 este nul, ceeace pretinde ca forța F_2 să fie nulă, deci $X_2=o$. $Y_2=o$.

să fie satisfăcute când vom face în ele pe P, Q, R; X_1, Y_1; X_2, Y_2 egali cu zero. Se obţin atunci ca condiţii

$$(12) \qquad a = o, \qquad b = o.$$

Ori condiţiile (11) şi (12) exprimă că *axul de rotaţie este un ax al elipsoidului central de inerţie.* Avem deci teorema următoare:

Dacă un solid liber, acţionat de forţe care îşi fac echilibru, sau sustras oricărei forţe, începe a se învârti în jurul unui ax al elipsoidului central de inerţie, el va continua să se învârtească indefinit în jurul acestui ax cu o viteză unghiulară constantă şi fără ca vre unul din punctele axului să suporte vre o presiune.

Această proprietate a făcut să se dea axelor elipsoidului central de inerţie numele de *axe naturale* de rotaţie.

3°). *Să presupunem însfârşit că forţele direct aplicate se reduc la un cuplu al căruia plan este perpendicular pe axul de rotaţie.*

In acest caz P, Q, R, L, M sunt nuli ca şi în cazul precedent, însă N este diferit de zero. Deci teorema precedentă subsistă, cu singura deosebire că viteza unghiulară a mişcării nu rămâne constantă.

PENDULUL COMPUS.

Se numeşte astfel un solid supus numai la acţiunea greutăţii şi obligat de a se învârti în jurul unui ax orizontal.

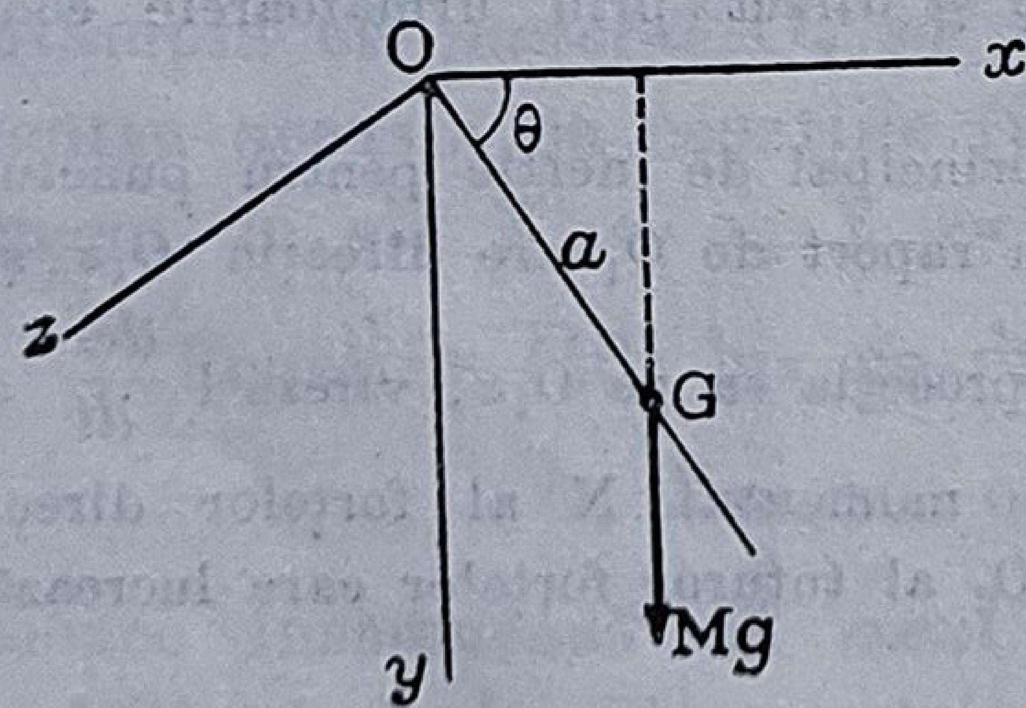


Fig. 178

Să luăm axul de rotaţie ca ax Oz, axul Oy fiind vertical şi îndreptat în jos, axul Ox orizontal şi perpendicular pe planul Oyz, iar origina O aleasă aşa fel ca planul Oxy să treacă prin centrul de greutate G.

Insemnând prin a distanţa OG şi prin θ unghiul GOx, ecuaţia mişcării este

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = Mg\, a \cos\theta$$

ceeace putem scrie

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \cos \theta}{l}$$

punând $\frac{I}{Ma} = l$.

Ecuaţia (1) ne este cunoscută dela studiul mişcării pendulului simplu. Ea arată că pendulul compus are aceiaşi mişcare ca şi pendulul simplu de lungime l egală cu $\frac{I}{Ma}$, dacă valorile iniţiale θ_0 şi ω_0 sunt aceleaşi pentru ambele pendule. Pendulul simplu de asemenea lungime este zis *sincronul* pendulului compus.

Durata T a micilor oscilaţii ale pendulului compus are deci ca valoare

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{I}{Mag}}.$$

Deducem

$$I = Mag \left(\frac{T}{\pi}\right)^2.$$

Această formulă ne dă mijlocul de a determina prin experienţă momentul de inerţie al unui solid în raport de un ax; va fi de ajuns să dispunem orizontal acel ax, să-l fixăm, şi, imprimând apoi solidului o mişcare oscilatorie destul de mică în jurul axului, să măsurăm durata unei oscilaţii.

Proprietăţi. Fie K raza de giraţie a pendulului în raport de dreapta paralelă axului de rotaţie dusă prin G. Avem $I_0 = MK^2$ şi prin urmare, potrivit formulei (1) dela teoria momentelor de inerţie,

$$I = M(K^2 + a^2).$$

In consecinţă

$$l = \frac{I}{Ma} = a + \frac{K^2}{a}.$$

Să luăm GO′ egal cu $\frac{K^2}{a}$ aşa ca să avem $OO' = l$. Axul

BB′ dus prin O′ pararel cu Oz se numeşte *axul de oscilaţie al pendulului.*

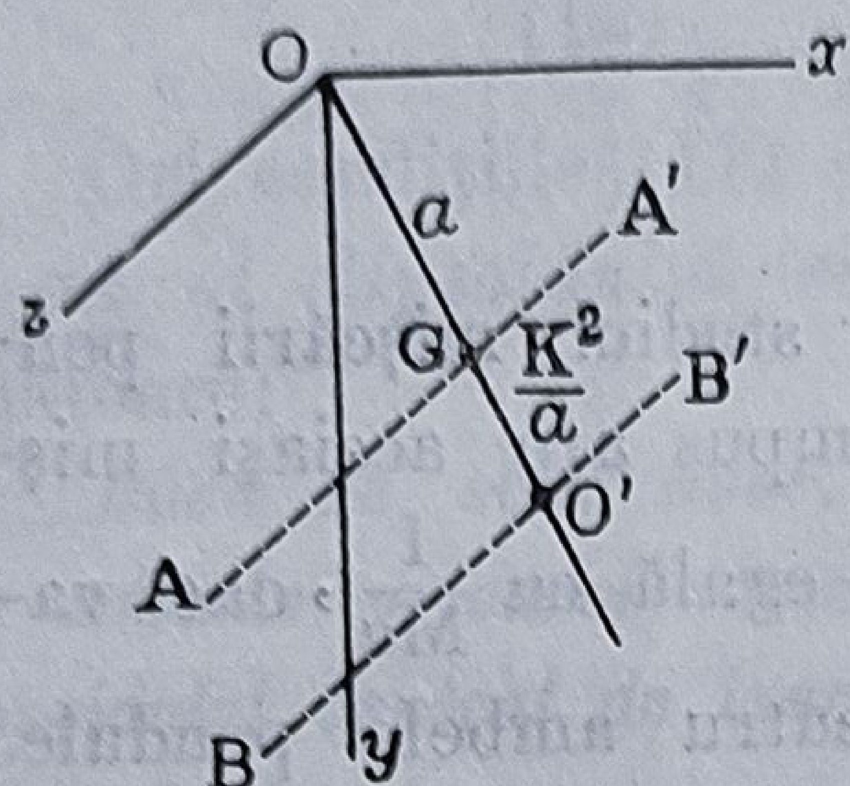


Fig. 179

Ori ce punct al solidului situat pe axul de oscilaţie se mişcă aşa ca şi cum ar fi izolat şi legat direct cu axul de rotaţie printr'un fir inextensibil fără massă.

Axele de rotaţie şi de oscilaţie sunt reciproce, înţelegând prin aceasta că dacă din axul de oscilaţie facem un ax de rotaţie, fostul ax de rotaţie devine în noua mişcare ax de oscilaţie. Fie în adevăr $O'G = a'$; să însemnăm prin l' noua lungime de pendul sincron. Avem

$$l' = a' + \frac{K^2}{a'} .$$

Insă $a' = \frac{K^2}{a}$; deci, substituind,

$$l' = \frac{K^2}{a} + a = l .$$

Să observăm însfârşit că

$$GO \cdot GO' = a \cdot \frac{K^2}{a} = K^2 .$$

TEORIA MAŞINEI LUI ATWOOD.

Maşina lui *Atwood,* care serveşte pentru a demonstra legile căderii corpurilor, se compune dintr'un scripete vertical în gâtul căruia se înfăşoară un fir purtând la extremităţile lui două masse inegale.

Ne propunem de a studia mişcarea acestor masse, neglijând massa firului ca şi frecarea scripetelui pe axul în jurul căruia se învârteşte. Vom mai presupune că firul antrenează scripetele fără vre-o alunecare pe gâtul lui.

Să raportăm mişcarea celor două masse la două axe drep-

unghiulare Ox, Oy, axul Ox fiind vertical şi îndreptat în sensul greutăţii. Fie:

m_1, m_2 cele două masse cu presupunerea $m_1 > m_2$,
x_1, x_2 distanţele lor la Oy,
T_1, T_2 tensiunile celor două porţiuni de fir,
ω viteza unghiulară de rotaţie a scripetelui,
R raza sa,
I momentul său de inerţie în raport de axul de rotaţie.

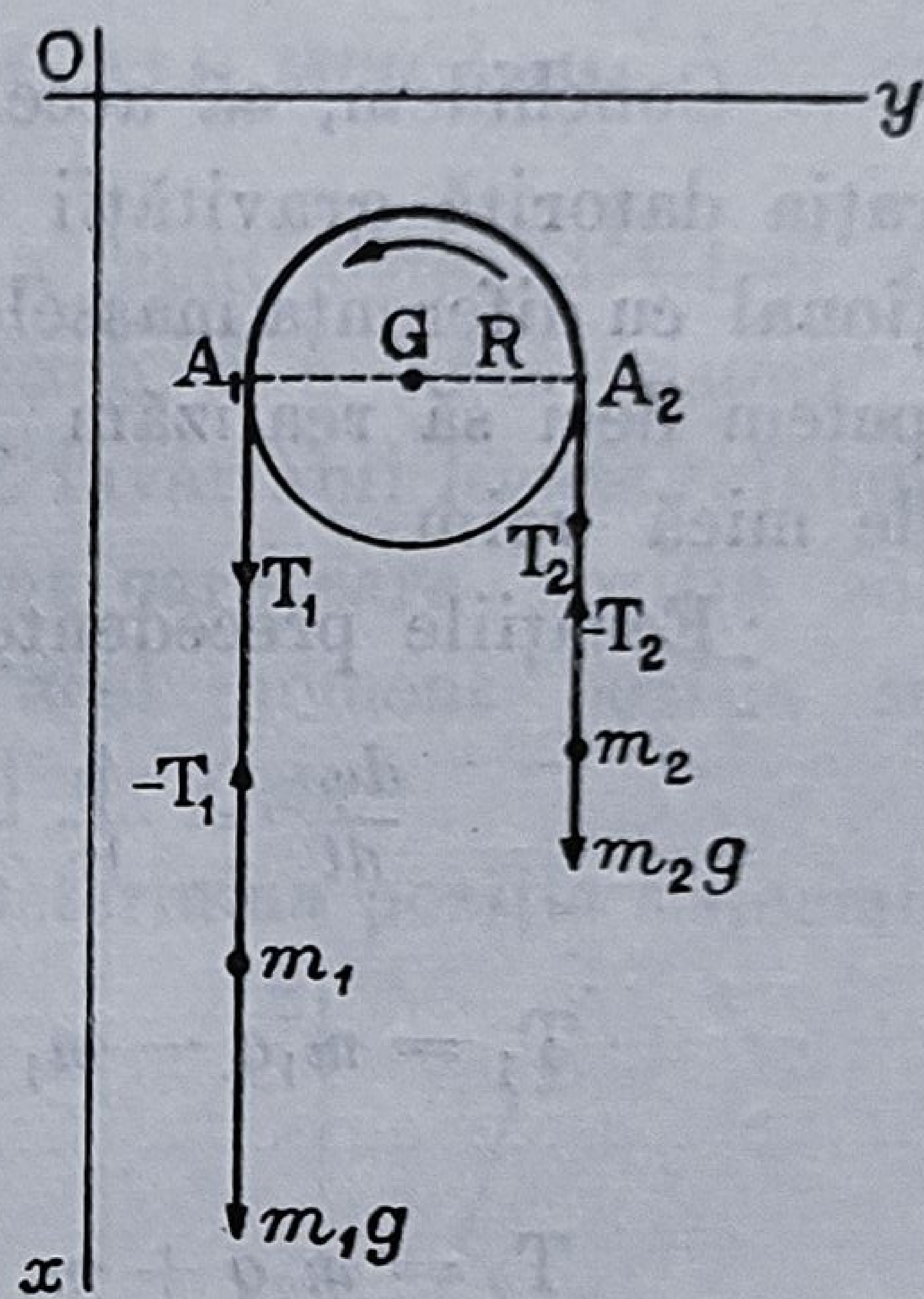


Fig. 180

Avem ecuaţiile

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1 g - T_1$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2 g - T_2$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = R(T_1 - T_2)$$

ultima ecuaţie fiind aceea a rotaţiei scripetelui sub efectul forţelor T_1 şi T_2 aplicate respectiv în A_1 şi A_2.

Mai avem însă relaţiile

$$x_1 + x_2 = \text{const.} \quad , \quad R\omega = \frac{dx_1}{dt}$$

cea dintâi exprimând că lungimea firului este constantă, iar cealaltă că firul antrenează scripetele fără alunecare. In total deci, cinci ecuaţii între cele cinci necunoscute x_1, x_2, T_1, T_2, ω.

Ecuaţia a patra dă

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

şi în consecinţă, scăzând ecuaţia a doua din cea dintâi,

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2x_1}{dt^2} = (m_1 - m_2)g - (T_1 - T_2).$$

Substituind diferenţei $T_1 - T_2$ valoarea care rezultă din ecuaţia a treia, adică

$$T_1 - T_2 = \frac{I}{R}\frac{d\omega}{dt}$$

şi ţinând socoteală de ecuaţia a cincia care dă

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d^2x_1}{dt^2}$$

găsim ca ecuaţie diferenţială a mişcării massei m_1, însemnând pentru prescurtare câtul $\frac{I}{R^2}$ prin a,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + a} g .$$

Conchidem, că acceleraţia massei m_1 este egală cu acceleraţia datorită gravităţii înmulţită cu un factor constant proporţional cu diferenţa masselor m_1, m_2. Micşorând această diferenţă, putem deci să realizăm pentru massa m_1 o acceleraţie ori cât de mică voim.

Ecuaţiile precedente ne dau de altfel:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + a} g$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_1 (2 m_2 + a)}{m_1 + m_2 + a} g$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_2 (2 m_1 + a)}{m_1 + m_2 + a} g .$$

Vedem că cele două tensiuni T_1, T_2 sunt inegale; ele nu devin egale decât dacă presupunem $a = o$, adică dacă neglijăm massa scripetelui. I fiind atunci nul, cele cinci ecuaţii dela început se reduc la acelea care corespund mişcării masselor m_1, m_2 în cazul când scripetele ar fi fix şi firul ar aluneca fără frecare pe gâtul lui (problemă analoagă cu problema I[a] din seria de exerciţii a Părţei a III[a]) adică

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1 g - T$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2 g - T$$

$$x_1 + x_2 = \text{const.}$$

In maşina lui Atwood, cantitatea a nu este însă neglijabilă.

IV. MIŞCAREA UNUI SOLID IN JURUL UNUI PUNCT FIX.

I. ECUAŢIILE DIFERENŢIALE ALE MIŞCĂRII.

Să luăm punctul fix ca origină a unui sistem de trei axe dreptunghiulare fixe Ox, Oy, Oz precum şi a unui sistem de trei axe dreptunghiulare OX, OY, OZ invariabil legate solidului.

Pentru a cunoaşte într'un moment oare care poziţia solidului, va fi suficient să cunoaştem în acel moment poziţia sistemului mobil OXYZ faţă de sistemul fix $Oxyz$.

1. **Variabilele lui Euler.** Putem determina poziţia sistemului mobil prin trei unghiuri ψ, θ, φ definite în modul următor:

ψ, unghiul pe care-l face Ox cu intersecţia OA a planului XOY cu plaul xOy;

θ, înclinarea planului XOY pe planul xOy, măsurată prin unghiul pe care-l face OZ cu Oz;

φ, unghiul axului OX cu dreapta OA.

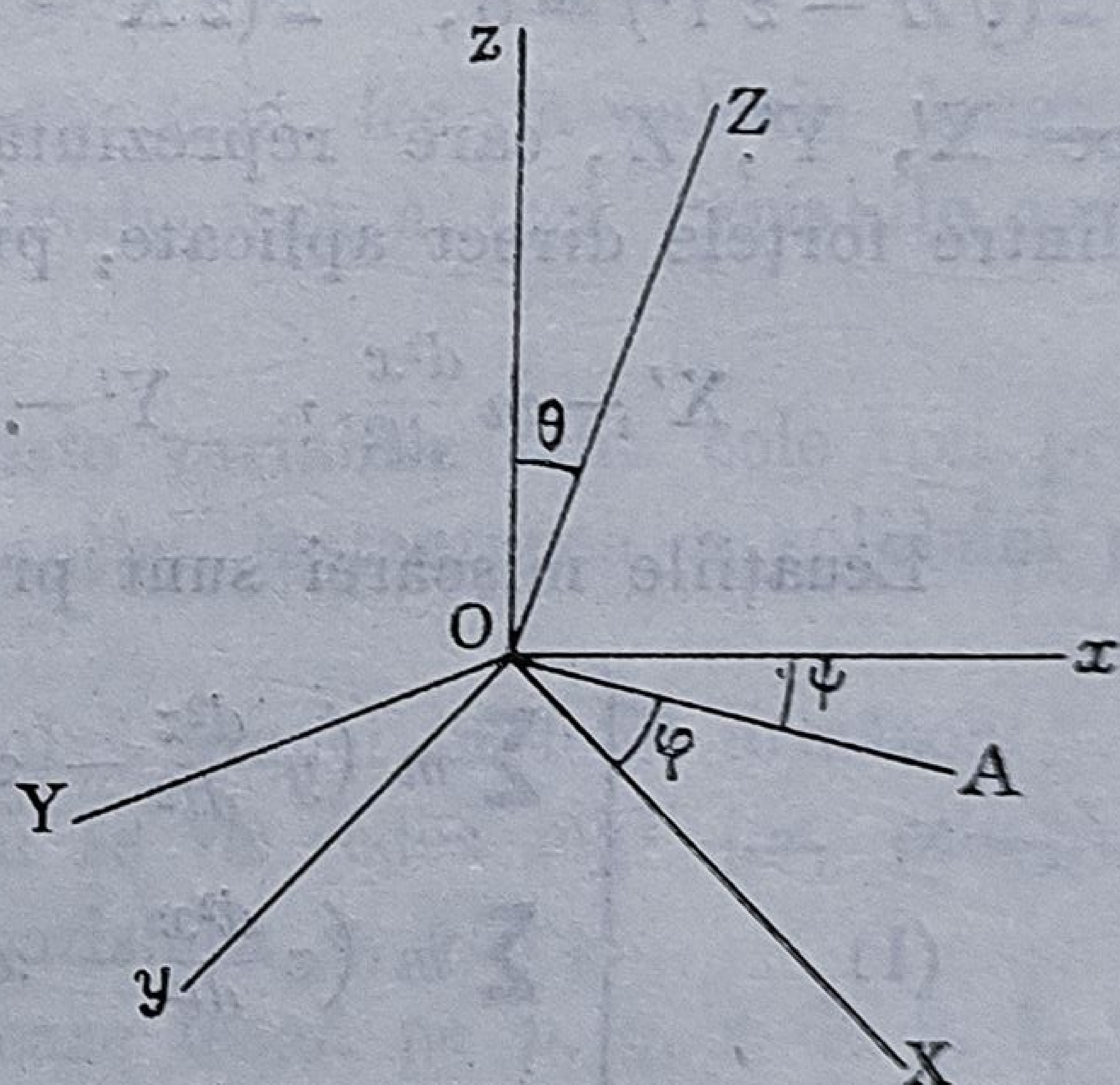


Fig. 181

Se vede, că putem trece dela sistemul de axe $Oxyz$ la sistemul OXYZ prin trei rotaţii ψ, θ, φ executate în jurul axelor Oz, OA, OZ.

Rotaţia ψ în jurul axului Oz învârteşte sistemul de axe XOY în jurul lui O, în planul lui xOy, până când OX vine să coincidă cu OA.

Rotaţia θ în jurul dreptei OA, considerată ca fixă, învârteşte planul XOY în jurul dreptei OA, devenită OX, de un-

ghiul θ, care are ca măsură unghiul coprins între Oz şi OZ, aceste axe fiind perpendiculare unul pe xOy iar celălalt pe XOY.

In sfârşit rotaţia φ în jurul axului OZ, considerat ca fix, învârteşte sistemul XOY în planul său, care conţine pe OA, până când axul OX face cu OA unghiul φ.

Unghiurile ψ, θ şi φ vor fi socotite ca pozitive cu începere dela OX, Oz şi OA, când rotaţiile în jurul celor trei axe Oz, OA şi OZ, care produc aceste unghiuri, vor avea sensul direct, adică dela stânga la dreapta; în cazul contrariu ele vor fi socotite ca negative.

Pentru a cunoaşte mişcarea solidului, va fi de ajuns să exprimăm pe ψ, θ, φ zise *variabilele lui Euler*, în funcţie de timp.

2. Ecuaţiile mişcării. Acestea se obţin după cum se ştie, înlocuind în condiţiile de echilibru[1])

$$\Sigma(yZ' - zY') = 0, \quad \Sigma(zX' - xZ') = 0, \quad \Sigma(xY' - yX') = 0$$

pe X', Y', Z', care reprezintă componentele uneia oarecare dintre forţele direct aplicate, prin

$$X' - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y' - m\frac{d^2y}{dt^2}, \; Z' - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ecuaţiile mişcărei sunt prin urmare

$$(1) \quad \begin{cases} \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = L' \\ \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = M' \\ \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = N' \end{cases}$$

în care L', M', N' reprezintă proecţiile pe axele fixe ale momentului rezultant al forţelor direct aplicate în raport cu origina O, adică

$$L' = \Sigma(yZ' - zY'), \; M' = \Sigma(zX' - xZ'), \; N' = \Sigma(xY' - yX').$$

---

[1]) Insemnăm componentele forţelor prin litere cu accent, rezervând noaţiunea X, Y, Z pentru cordonatele punctelor în raport de sistemul mobil.

Cordonatele x, y, z ale unui punct în raport de axele fixe, se exprimă în funcţie de cordonatele X, Y, Z ale aceluiaşi punct în raport de axele mobile, prin relaţiile cunoscute

$$x = a\,X + a'\,Y + a''\,Z$$

$$y = b\,X + b'\,Y + b''\,Z$$

$$z = c\,X + c'\,Y + c''\,Z$$

în care cele nouă cosinururi $a, b, c, \ldots$ sunt exprimabile în funcţie de cele 3 unghiuri ale lui Euler: ψ, θ, φ.

Inlocuind pe x, y, z, în ecuaţiile (1) prin valorile de mai sus, cele 9 cosinusuri fiind înlocuite prin valorile lor în funcţie de ψ, θ, φ, ajungem la expresiuni ne-depinzând decât de timp, de derivatele unghiurilor ψ, θ, φ şi de coeficienţii elipsoidului de inerţie al solidului raportat la axele mobile, coeficienţi ce trebuesc priviţi ca nişte constante cunoscute.

Obţinem astfel trei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea care integrate ne dau valorile în funcţie de timp a celor 3 variabile ψ, θ, φ şi prin aceasta, problema mişcării se găseşte complect rezolvată.

Acest fel de a proceda dă însă loc la calcule lungi şi penibile care se evită prin introducerea a trei variabile auxiliare.

3. **Variabile auxiliare.** Aceste variabile sunt cele trei proecţii p, q, r ale vectorului rotaţiei instantanee a solidului pe axele mobile OX, OY, OZ [1]).

Problema mişcării se rezolvă atunci în felul următor:

1°. Se stabilesc, după cum se va vedea mai jos, ecuaţiile diferenţiale la care trebue să satisfacă p, q, r;

2°. Se stabilesc relaţiile care leagă pe p, q, r de ψ, θ, φ.

Se obţine, procedând astfel, un sistem de 6 ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi care urmează a fi integrate, ţinându-se seama de condiţiile iniţiale.

---

[1]) Reamintim din *Cinematică*, pag. 149, că rotaţia elementară a unui solid în jurul unui punct fix, este o rotaţie elementară în jurul unui ax trecând prin punctul fix, numit *ax instantaneu de rotaţie*, pe care se poartă vectorul rotaţiei.

4. **Ecuaţiile lui Euler**. Pentru a obţine ecuaţiile la care trebue să satisfacă p, q, r sub forma simplă dată de ***Euler***, *vom lua ca axe* OX, OY, OZ *cele trei axe principale de inerţie ale solidului pentru punctul* O şi vom scrie, potrivit teoremelor generale ale Dinamicei, că viteza extremităţii vectorului, care reprezintă momentul rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de O, este egală în proecţie pe fiecare din axele OX, OY, OZ cu proecţia respectivă a momentului rezultant al forţelor aplicate solidului, în raport de O.

a). *Momentul rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de* O. (Momentul cinetic).

Proecţiile vitezei unui punct oarecare al solidului pe axele mobile OX, OY, OZ fiind [1])

(2) $$v_X = qZ - rY, \quad v_Y = rX - pZ, \quad v_Z = pY - qX$$

momentul cantităţii de mişcare a punctului are ca proecţii pe aceleaşi axe

$$m\,(Yv_Z - Zv_Y), \qquad m\,(Zv_X - Xv_Z), \qquad m\,(Xv_Y - Yv_X)$$

sau, înlocuind pe v_X, v_Y, v_Z prin valorile lor,

$$m\left[Y(pY - qX) - Z(rX - pZ)\right], \qquad m\left[Z(qZ - rY) - X(pY - qX)\right],$$

$$m\left[X(rX - pZ) - Y(qZ - rY)\right].$$

In consecinţă proecţiile momentului rezultant OK vor fi:

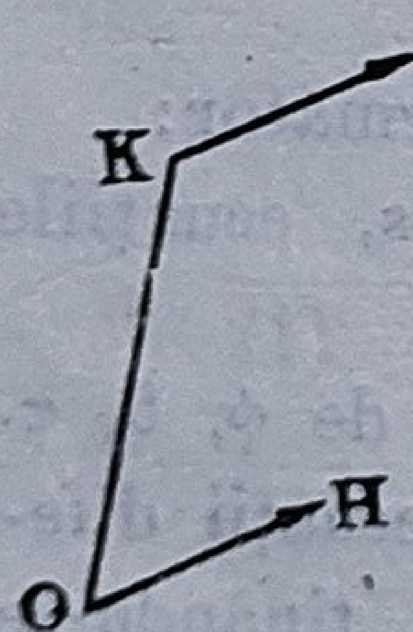


Fig. 182

$$OK_X = p\Sigma\, m\,(Y^2 + Z^2) - q\Sigma\, m\, XY - r\Sigma\, m\, XZ$$
$$OK_Y = q\Sigma\, m\,(Z^2 + X^2) - r\Sigma\, m\, YZ - p\Sigma\, m\, YX$$
$$OK_Z = r\Sigma\, m\,(X^2 + Y^2) - p\Sigma\, m\, ZX - q\Sigma\, m\, ZY$$

sau, utilizând coeficienţii elipsoidului de inerţie,

$$OK_X = Ap - Fq - Er$$
$$OK_Y = Bq - Dr - Fp$$
$$OK_Z = Cr - Ep - Dq.$$

Ori, prin ipoteză, axele OX, OY, OZ fiind chiar axele

[1]) *Cinematica*, pag. 155.

principale de inerţie pentru punctul O, coeficienţii D, E F, sunt nuli, aşa încât

$$OK_X = Ap\,, \qquad OK_Y = Bq\,, \qquad OK_Z = Cr$$

$$\overline{OK}^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2\,.$$

b). *Momentul rezultant al forţelor aplicate solidului, în raport de O.*

Forţele aplicate se compun din forţele date, adică forţele direct aplicate, şi acţiunea necunoscută a punctului O asupra solidului. Ori momentul acesteia din urmă în raport de O fiind nul, momentul rezultant al sistemului de forţe se reduce la acela al forţelor direct aplicate. Fie OH acest moment şi L, M, N proecţiile sale pe cele trei axe OX, OY, OZ.

c). *Pentru obţinerea ecuaţiilor lui Euler*, trebue să exprimăm că proecţiile *vitezei absolute* a punctului K pe axele OX, OY, OZ sunt egale cu proecţiile vectorului OH pe aceleaşi axe.

Ori, viteza absolută a punctului K este suma geometrică a vitezei pe care o are acest punct în mişcarea sa relativă faţă de sistemul mobil OXYZ şi a vitezei de antrenare.

Cordonatele punctului K faţă de sistemul mobil fiind

$$Ap\,, \qquad Bq\,, \qquad Cr$$

viteza sa relativă are ca proecţii pe aceste axe

$$A\frac{dp}{dt}\,, \qquad B\frac{dq}{dt}\,, \qquad C\frac{dr}{dt}\,.$$

Pe de altă parte, viteza de antrenare a punctului K are ca proecţii pe axele mobile, ca ori care punct al solidului,

$$qZ - rY\,, \qquad rX - pZ\,, \qquad pY - qX$$

în care va trebui să facem

$$X = Ap\,, \qquad Y = Bq\,, \qquad Z = Cr\,.$$

Deci, aceste proecţii sunt

$$(C - B)\,qr\,, \qquad (A - C)\,rp\,, \qquad (B - A)\,pq\,.$$

Exprimând acum că proecţiile vitezei absolute a punctului K, pe axele OX, OY, OZ, sunt egale cu proecţiile vectorului

OH pe aceleaşi axe, obţinem, potrivit celor de mai sus, cele trei ecuaţii

$$(3)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = N\,. \end{cases}$$

Acestea sunt *ecuaţiile lui Euler.*

5. Relaţiuni între componentele p, q, r şi unghiurile ψ, θ, φ. Pentru a obţine aceste relaţiuni, vom exprima că mişcarea elementară a solidului, adică rotaţia elementară în jurul axului instantaneu, este echivalentă celor trei rotaţii elementare de unghiuri $d\psi$, $d\theta$, $d\varphi$ executate în jurul axelor Oz, OA, OZ.

Ori, rotaţia în jurul axului instantaneu se poate descompune în trei rotaţii elementare în jurul axelor OX, OY, OZ caracterizate prin vectoarele de rotaţii p, q, r iar, pe de altă parte, vectoarele rotaţiilor elementare în jurul axelor Oz, OA, OZ sunt $\dfrac{d\psi}{dt}$, $\dfrac{d\theta}{dt}$, $\dfrac{d\varphi}{dt}$.

Pentru a exprima că cele două grupe de câte 3 vectoare de rotaţii sunt echivalente, vom scrie că proecţiile lor pe trei axe oare care sunt egale. Să efectuăm aceste proecţiuni pe cele 3 axe OA, OB, OZ, axul OB fiind dus perpendicular lui OA în planul XOY.

Vom observa pentru aceasta, că dreapta OA fiind perpendiculară pe fiecare din dreptele OB, Oz, OZ, aceste trei drepte sunt coprinse în acelaşi plan, aşa că unghiul BOz este egal cu $\dfrac{\pi}{2} - \theta$.

Efectuând cele trei proecţiuni găsim:

$$(4)\qquad \begin{cases} OA \ldots\ldots \dfrac{d\theta}{dt} = p\cos\varphi - q\sin\varphi \\[2ex] OB \ldots\ldots \dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta = p\sin\varphi + q\cos\varphi \\[2ex] OZ \ldots\ldots \dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{d\psi}{dt}\cos\theta = r\,. \end{cases}$$

Acestea sunt relaţiile căutate. Ele pot fi puse şi sub forma următoare:

$$p = \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi$$

$$q = -\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta .$$

In rezumat, componentele p, q, r şi unghiurile ψ, θ, φ satisfac celor 6 ecuaţii (3) şi (4) care constituesc împreună un sistem de ecuaţii diferenţiale simultanee de ordinul întâi.

Integralele generale conţin 6 constante arbitrare care se determină dându-se valorile iniţiale ale celor 6 necunoscute.

Fig. 183

Din punct de vedere mecanic, problema mişcării unui solid în jurul unui punct fix este deci rezolvată. Nu este însă tot astfel şi din punct de vedere analitic, căci nu se ştie a se integra sistemul de ecuaţii diferenţiale decât numai în unele cazuri particulare.

6. **Expresia forţei vii.** Avem

$$2\,T = \Sigma\, m v^2 = \Sigma\, m\,(v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2)$$

adică, potrivit egalităţilor (2)

$$2\,T = \Sigma\, m\,[(qZ - rY)^2 + (rX - pZ)^2 + (pY - qX)^2].$$

Desvoltând şi utilizând coeficienţii elipsoidului de inerţie găsim

$$(5) \qquad 2\,T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq .$$

Mai putem obţine acest rezultat altfel. Insemnând prin ω viteza unghiulară instantanee de rotaţie şi prin I momentul de inerţie *în raport de axul instantaneu*, avem, după cum se ştie,

$$(6) \qquad 2\,T = I\,\omega^2.$$

Insă, dacă însemnăm prin α, β, γ unghiurile directoare ale axului instantaneu, teoria momentelor de inerţie procură relaţia

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2\,D\cos\beta\cos\gamma - 2\,E\cos\gamma\cos\alpha - 2\,F\cos\alpha\cos\beta$$

şi, cum

$$\cos\alpha = \frac{p}{\omega}, \qquad \cos\beta = \frac{q}{\omega}, \qquad \cos\gamma = \frac{r}{\omega}$$

aplicaţia ecuaţiei (6) ne conduce la formula (5).

Dacă axele OX, OY, OZ sunt axele principale de inerţie, expresia forţei vii se reduce la

$$2\,T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

7. Consideraţiuni importante asupra momentului rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de punctul fix. Fie:

O I, axul instantaneu de rotaţie, dus în sensul vectorului rotaţiei, şi M punctul de cordonate X_1, Y_1, Z_1 unde acest ax străpunge elipsoidul de inerţie al solidului pentru punctul fix O;

P, planul tangent la elipsoid în punctul M, şi M N normala elipsoidului din acest punct;

OK, momentul rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de O.

Vom demostra că momentul OK este perpendicular pe planul P.

In adevăr, cosinusurile directoare ale momentului OK sunt respectiv proporţionale cu proecţiile Ap, Bq, Cr ale acestui moment pe axele OX, OY, OZ.

Pe de altă parte, ecuaţia elipsoidului de inerţie fiind

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

ecuaţia planului tangent din punctul M este

$$AXX_1 + BYY_1 + CZZ_1 = 1$$

şi cosinusurile directoare ale normalei M la elipsoid sunt deci proporţionale cu AX_1, BY_1, CZ_1.

Insă proecţiile X_1, Y_1, Z_1 ale vectorului OM fiind evident proporţionale cu proecţiile p, q, r ale vectorului rotaţiei ω, vedem că cosinusurile directoare ale normalei MN sunt proporţionale cu Ap, Bq, Cr adică cu cosinusurile directoare ale momentului OK. De aci, următoarea teoremă:

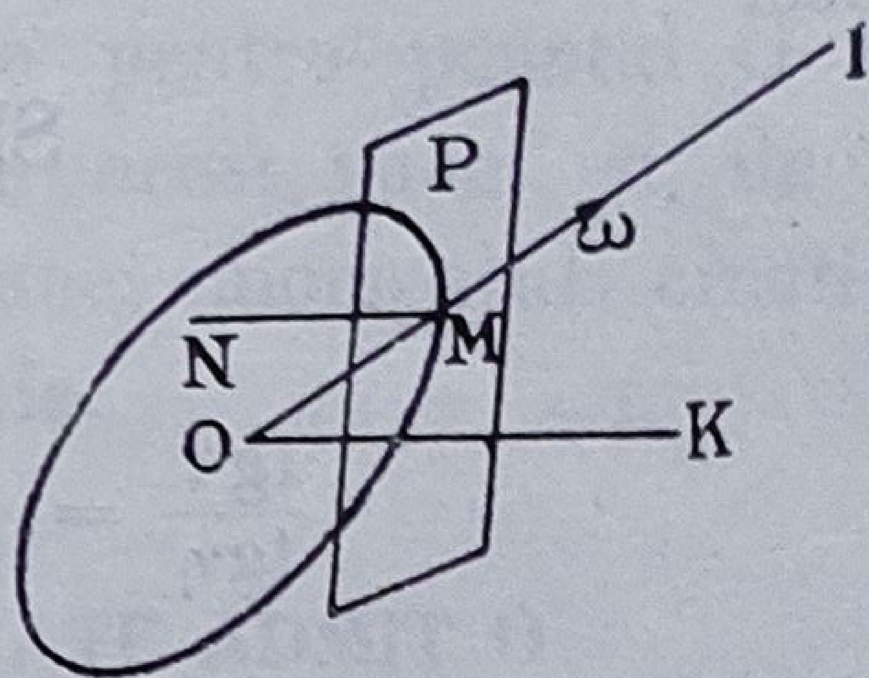


Fig. 184

Momentul rezultant al cantităţilor de mişcare OK, *este perpendicular pe planul tangent elipsoidului de inerţie dus prin punctul unde axul instantaneu de rotaţie străpunge elipsoidul.*

Cazul când elipsoidul de inerţie este de revoluţie. Fie OZ axul de revoluţie şi OI axul instantaneu de rotaţie. Luând ca plan al figurei planul ZOI, vom observa, că elipsoidul de inerţie fiind de revoluţie, planul tangent în M elipsoidului este perpendicular pe planul figurei. Rezultă că momentul OK al cantităţilor de mişcare este perpendicular pe tangenta MT, dusă curbei meridiane a elipsoidului de inerţie din planul ZOI, şi este prin urmare situat în acelaşi plan cu OZ şi OI.

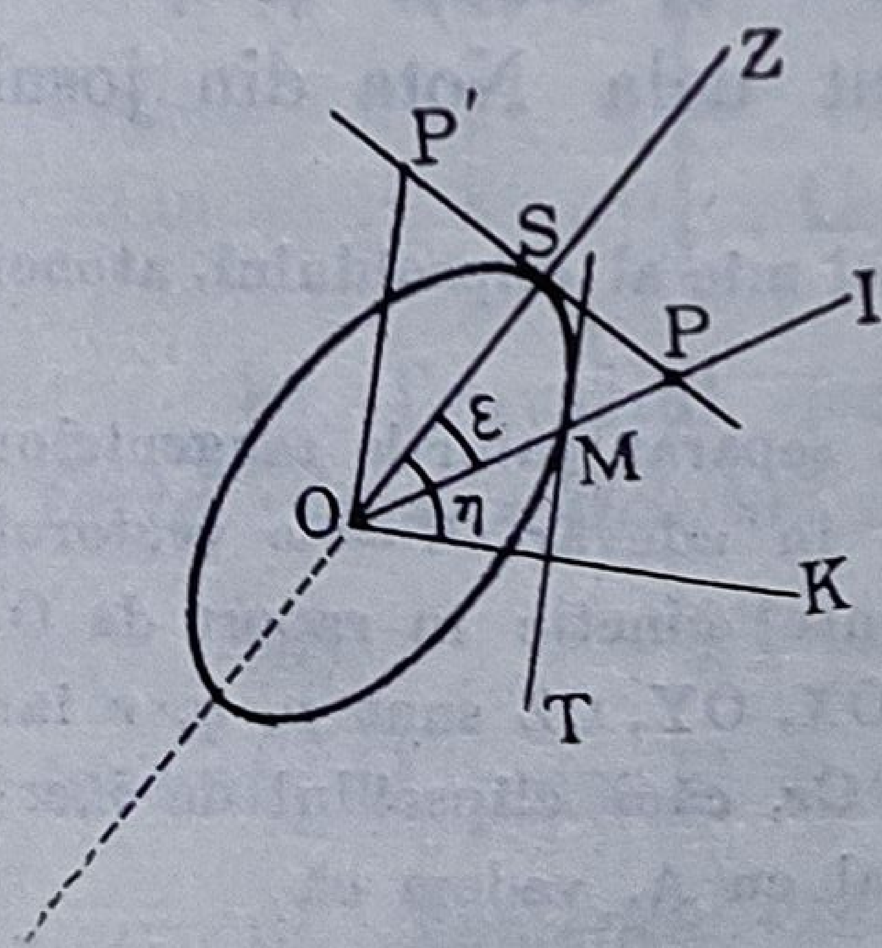


Fig. 185

Fie P punctul unde axul instantaneu întâlneşte perpendiculara SP ridicată din S pe axul OZ şi P' punctul de intersecţie al aceleiaşi perpendiculare cu paralela OP' dusă tangentei MT. Dreptele OP şi OP' fiind conjugate, se ştie din Geometrie că avem egalitatea

$$SP \,.\, SP' = a^2$$

însemnând prin a semi-axul cel mic al elipsei, cel mare fiind $OS = c$ [1].

Ori, pe figură,

$$SP = c \operatorname{tg} \varepsilon, \qquad SP' = c \operatorname{cotg} \eta$$

deci

$$SP \, . \, SP' = c^2 \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \eta} = a^2$$

şi prin urmare

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \eta} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{sau încă} \quad \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \eta} = \frac{C}{A} \ (^2)$$

de oare ce, după cum se ştie,

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \text{şi} \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}} \, .$$

Aşa dar, *în cazul când elipsoidul de inerţie este de revoluţie, momentul rezultant al cantităţilor de mişcare rămâne necontenit coprins în planul format de axul de revoluţie al elipsoidului şi axul instantaneu de rotaţie, iar unghiul* η *rămâne de aceiaşi ordine de mărime ca* ε.

In particular, dacă axul instantaneu de rotaţie OI rămâne pe timpul mişcării foarte vecin de axul de revoluţie OZ, momentul OK va rămâne şi el tot foarte vecin de acest ax şi coprins în planul ZOI; dacă însfârşit $\varepsilon = o$, atunci şi $\eta = o$. Acest din urmă rezultat ne este cunoscut dela Nota din josul

---

[1] Dacă axul de revoluţie OZ ar fi axul cel mic al elipsoidului, atunci acesta ar fi $OS = c$, celălalt fiind a.

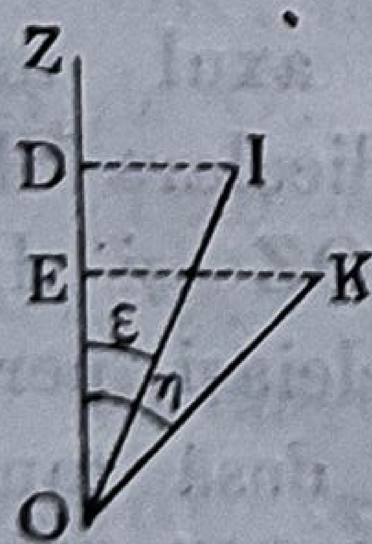


Fig. 186

[2] Putem dealtfel calcula separat valorile tangentelor celor două unghiuri ε şi η. Fie în adevăr $OI = \omega$ vectorul rotaţiei instantanee şi OK momentul cinetic în raport de O. Cum proecţiile lui OI pe axele OX, OY, OZ sunt p, q, r iar acelea ale lui OK sunt Ap, Aq, Cr, căci elipsoidul de inerţie fiind de revoluţie, B este egal cu A, vedem că

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{ID}{OD} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}, \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{KE}{OE} = \frac{A\sqrt{p^2 + q^2}}{Cr} \, .$$

Când $p^2 + q^2 = o$, avem în acelaşi timp $\varepsilon = o$ şi $\eta = o$, OI şi OK coincizând atunci cu OZ.

paginei 326, unde s'a arătat, că pentru ca momentul cinetic în raport de un punct O al axului de rotaţie să fie identic cu momentul cinetic în raport de acest ax, trebue ca axul de rotaţie să fie principal de inerţie pentru punctul O. Cu alte cuvinte, dacă OZ este principal de inerţie pentru punctul O şi deci ax al elipsoidului de inerţie pentru acest punct, şi, dacă rotaţia se execută în jurul acestui ax, atunci momentul cinetic în raport de O coincide cu axul de rotaţie.

II. CAZUL CÂND FORŢELE APLICATE ADMIT O REZULTANTĂ CARE TRECE PRIN PUNCTUL FIX.

Acesta este, spre exemplu, cazul unui solid supus numai acţiunei greutăţii şi mobil în jurul centrului său de greutate, considerat ca fix [1]).

Rezultanta forţelor aplicate putând fi socotită ca lucrând în punctul fix:

a). Componentele L, M, N sunt nule şi ecuaţiile lui Euler devin:

$$(1) \quad \begin{cases} A \dfrac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = o \\ B \dfrac{dq}{dt} + (A - C)\, rp = o \\ C \dfrac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = o\,. \end{cases}$$

b). Travaliul forţelor aplicate este nul şi prin urmare *forţa vie a solidului este constantă*, adică avem

$$(2) \qquad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H$$

însemnând prin H o constantă.

c). *Momentul rezultant al cantităţilor de mişcare, în raport de punctul fix, este un vector constant şi ca mărime şi ca poziţie*, căci viteza extremităţii acestui vector, fiind egală cu mo-

[1]) De asemenea cazul unui solid având un punct fix şi neacţionat de nici o forţă.

mentul rezultant al forţelor aplicate, este nulă. Avem deci, însemnând prin K o costantă,

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2. \tag{3}$$

1. **Integraţiune** *(Jacobi)*. 1). Pentru determinarea mişcării solidului, trebue să integrăm sistemul de ecuaţii (1) adică să găsim expresiile variabilelor p, q, r în funcţie de timp.

Ori, dacă înmulţim cele trei ecuaţii, la rând, cu p, q, r şi le adunăm, obţinem

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0$$

deci, integrând,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H$$

care nu este altceva decât ecuaţia (2) de mai sus.

Inmulţind respectiv aceleaşi ecuaţii cu Ap, Bq, Cr şi adunând, găsim

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0$$

şi integrând

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2$$

care este ecuaţia (3).

H şi K sunt două constante ale căror valori sunt determinate în funcţie de componentele p_0, q_0, r_0 ale vitezei iniţiale de rotaţie prin egalităţile

$$Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 = H \tag{2 bis}$$

$$A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2 = K^2. \tag{3 bis}$$

2). Să deducem mai întâi din ecuaţiile (2) bis şi (3) bis câteva consecinţe de care ne vom servi. Avem

$$K^2 - AH = B(B-A)q_0^2 + C(C-A)r_0^2$$

$$K^2 - BH = C(C-B)r_0^2 + A(A-B)p_0^2$$

$$K^2 - CH = A(A-C)p_0^2 + B(B-C)q_0^2.$$

Dacă presupunem

$$A < B < C$$

relaţiile precedente arată că avem

$$K^2 - AH > o \quad \text{şi} \quad K^2 - CH < o.$$

In ceea ce priveşte diferenţa $K^2 - BH$, aceasta se compune dintr'un termen pozitiv şi un termen negativ aşa că semnul ei nu se poate cunoaşte mai de dinainte; valoarea acestei diferenţe va putea deci să fie pozitivă, nulă sau negativă, potrivit condiţiilor iniţiale ale mişcărei.

3). Să trecem acum la *metoda de integraţiune*. Ea constă în eliminarea a două din variabilele p, q, r între ecuaţiile (2) şi (3) şi una din ecuaţiile (1). Se obţine astfel o ecuaţie diferenţială care determină pe variabila a treia. Noi vom elimina pe p şi r pentru ca să putem calcula mai întâi pe q, componentă a vectorului rotaţiei instantanee pe direcţia axului mijlociu al elipsoidului de inerţie.

Rezolvind ecuaţiile (2) şi (3) în raport pe p^2 şi r^2, găsim

$$p^2 = \frac{(CH - K^2) - B(C - B)q^2}{A(C - A)} \tag{4}$$

$$r^2 = \frac{(K^2 - AH) - B(B - A)q^2}{C(C - A)} \tag{5}$$

şi substituind aceste valori în a doua dintre ecuaţiile (1) pusă sub forma

$$dt = \frac{B}{(C - A)pr}\, dq$$

obţinem

$$dt = \pm \frac{B\sqrt{AC}\, dq}{\sqrt{[CH - K^2] - B[C - B]q^2}\ \sqrt{[K^2 - AH] - B[B - A]q^2}}$$

iar, cum dt este pozitiv, se va lua pentru membrul al doilea semnul $+$ sau $-$ după cum dq va fi pozitiv sau negativ.

Ecuaţia precedentă se poate scrie

$$dt = \pm \frac{B\sqrt{AC}}{\sqrt{[CH - K^2][K^2 - AH]}} \cdot \frac{dq}{\sqrt{\left[1 - \frac{B(C - B)}{CH - K^2}q^2\right]\left[1 - \frac{B(B - A)}{K^2 - AH}q^2\right]}}. \tag{6}$$

Să facem acum schimbarea de variabilă

$$(7) \qquad q = u\sqrt{\frac{CH - K^2}{B(C - B)}}.$$

Substituind în ecuaţia (6) şi punând pentru prescurtare

$$(8) \qquad m = \sqrt{\frac{(B - A)(CH - K^2)}{(C - B)(K^2 - AH)}}$$

$$(9) \qquad n = \pm\sqrt{\frac{(C - B)(K^2 - AH)}{ABC}}$$

se obţine

$$n\,dt = \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - m^2u^2)}}.$$

Integraţiunea acestei ecuaţii diferenţiale, care depinde de funcţiuni eliptice [1]) ne dă pe u în funcţie de t şi de o constantă arbitrară α.

Inlocuind în formulele (4) şi (5) pe q^2 în funcţie de u^2 potrivit ecuaţiei (7), avem

$$p^2 = \frac{CH - K^2}{A(C - A)}(1 - u^2)$$

$$r^2 = \frac{K^2 - AH}{C(C - A)}(1 - m^2u^2).$$

Ajungem astfel la următorul sistem, care din punct de vedere analitic dă soluţia complectă a problemei:

$$(10) \qquad \begin{cases} p = \sqrt{\dfrac{CH - K^2}{A(C - A)}} \cdot \sqrt{1 - u^2} \\ q = \sqrt{\dfrac{CH - K^2}{B(C - B)}} \cdot u \\ r = \sqrt{\dfrac{K^2 - AH}{C(C - A)}} \cdot \sqrt{1 - m^2u^2}. \end{cases}$$

Constantele arbitrare în număr de trei sunt H, K şi α.

(4). Cum, prin ipoteză, $A < B < C$, radicalii din formulele (8), (9) şi (10) sunt toţi reali.

[1]) Integrala membrului al doilea este o integrală eliptică de prima speţă.

Pe de altă parte, pentru ca valoarea lui m să fie mai mică decât unitatea, aşa după cum se presupune în teoria funcţiilor eliptice, trebue să avem

$$(C-B)(K^2-AH) > (B-A)(CH-K^2)$$

adică

$$(C-A)(K^2-BH) > o$$

inegalitate, care din cauză că diferenţa $C-A$ este pozitivă, se reduce la

$$K^2-BH > o\,.$$

In cazul contrariu, adică dacă avem $K^2-BH < o$, atunci în loc de schimbarea de variabilă (7) vom lua

$$q = u\sqrt{\frac{K^2-AH}{B(B-A)}}$$

şi valoarea respectivă a lui m fiind

$$m = \sqrt{\frac{(C-B)(K^2-AH)}{(B-A)(CH-K^2)}}$$

este mai mică decât unitatea. Pentru n vom lua în acest caz

$$n = \pm\sqrt{\frac{(B-A)(CH-K^2)}{ABC}}\,.$$

Sistemul (10) ia forma

$$p = \sqrt{\frac{CH-K^2}{A(C-A)}}\cdot\sqrt{1-m^2u^2}\,,\qquad q = \sqrt{\frac{K^2-AH}{B(B-A)}}\cdot u$$

$$r = \sqrt{\frac{K^2-AH}{C(C-A)}}\cdot\sqrt{1-u^2}\,.$$

Ne rămâne de examinat cazul când $K^2-BH = o$. In acest caz, făcând pe K^2 egal cu BH, vedem că valoarea lui m se reduce la unitate iar ecuaţia (6) devine

$$dt = \pm\frac{B\sqrt{AC}}{H\sqrt{(C-B)(B-A)}}\cdot\frac{dq}{1-\frac{B}{H}q^2}\,.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $q = u\sqrt{\frac{H}{B}}$ obţinem

24468.—23

$$dt = \pm \sqrt{\frac{\mathrm{A\,B\,C}}{(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,\mathrm{H}}} \cdot \frac{du}{1-u^2}$$

sau, mai simplu,

$$(11) \qquad n\,dt = \frac{du}{1-u^2}$$

punând

$$n = \pm \sqrt{\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,\mathrm{H}}{\mathrm{A\,B\,C}}}.$$

Integrațiunea ecuației (11) ne dă

$$nt + \varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+u}{1-u}$$

de unde

$$\frac{1+u}{1-u} = e^{2\,(nt+\varepsilon)}$$

și prin urmare

$$u = \frac{e^{nt+\varepsilon} - e^{-nt-\varepsilon}}{e^{nt+\varepsilon} + e^{-nt-\varepsilon}}.$$

Avem deci

$$q = \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{B}}} \cdot \frac{e^{nt+\varepsilon} - e^{-nt-\varepsilon}}{e^{nt+\varepsilon} + e^{-nt-\varepsilon}}$$

și, potrivit ecuațiilor (4) și (5) în care înlocuim pe K^2 prin BH,

$$p = \sqrt{\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,\mathrm{H}}{\mathrm{A}\,(\mathrm{C}-\mathrm{A})}} \cdot \frac{2}{e^{nt+\varepsilon} + e^{-nt-\varepsilon}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,\mathrm{H}}{\mathrm{C}\,(\mathrm{C}-\mathrm{A})}} \cdot \frac{2}{e^{nt+\varepsilon} + e^{-nt-\varepsilon}}.$$

Se vede, că dacă timpul crește indefinit, p și r tind către zero, pe când q tinde către $\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{B}}}$. Ori, q corespunde axului mijlociu de inerție, deoarece s'a presupus $\mathrm{A} < \mathrm{B} < \mathrm{C}$. Așa dar:

Când $K^2 - BH$ *este nul, adică în cazul când componentele vitezei unghiulare inițiale pe axul cel mare și pe axul cel mic al elipsoidului de inerție satisfac condiției*

$$A(B-A)p_0^2 = C(C-B)r_0^2$$

axul instantaneu de rotație tinde, când timpul crește indefinit, către axul mijlociu de inerție.

5). *In rezumat*, când L, M, N sunt nuli, ori care ar fi diferența $K^2 - BH$, putem determina pe p, q, r în funcție de timp.

Trebue să calculăm acum pe ψ, θ, φ.

2. **Calculul unghiurilor** ψ, θ, φ. *Să luăm ca ax fix* Oz, *vectorul momentului rezultant al cantităților de mișcare în raport de* O, care știm că rămâne invariabil și ca poziție și ca lungime pe tot timpul mișcării. Fie OK acest vector și să însemnăm ca și mai sus prin litera K lungimea sa.

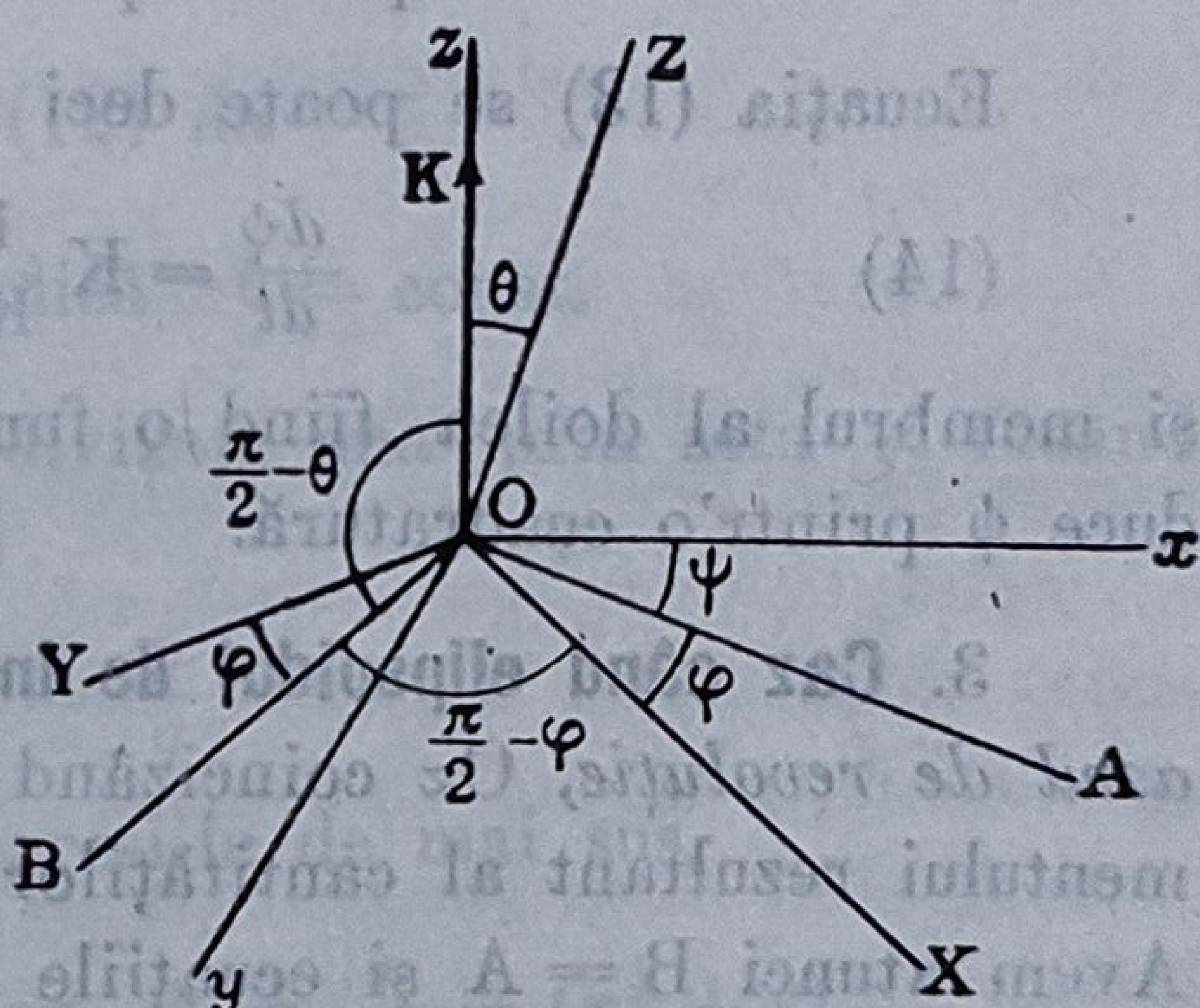


Fig. 187

Proecțiile lui OK pe axele mobile OX, OY, OZ se știe că sunt egale cu Ap, Bq, Cr. Ajutându-ne de figură, să calculăm direct aceste proecții și să egalăm apoi rezultatele dobândite cu Ap, Bq, Cr.

Pe OZ și OB proecțiile lui OK sunt $K\cos\theta$ și $K\sin\theta$. Din proecția pe OB deducem proecțiile pe OX și pe OY care, potrivit figurei, se vede că sunt egale cu $K\sin\theta\sin\varphi$ și $K\sin\theta\cos\varphi$. Avem deci egalitățile

$$(12) \qquad \begin{cases} K\sin\theta\sin\varphi = Ap \\ K\sin\theta\cos\varphi = Bq \\ K\cos\theta = Cr\,. \end{cases}$$

Aceste egalităţi permit de a calcula pe θ şi φ în funcţie de timp, de oare-ce p, q, r sunt cunoscuţi.

Pentru a avea pe ψ, să reluăm formula generală

$$\sin\theta \frac{d\psi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi$$

şi să înlocuim în ea pe $\sin\varphi$ şi $\cos\varphi$ prin valorile deduse din egalităţile precedente. Obţinem

$$\text{(13)} \qquad K\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = Ap^2 + Bq^2 .$$

Insă, pe de o parte, ultima din egalităţile (12) ne dă

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{C^2r^2}{K^2}$$

iar pe de altă parte, din integrala (12) deducem

$$Ap^2 + Bq^2 = H - Cr^2 .$$

Ecuaţia (13) se poate deci scrie

$$\text{(14)} \qquad \frac{d\psi}{dt} = K\frac{H - Cr^2}{K^2 - C^2r^2}$$

şi membrul al doilea fiind o funcţie cunoscută de t, se va deduce ψ printr'o cuadratură.

3. **Caz când elipsoidul de inerţie este de revoluţie.** *Fie* OZ *axul de revoluţie,* Oz coincizând ca şi mai sus cu vectorul momentului rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de O. Avem atunci $B = A$ şi ecuaţiile lui Euler devin

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,rq &= 0 \\ A\frac{dq}{dt} - (C - A)\,rp &= 0 \\ \frac{dr}{dt} &= 0 . \end{aligned}\right.$$

Ultima ecuaţie ne dă $r = \text{const.}$ Celelalte două formează un sistem de ecuaţii lineare cu coeficienţi constanţi. Dacă punând

$$n = \frac{C - A}{A}\, r$$

derivăm pe cea dintâi şi înlocuim în derivată pe $\frac{dq}{dt}$ prin valoarea dedusă din ecuaţia a doua, găsim

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -n^2 p$$

ecuaţie, a cărei integrală generală ştim că este

$$p = \beta \cos (nt + \varepsilon)$$

β şi ε fiind constante arbitrare. Pe de altă parte, cum

$$\frac{dq}{dt} = np = n\beta \cos (nt + \varepsilon)$$

deducem

$$q = \beta \sin (nt + \varepsilon)^{1)}.$$

Rămâne să determinăm unghiurile lui Euler prin formulele dela paragraful precedent.

Ultima dintre egalităţile (12) dă

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} \quad \text{adică} \quad \theta = \text{const.}$$

Celelalte două egalităţi, divizate una prin alta şi făcând în ele pe B egal cu A, ne dau

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{q}$$

şi, înlocuind pe p şi q prin expresiile de mai sus,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}(nt + \varepsilon) \quad \text{sau} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - (nt + \varepsilon).$$

Insfârşit formula (14) se transformă în felul următor: Din integralele (2) şi (3), adică

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H \quad \text{şi} \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2$$

deducem, făcând pe B egal cu A,

$$H - Cr^2 = A(p^2 + q^2) \quad \text{şi} \quad K^2 - C^2r^2 = A^2(p^2 + q^2).$$

---

[1]) Avem deci $p^2+q^2=\beta^2=$const. şi prin urmare $\omega^2=p^2+q^2+r^2=$const. Viteza unghiulară a rotaţiei instantanee este astfel şi ea constantă pe tot timpul mişcării. Vectorul ω al acestei rotaţii este coprins, după cum se ştie în planul zOZ.

Introducând aceste valori în formula (14) obţinem

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{K}{A} \quad \text{de unde} \quad \psi = \frac{K}{A}\, t + \psi_0 .$$

In rezumat, însemnând prin ψ_0, θ_0, φ_0 valorile iniţiale ale unghiurilor ψ, θ, φ şi observând că $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, avem

$$\psi = \frac{K}{A}\, t + \psi_0 , \qquad \theta = \theta_0 , \qquad \varphi = \frac{(A - C)\, r}{A}\, t + \varphi_0 .$$

Aceste formule stabilesc, că *axul de revoluţie al elipsoidului de inerţie descrie cu o mişcare uniformă un con de revoluţie în jurul vectorului fix al momentului rezultant al cantităţilor de mişcare*[1]*, în timp ce solidul se învârteşte cu o mişcare uniformă în jurul axului de revoluţie.*

METODĂ GEOMETRICĂ.

Poinsot a dat o formă geometrică teoriei rotaţiei unui solid în jurul unui punct fix în cazul particular de care ne am ocupat până acum, adică acela când forţele direct aplicate admit o rezultantă care trece necontenit prin punctul fix, sau când nu există forţe direct aplicate, rotaţia având loc numai în virtutea unor condiţii iniţiale de mişcare a solidului.

Studiul făcut de Poinsot nu se bazează pe stabilirea prealabilă a ecuaţiilor lui Euler; toate proprietăţile mişcărei se deduc numai din aplicaţia ecuaţiilor generale ale Dinamicei, printr'o serie de consideraţiuni pur geometrice.

Ştim în adevăr că aplicaţia ecuaţiilor generale ale Dinamicei la cazul considerat, conduce pe de o parte la concluzia că *forţa vie a solidului este constantă pe tot timpul mişcării*, ceea ce corespunde ecuaţiei

$$(1) \qquad I\omega^2 = H \quad \text{sau} \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H$$

[1]) Dreapta OA fiind perpendiculară pe planul zOZ, viteza unghiulară a rotaţiei acestui plan în jurul axului Oz este egală cu viteza unghiulară a rotaţiei dreptei OA în jurul aceluiaşi ax Oz, adică egală cu $\frac{d\psi}{dt}$.

iar pe de altă parte la concluzia că *momentul rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de punctul fix păstrează necontenit în spaţiu aceiaşi mărime şi aceiaşi direcţie*, ceea ce se exprimă prin ecuaţia

$$(2) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2 .$$

Aceasta stabilit, fie într'un moment oarecare:

OX, OY, OZ axele principale de inerţie ale solidului pentru punctul fix O;

M punctul numit *pol* de către Poinsot, unde axul instantaneu de rotaţie, dus în sensul vectorului rotaţiei, întâlneşte elipsoidul de inerţie;

I momentul de inerţie al solidului în raport de axul instantaneu;

ρ lungimea razei vectoare OM.

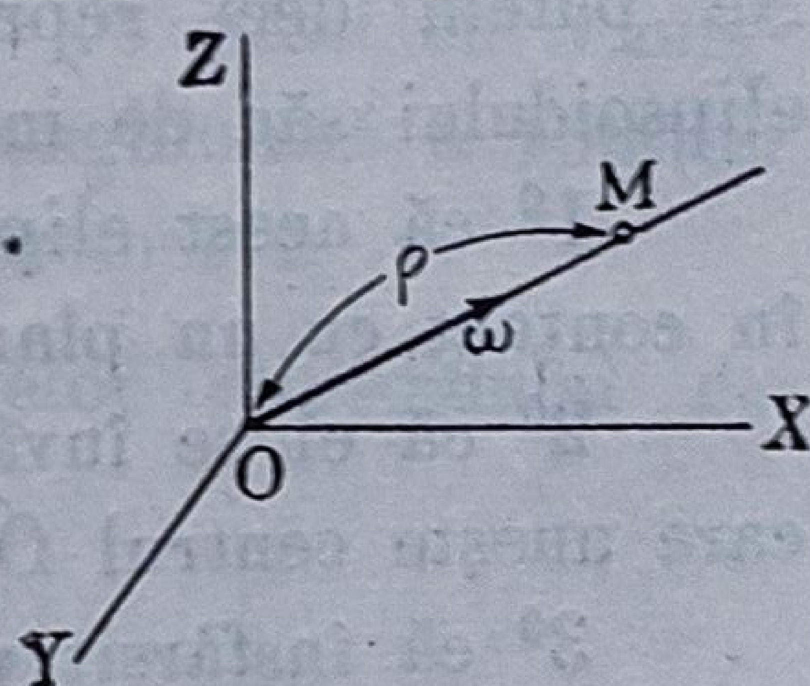


Fig. 188

Avem, prin definiţia însăşi a elipsoidului de inerţie $\rho = \frac{1}{\sqrt{I}}$ deci $I = \frac{1}{\rho^2}$.

Introducând această valoare în integrala (1) a forţelor vii, obţinem $\frac{\omega^2}{\rho^2} = H$ de unde

$$(3) \qquad \frac{\omega}{\rho} = \sqrt{H} .$$

Conchidem: **Teorema I.** ***Viteza unghiulară a rotaţiei instantanee este proporţională cu distanţa punctului fix la pol.***

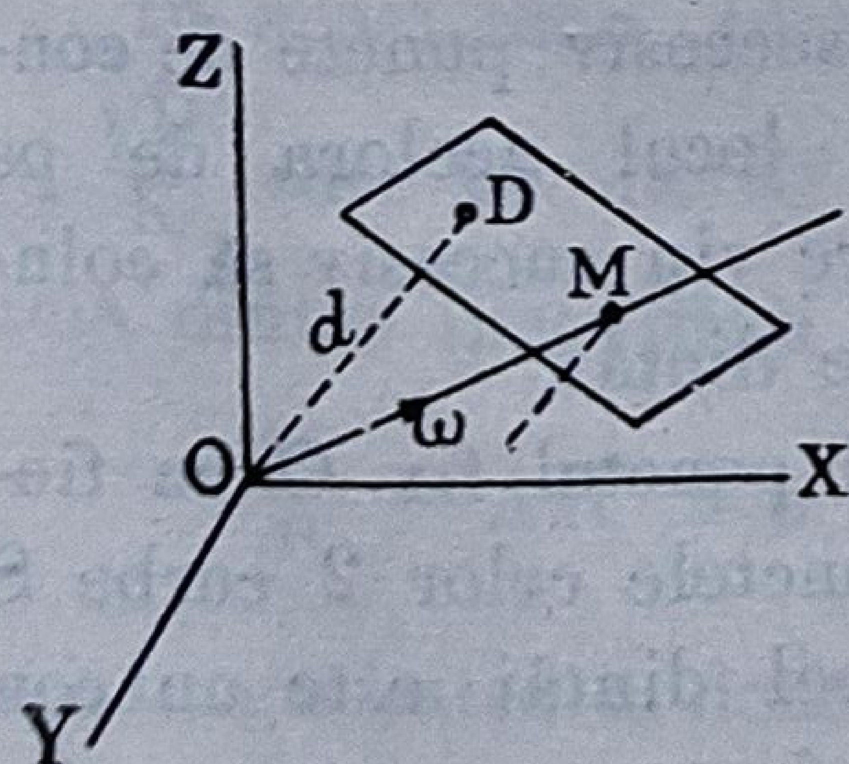


Fig. 189

Să considerăm, pe de altă parte, planul tangent elipsoidului de inerţie în punctul M. După cum am demonstrat la pag. 347, normala în M dusă acestui plan este paralelă cu momentul rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de punctul fix, care ştim că este un vector de direcţie invariabilă.

Deci: **Teorema II.** ***Planul tangent în pol elipsoidului de inerţie are totdeauna aceiaşi direcţie.***

Să calculăm însfârşit distanţa d dela origină la planul tangent. Avem

$$d = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}$$

sau, ţinând socoteală de relaţia (2)

$$d = \frac{\sqrt{H}}{K} \quad \text{adică } d = \text{const.}$$

Aşa dar: **Teorema III.** ***Planul tangent în pol elipsoidului de inerţie, rămâne totdeauna la aceiaşi distanţă de punctul fix.***

Prima reprezentare geometrică a mişcării. Din teoremele II şi III rezultă că planul tangent considerat este complect fix. Ne putem deci reprezenta mişcarea solidului, invariabil legat elipsoidului său de inerţie pentru punctul fix, imaginând:

1° că acest elipsoid, al căruia centru O este fix, rămâne în contact cu un plan fix P;

2° că el se învârteşte în fiecare moment în jurul dreptei care uneşte centrul O cu punctul de contact M;

3° că însfârşit vectorul ω al rotaţiei este proporţional cu lungimea OM.

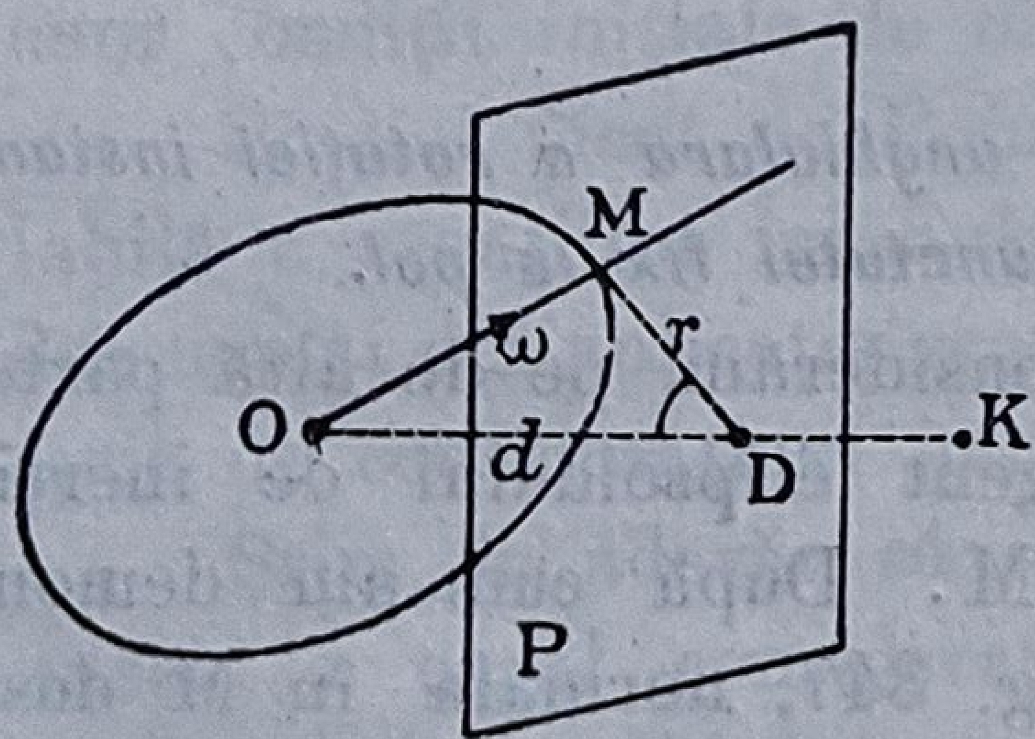


Fig. 190

A doua reprezentare geometrică a mişcării. Fie S locul geometric al punctelor din planul P care devin succesiv puncte de contact şi S′ locul acelora de pe elipsoid care vin succesiv să coincidă cu cele dintâi.

Unind punctul fix O cu fiecare din punctele celor 2 curbe S şi S′, obţinem două conuri, dintre care cel dintâi este un con fix şi reprezintă locul poziţiilor axului instantaneu în spaţiu. Celălalt con este mobil odată cu solidul şi reprezintă locul dreptelor invariabil legate solidului care devin succesiv axe instantanee de rotaţie.

După cum ştim din Cinematică (pag. 149) *mişcarea solidului poate să fie produsă prin rostogolirea conului mobil pe conul fix.*

Curbele S′ şi S poartă respectiv numele de *polodia* şi *herpolodia lui* ***Poinsot.***

In cazul particular când elipsoidul de inerţie este de revoluţie, raza vectoare ρ este constantă de oare-ce punctele elipsoidului care devin succesiv puncte de contact cu planul P sunt toate situate pe acelaşi paralel al acestui elipsoid aşa că herpolodia se reduce la un cerc. Cum pe figura de mai sus avem

$$r^2 = \rho^2 - d^2$$

rezultă că şi r este constant, adică polodia este şi ea tot un cerc, descris din punctul D ca centru. Cele două conuri sunt deci de revoluţie şi ele se rostogolesc unul pe altul cu o mişcare uniformă, căci ρ fiind constant viteza unghiulară a rotaţiei instantanee este şi ea constantă potrivit teoremei I.

Notă. Fie a, b, c lungimile semi-axelor elipsoidului de inerţie. Să presupunem $a > b > c$. Avem

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{B}}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

Să vedem la ce se reduc în mod geometric inegalităţile cunoscute:

$$K^2 - AH > o \quad \text{şi} \quad K^2 - CH < o.$$

In acest scop, plecăm dela egalitatea mai sus obţinută $d = \frac{\sqrt{H}}{K}$ care ne dă $K^2 = \frac{H}{d^2}$. Introducând această valoare, prima dintre inegalităţi devine

$$\frac{H}{d^2} - AH > o \quad \text{adică} \quad d < \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \text{sau } d < a.$$

Inegalitatea a doua devine la rândul ei

$$\frac{H}{d^2} - CH < o \quad \text{adică} \quad d > \frac{1}{\sqrt{C}} \quad \text{sau } d > c.$$

Vedem astfel că cele două inegalităţi în chestiune exprimă pur şi simplu, că distanţa punctului fix la planul P tangent

elipsoidului de inerţie, este coprinsă între semi-axul cel mare şi semi-axul cel mic al elipsoidului.

III. MIŞCAREA UNUI SOLID DE REVOLUŢIE, OMOGEN, ÎN JURUL UNUI PUNCT AL AXULUI SĂU DE FIGURĂ.

1. **Definiţii.** Vom lua axul de revoluţie ca ax mobil OZ. Elipsoidul de inerţie pentru punctul O fiind şi el de revoluţie în jurul lui OZ avem $B = A$.

Se numeşte:

ecuator, planul XOY al axelor principale egale;

linia nodurilor, intersecţia OA a ecuatorului cu planul fix xOy;

precesiune, rotaţia solidului în jurul axului fix Oz, *viteza de precesiune* fiind viteza unghiulară $\frac{d\psi}{dt}$ a liniei nodurilor în jurul axului Oz, care este de altfel viteza unghiulară de rotaţie a planului ZOz în jurul lui Oz;

nutaţiune, rotaţia solidului în jurul liniei nodurilor, *viteza de nutaţiune* fiind viteza unghiulară $\frac{d\theta}{dt}$ a axului de revoluţie în jurul liniei nodurilor;

rotaţie proprie, rotaţia solidului în jurul axului său de revoluţie OZ, *viteza de rotaţie proprie* fiind $\frac{d\varphi}{dt}$.

2. **Schimbare de variabile.** Ecuaţiile mişcării sunt cele trei ecuaţii ale lui Euler, în care facem $B = A$, adică

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A \frac{dp}{dt} + (C - A)\, qr = L \\ & A \frac{dq}{dt} - (C - A)\, pr = M \\ & C \frac{dr}{dt} = N \end{aligned} \right.$$

la care se adaogă cele trei relaţii de corespondenţă

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & p \cos\varphi - q \sin\varphi = \frac{d\theta}{dt} \\ & p \sin\varphi + q \cos\varphi = \sin\theta \frac{d\psi}{dt} \\ & r = \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Elipsoidul de inerţie fiind de revoluţie, este avantajos de a lua ca axe mobile sistemul OZ, OA, OB, axul OB fiind perpendicular pe OA în planul XOY. Axele OA şi OB sunt în acelaşi timp mobile şi în solid şi în spaţiu.

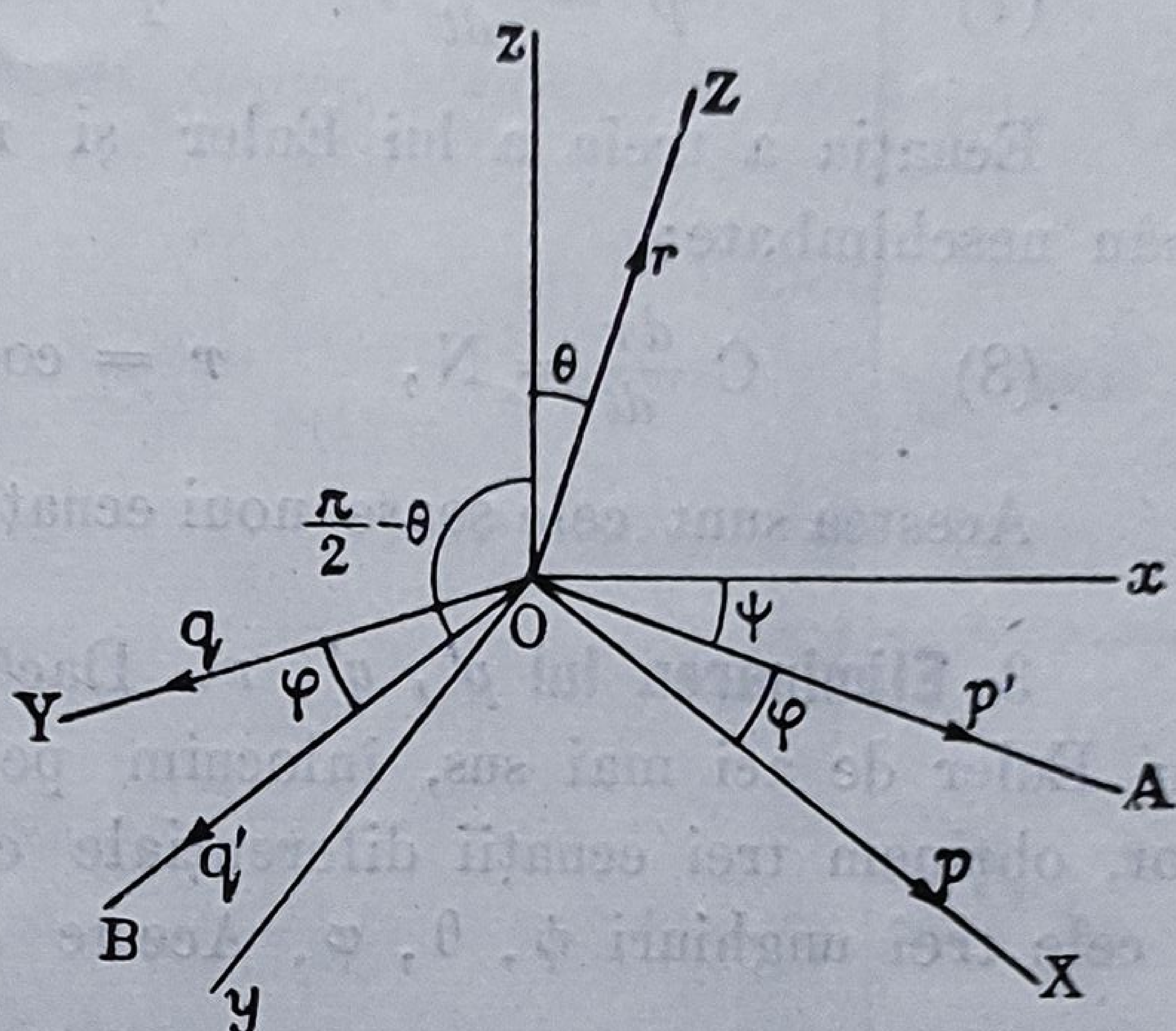


Fig. 191

Să însemnăm prin p' şi q' componentele vectorului rotaţiei instantanee pe direcţiile OA şi OB. Expresiile acestor componente se obţin proectând succesiv pe OA şi OB, componentele p şi q de pe axele OX şi OY, ceea ce dă

$$(3)\qquad \begin{aligned} p' &= p\cos\varphi - q\sin\varphi \\ q' &= p\sin\varphi + q\cos\varphi . \end{aligned}$$

De asemenea, însemnând prin L′ şi M′ componentele pe OA şi OB ale momentului rezultant al forţelor aplicate, avem

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathrm{L}' &= \mathrm{L}\cos\varphi - \mathrm{M}\sin\varphi \\ \mathrm{M}' &= \mathrm{L}\sin\varphi + \mathrm{M}\cos\varphi . \end{aligned}$$

Deducem de altfel din ecuaţiile (3) prin derivare,

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= \left(\cos\varphi\frac{dp}{dt} - \sin\varphi\frac{dq}{dt}\right) - q'\frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dq'}{dt} &= \left(\sin\varphi\frac{dp}{dt} + \cos\varphi\frac{dq}{dt}\right) + p'\frac{d\varphi}{dt} . \end{aligned}$$

Aceasta stabilit, pentru a introduce noile variabile p' şi q' este suficient de a aduna cele două dintâi ecuaţii ale lui Euler înmulţite respectiv mai întâi cu $\cos\varphi$ şi $-\sin\varphi$, apoi cu $\sin\varphi$ şi $\cos\varphi$. Se obţine, ţinând socoteală de relaţiile (3), (4) şi (5),

$$(6)\qquad \begin{aligned} \mathrm{A}\frac{dp'}{dt} + (\mathrm{C}-\mathrm{A})q'r + \mathrm{A}q'\frac{d\varphi}{dt} &= \mathrm{L}' \\ \mathrm{A}\frac{dq'}{dt} - (\mathrm{C}-\mathrm{A})p'r - \mathrm{A}p'\frac{d\varphi}{dt} &= \mathrm{M}' \end{aligned}$$

iar pe de altă parte, cele două dintâi relaţii (2) se scriu

$$(7) \qquad p' = \frac{d\theta}{dt}, \qquad q' = \sin\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Ecuaţia a treia a lui Euler şi relaţia treia dela (2) rămân neschimbate:

$$(8) \qquad C\frac{dr}{dt} = N, \qquad r = \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Acestea sunt cele şease noui ecuaţii diferenţiale ale mişcării.

3. **Eliminarea lui p', q', r.** Dacă în cele trei ecuaţii ale lui Euler de aci mai sus, înlocuim pe p', q', r prin expresiile lor, obţinem trei ecuaţii diferenţiale care definesc în funcţie de t cele trei unghiuri ψ, θ, φ. Aceste ecuaţii sunt următoarele:

$$(9) \quad \begin{cases} A\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + (C - A)\sin\theta\cos\theta\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 + C\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} = L' \\ A\sin\theta\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + (2A - C)\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\psi}{dt} - C\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} = M' \\ C\dfrac{d}{dt}\left(\cos\theta\dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}\right) = N. \end{cases}$$

Problema determinării mişcării solidului este astfel redusă la o chestiune de pură Analiză. Obţinerea soluţiei dă însă loc la dificultăţi ce nu pot fi învinse. Dacă totuşi s'au putut rezolva unele probleme de acest gen, aceasta se datorează faptului că s'au putut înlocui una sau două din ecuaţiile (9) prin una sau două integrale de ordinul întâi, date de teorema momentelor cantităţilor de mişcare şi de teorema forţelor vii. Vom vedea mai departe un exemplu.

4. **Caz când solidul este supus unei singure forţe, aplicată într'un punct al axului de figură.** Fie F forţa şi S punctul ei de aplicaţie, situat pe axul de revoluţie OZ la distanţa l de punctul fix O.

Dacă însemnăm cu X', Y', Z componentele forţei pe direcţiile OA, OB, OZ, avem

$$L' = -lY', \qquad M' = lX', \qquad N = 0.$$

N, fiind nul, ecuaţia a treia din sistemul (9) se integrează şi ne dă, însemnând prin n o constantă,

$$(10) \qquad \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n \quad \text{adică } r = n.$$

Să presupunem că solidul se învârteşte cu o foarte mare viteză în jurul axului său de figură OZ. In acest caz $\frac{d\varphi}{dt}$ fiind foarte mare, ecuaţia (10) se reduce sensibil la $\frac{d\varphi}{dt} = n$ şi, în mod analog, reducând primii membri ai celorlalte două ecuaţii ale sistemului (9) la valorile lor principale, găsim relaţiile aproximative

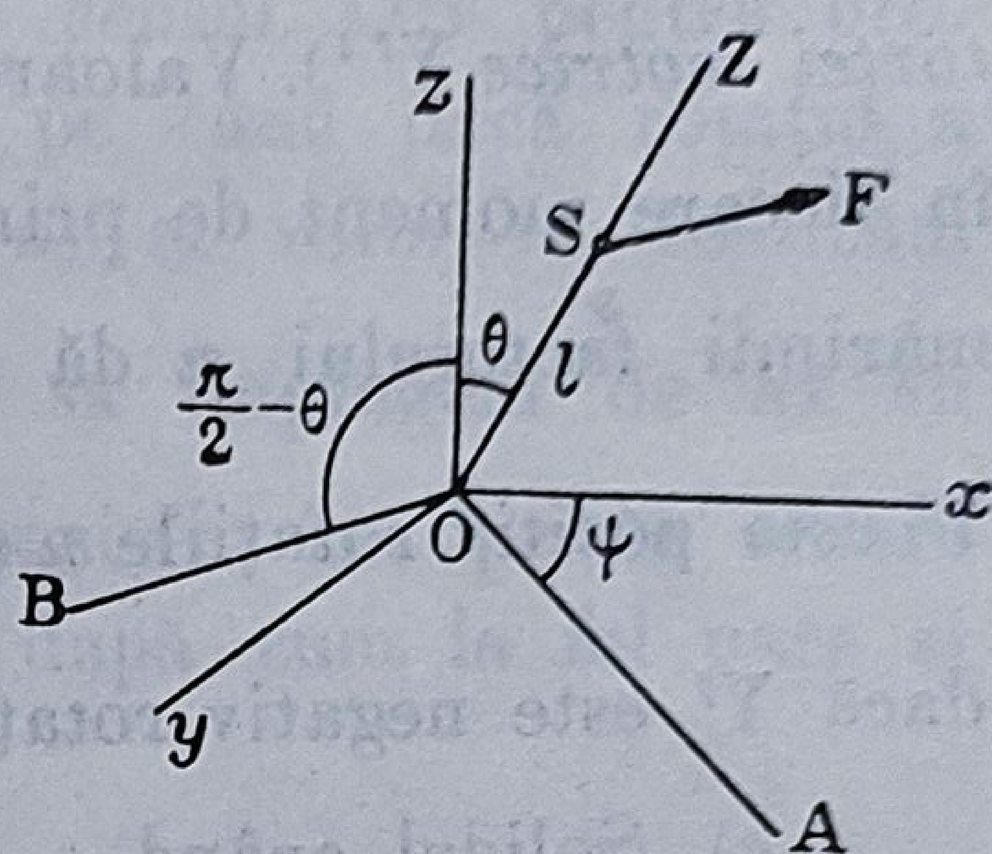


Fig. 192

$$(11) \qquad C\,n \sin\theta \frac{d\psi}{dt} = -\,l\,Y', \qquad C\,n \frac{d\theta}{dt} = -\,l\,X'.$$

Aceste ecuaţii permit de a calcula pe ψ şi θ când se dă X' şi Y', şi invers.

a). ***Mişcare de nutaţiune fără precesiune.*** Dacă presupunem că forţa rămâne coprinsă în planul AOZ, avem $Y' = o$ şi prin urmare $\frac{d\psi}{dt} = o$ adică $\psi = \text{const.}$ Rezultă, că axul de figură OZ se învârteşte în jurul dreptei OA, care rămâne fixă, cu o viteză unghiulară $\frac{d\theta}{dt}$ dată de ecuaţia a doua din sistemul (11); acest ax se mişcă deci într'un plan fix *perpendicular direcţiei forţei motrice* X' (planul BOzZ). Dacă X' este pozitiv, $\frac{d\theta}{dt}$ şi n vor fi de semne contrarii, aşa că axul de figură se va apropia sau se va depărta de Oz după cum rotaţia solidului în jurul axului de figură va avea loc dela stânga la dreapta sau dela dreapta la stânga. Dacă X' este negativ, mişcarea se produce în sens invers.

b). ***Mişcare de precesiune fără nutaţiune.*** Să presupunem

din potrivă că forța rămâne necontenit coprinsă în planul BOZ. Avem atunci $X' = o$ și prin urmare $\frac{d\theta}{dt} = o$ adică $\theta =$ const. Axul de figură OZ descrie deci o mișcare conică în jurul dreptei fixe Oz, deplasarea lui fiind astfel *perpendiculară direcției forței motrice* Y' [1]). Valoarea vitezei de precesiune $\frac{d\psi}{dt}$ este dată în fiecare moment de prima din ecuațiile (11), care din cauza mărimii factorului n dă pentru $\frac{d\psi}{dt}$ o valoare foarte mică. Dacă Y' este pozitiv rotațiile n și $\frac{d\psi}{dt}$ vor fi de, sensuri contrarii, iar dacă Y' este negativ rotația $\frac{d\psi}{dt}$ va avea acelaşi sens ca rotația n.

c). Solidul având o mișcare inițială de rotație rapidă în jurul axului de figură OZ, și fără a fi supus acțiunii vre unei forțe, să acționăm cu mâna acest ax făcându-l să descrie cu o mișcare uniformă un con de revoluție în jurul axului fix Oz. Vom avea $\frac{d\theta}{dt} = o$ și $\frac{d\psi}{dt} =$ const. In consecință $X' = o$. Realizăm astfel cazul dela litera b) însă cu viteză de precesiune constantă, și avem

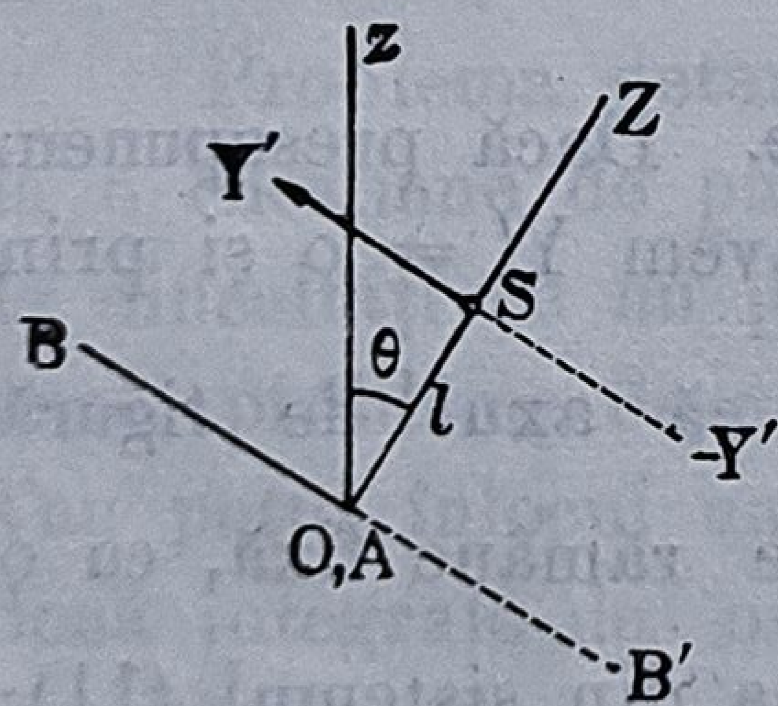


Fig. 193

$$Y' = -\frac{Cn \sin\theta}{l} \cdot \frac{d\psi}{dt}.$$

Aceasta este forța care produce mișcarea conică și care este egală și direct opusă reacțiunii axului asupra mânei [2]). Dacă $\frac{d\psi}{dt}$ nu este foarte mic, reacțiunea este foarte mare; paralelă cu OB, ea este *perpendiculară direcției în care se depla-*

[1]) Viteza unghiulară a planului zOZ în rotația din jurul lui Oz este egală cu viteza unghiulară $\frac{d\varphi}{dt}$ a dreptei OA din planul xOy, această dreaptă fiind perpendiculară pe zOZ.

[2]) Putem scrie

$$Y' = -\frac{Cn}{l^2} \cdot (l \sin\theta)\frac{d\psi}{dt} = -\frac{Cn}{l^2} V$$

însemnând prin V viteza punctului de aplicație S. Forța motrice este deci proporțională cu productul Vn și invers proporțională cu l^2.

sează axul OZ, contrariu de ceea ce ar avea loc dacă n'ar exista rotaţia.

Dacă rotaţia n are loc dela stânga la dreapta şi voim să realizăm un $\frac{d\psi}{dt}$ de acelaşi sens, cum Y′ trebue să fie atunci negativ va trebui să tragem de ax în sensul OB′ pentru producerea mişcării conice în sensul voit, pe când dacă rotaţia n are loc dela dreapta la stânga ($n < 0$) şi voim să realizăm aceiaşi mişcare $\left(\frac{d\psi}{dt} > 0\right)$ va trebui să împingem de ax în sensul OB pentru ca Y′ să fie astfel pozitiv. La prima vedere aceasta pare cu adevărat paradoxal, după cum la fel pare şi rezultatul dela litera a).

Notă. Să considerăm cazul când forţa aplicată solidului ar fi greutatea sa P aplicată în centrul de greutate G, la distanţa a de punctul fix O.

Luând axul Oz vertical, greutatea P va fi necontenit coprinsă în planul BOZ şi vom avea $Y' = -P\sin\theta$. Deci

$$P\sin\theta = \frac{Cn\sin\theta}{a}\cdot\frac{d\psi}{dt}$$

de unde

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Pa}{Cn}.$$

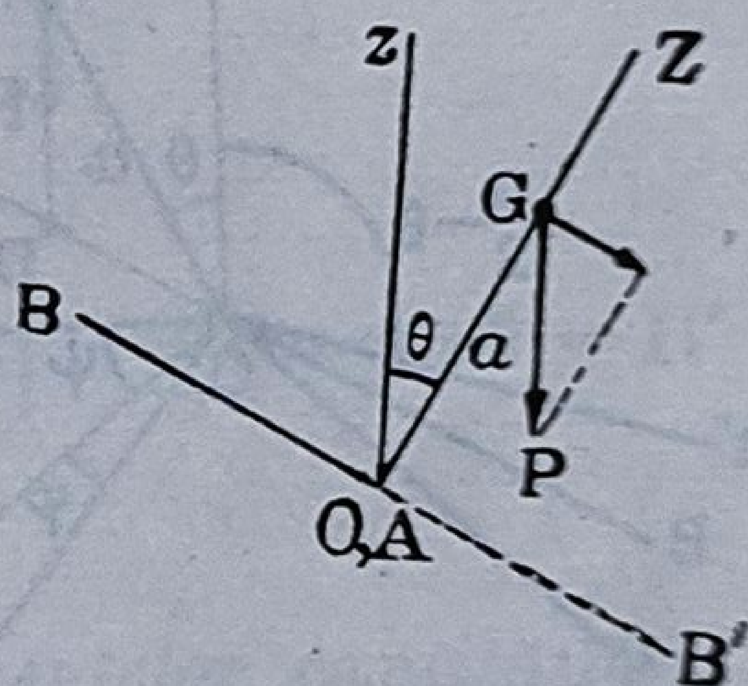


Fig. 194

Aceasta nu este decât o valoare mijlocie. In ceea ce urmează vom stabili o valoare mai precisă, studiind cu mai multă rigurositate chestiunea mişcării unui solid greu în jurul unui punct al axului său de figură.

IV. MIŞCAREA UNUI SOLID DE REVOLUŢIE, OMOGEN, IN JURUL UNUI PUNCT AL AXULUI SĂU DE FIGURĂ, IN CAZUL CÂND EL NU ESTE SUPUS DECÂT ACŢIUNEI GREUTĂŢII.

1. Ecuaţiile mişcărei. a). Să considerăm un solid de revoluţie omogen, mobil în jurul unuia din punctele axului său de figură O şi supus numai acţiunei greutăţii.

Axul fix Oz fiind vertical şi îndreptat în sus, fie:
G, centrul de greutate al solidului;
a, distanţa lui G la punctul fix O;
P, greutatea solidului.

Forţele direct aplicate reducându-se la forţa P aplicată în punctul G şi coprinsă în planul dreptelor OZ, Oz, OB care este perpendicular direcţiei OA, componentele L', M', N ale momentului rezultant în raport de axele OA, OB, OZ sunt

$$(12) \qquad \begin{aligned} L' &= P.\, OD = P.\, a \sin \theta \\ M' &= o, \quad N = o. \end{aligned}$$

Inlocuind în ecuaţiile (9) pe L', M', N prin aceste valori, obţinem ecuaţiile mişcării. Nu vom utiliza însă decât pe a treia dintre aceste ecuaţii, substituind celorlalte două *integralele de ordinul întâi pe care ni le dă teorema forţelor vii şi teorema momentelor cantităţilor de mişcare.*

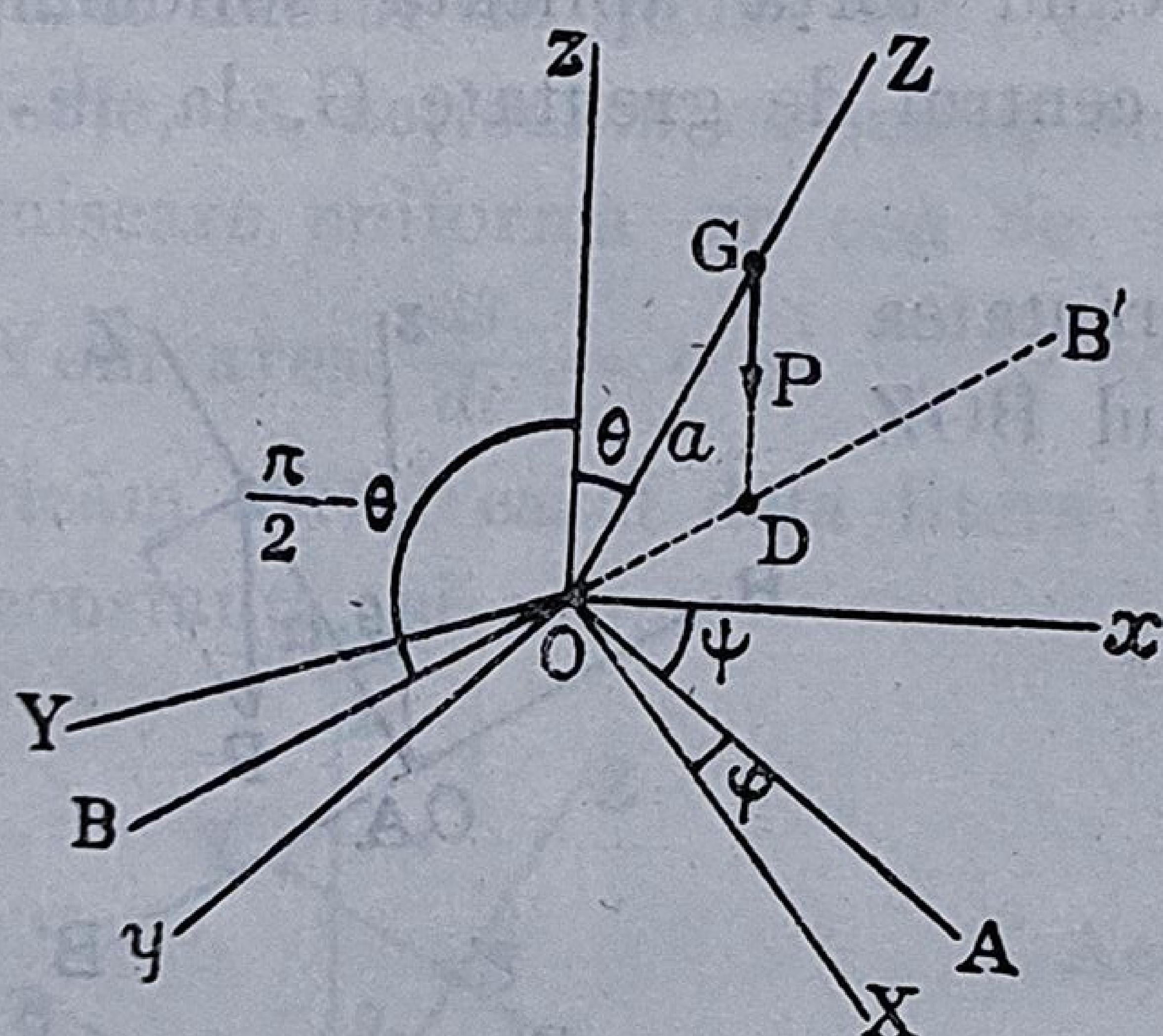


Fig. 195

Ecuaţia a treia din sistemul (9) care nu este altceva decât ecuaţia a treia a lui Euler: $C \dfrac{dr}{dt} = N$, se integrează când facem pe N egal cu zero şi ne dă

$$\cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n$$

n reprezentând valoarea constantă a lui r pe tot timpul mişcării.

b). Să aplicăm acum *teorema forţelor vii.* Cum solidul fiind de revoluţie în jurul axului OZ avem $B = A$, forţa sa vie are ca expresie

$$T = \frac{1}{2} \left[A\,(p^2 + q^2) + Cr^2 \right].$$

Insă relaţiile cunoscute (3):

$$p' = p \cos \varphi - q \sin \varphi \, , \qquad q' = p \sin \varphi + q \cos \varphi$$

ne dau

$$p'^2 + q'^2 = p^2 + q^2 \text{ [1]}$$

deci

$$T = \frac{1}{2} \left[A (p'^2 + q'^2) + Cr^2 \right].$$

Pe de altă parte, greutatea P admite ca potenţial $V = Pz$, adică

$$V = P . a \cos \theta \, .$$

Exprimând potrivit teoremei forţelor vii că suma $T + V$ este o constantă, obţinem ecuaţia

$$A (p'^2 + q'^2) + Cr^2 + 2 \, P \, a \cos \theta = \text{const.}$$

care, ţinând socoteală de relaţiile (7) adică

$$p' = \frac{d\theta}{dt} \, , \quad q' = \sin \theta \frac{d\psi}{dt}$$

se scrie

$$(13) \qquad A \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] + 2 \, P \, a \cos \theta = H'$$

H' fiind o constantă.

c). Să aplicăm însfârşit *teorema momentelor cantităţilor de mişcare*. Fie OK momentul rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de O. Ştim că proecţia pe un ax a vitezei punctului K este egală cu momentul rezultant al forţelor direct aplicate în raport de axul considerat.

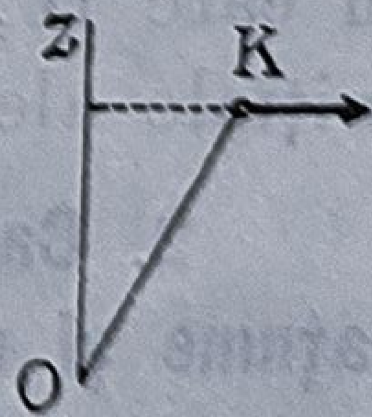


Fig 196

Să luăm ca ax de proecţiune axul fix Oz. Momentul forţei P în raport de Oz fiind necontenit nul, rezultă că proecţia pe acest ax a vitezei punctului K este necontenit nulă şi prin urmare că proecţia vectorului OK pe Oz este o constantă.

[1]) Relaţie de altfel evidentă, căci ω fiind vectorul rotaţiei instantanee, avem $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = p'^2 + q'^2 + r^2$.

Ori, proecţiile lui OK pe axele mobile OX, OY, OZ sunt

$$Ap, \quad Aq, \quad Cr$$

deci proecţiile pe axele OA, OB, OZ vor fi

$$Ap \,.\, \cos\varphi - Aq \,.\, \sin\varphi, \quad Ap \,.\, \sin\varphi + Aq \,.\, \cos\varphi, \quad Cr$$

adică $\quad Ap', \qquad Aq', \qquad Cr.$

Să proectăm aceste segmente pe axul Oz. Proecţia lui Ap' este nulă, OA fiind perpendiculară pe Oz. Proecţia lui Aq' este egală cu $Aq' \sin\theta$, iar aceea a lui Cr egală cu $Cr \cos\theta$. Aşa dar, proecţia vectorului OK pe Oz este $Aq' \sin\theta + Cr\cos\theta$. Inlocuind pe q' prin $\sin\theta \frac{d\psi}{dt}$, pe r prin n şi exprimând că suma respectivă este o constantă K′, obţinem ecuaţia

$$A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} + Cn\cos\theta = K'. \tag{14}$$

d). In rezumat, sistemul de ecuaţii (9) poate fi înlocuit în cazul de faţă prin următorul sistem de trei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, care determină pe ψ, θ, φ în funcţie de t:

$$(15) \quad \begin{cases} A\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] + 2\,Pa\cos\theta = H' \\ A\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} + Cn\cos\theta = K' \\ \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n \end{cases}$$

în care H′, K′, n reprezintă constante depinzând de condiţiile iniţiale ale mişcării.

2. Caz particular când la începutul mişcării vitezele de nutaţiune şi de precesiune sunt amândouă nule, iar solidul este animat de o foarte mare viteză de rotaţie în jurul axului său de figură.

Punând pentru simplicitate

$$\frac{Pa}{A} = l, \qquad \frac{Cn}{A} = m$$

ecuaţiile precedente se pot scrie, introducând condiţiile iniţiale, adică $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = o$, $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = o$, $\theta = \theta_0$:

$$(16)\quad \begin{cases} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2\,l\,(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ \sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = m\,(\cos\theta_0 = \cos\theta) \\ \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = n\,. \qquad \left[n = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0\right] \end{cases}$$

Eliminând pe $\frac{d\psi}{dt}$ între cele două dintâi ecuaţii, se obţine

$$(17)\quad \sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,l\sin^2\theta\,(\cos\theta_0 - \cos\theta) - m^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2.$$

Această ecuaţie determină pe θ; a doua din ecuaţiile (16) dă atunci pe $\frac{d\psi}{dt}$ adică viteza de precesiune, iar ecuaţia a treia procură însfârşit viteza rotaţiei proprii $\frac{d\varphi}{dt}$ în jurul axului de figură.

Să ţinem acum socoteală de faptul că, prin ipoteză, viteza iniţială n este foarte mare. Cantitatea m este şi ea atunci foarte mare, şi, pentru ca membrul al 2 lea al ecuaţiei (17) să fie pozitiv, după cum este şi membrul întâi, trebue, pe de o parte ca diferenţa $\cos\theta_0 - \cos\theta$ să fie pozitivă pentru ca primul termen din membrul al doilea să fie pozitiv, iar pe de altă parte această diferenţă trebue să fie şi foarte mică pentru ca termenul $m^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2$ să poată fi mai mic decât $2\,l\sin^2\theta$ $(\cos\theta_0 - \cos\theta)$. Vom putea deci pune

$$(18)\qquad \theta = \theta_0 + \varepsilon$$

ε fiind o cantitate pozitivă şi foarte mică, al căreia patrat va putea fi neglijat, afară de cazul când acest patrat se va găsi multiplicat cu un factor de aceiaşi ordine de mărime ca n^2 [1]. In consecinţă, vom putea scrie:

---

[1] Aceasta pentru motivul că în ecuaţia (17) termenul final este tocmai de ordinul $n^2\varepsilon^2$, ceea ce se poate vedea punându-l sub forma

$$4\,m^2\sin^2\frac{\theta_0+\theta}{2}\sin^2\frac{\theta-\theta_0}{2} \quad \text{adică} \quad \frac{C^2}{A^2}n^2\varepsilon^2\sin^2\frac{2\,\theta_0+\varepsilon}{2}.$$

$$\cos\theta \;= \cos(\theta_0 + \varepsilon) = \cos\theta_0 \;- \varepsilon\sin\theta_0$$
$$\sin^2\theta = \sin^2(\theta_0 + \varepsilon) = \sin^2\theta_0 + 2\,\varepsilon\sin\theta_0\cos\theta_0$$

şi ecuaţia (17) devine prin aceste substituiri, neglijând termenii în ε^2, păstrând pe acela în $m^2\,\varepsilon^2$ şi simplificând cu $\sin\theta_0$,

$$(\sin\theta_0 + 2\,\varepsilon\cos\theta_0)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,l\,\varepsilon\sin^2\theta_0 - m^2\,\varepsilon^2\sin\theta_0$$

de unde

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2\,l\,\varepsilon\sin^2\theta_0 - m^2\,\varepsilon^2\sin\theta_0}{\sin\theta_0 + 2\,\varepsilon\cos\theta_0}$$

şi, efectuând diviziunea din membrul al doilea cu respectarea aceluiaşi principiu ca mai sus, ceea ce revine la neglijarea lui $2\,\varepsilon\cos\theta_0$ înaintea lui $\sin\theta$,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,l\,\varepsilon\sin\theta_0 - m^2\,\varepsilon^2$$

sau

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = m^2\,\varepsilon\left(\frac{2\,l\sin\theta_0}{m^2} - \varepsilon\right).$$

Dacă punem

$$\alpha = \frac{2\,l\sin\theta_0}{m^2}$$

putem scrie

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = m^2\,\varepsilon\,(\alpha - \varepsilon)$$

de unde, observând că potrivit egalităţii (18) avem $d\theta = d\varepsilon$,

$$\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\,(\alpha - \varepsilon)}} = m\,dt.$$

Integraţiunea acestei ecuaţii, ţinând socoteală că pentru $t = o$ avem $\theta = \theta_0$ şi prin urmare $\varepsilon = o$, ne dă

$$\text{arc}\cos\left(1 - \frac{2\,\varepsilon}{\alpha}\right) = mt\,.$$

Din această egalitate rezultă

$$(19) \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \cos mt\right)$$

sau

$$\varepsilon = \alpha\sin^2\frac{mt}{2}\,.$$

Cantitatea pozitivă ε este deci periodică şi α este valoarea sa maximă. Avem de altfel, substituind lui l şi m valorile lor

$$\alpha = \frac{2\,l \sin\theta_0}{m^2} = \frac{2\,\mathrm{AP}\,a \sin\theta_0}{\mathrm{C}^2 n^2}.$$

Unghiul θ porneşte deci dela valoarea θ_0, creşte până la valoarea $\theta_0 + \alpha$ apoi se micşorează, revine la valoarea θ_0 când $\varepsilon = 0$ şi tot aşa mai departe. Valoarea lui α este de altfel foarte mică şi cu atât mai mică cu cât n este mai mare.

a). *Viteza de nutaţiune.* Egalităţile (18) şi (19) ne dau

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{m\,\alpha}{2} \sin mt$$

sau

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathrm{P}a \sin\theta_0}{\mathrm{C}n} \sin mt. \tag{20}$$

b). *Viteza de precesiune.* Valoarea $\frac{d\psi}{dt}$ rezultă, după cum s'a mai spus, din a doua din ecuaţiile (16) care dă

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{m(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{m\,\varepsilon}{\sin\theta_0 + 2\,\varepsilon\cos\theta_0}$$

adică, în aceiaşi ordine de aproximaţie,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{m\,\varepsilon}{\sin\theta_0}$$

sau, înlocuind pe m prin valoarea sa şi pe ε prin expresia (19),

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{C}n}(1 - \cos mt). \tag{21}$$

Cum $1 - \cos mt$ variază între o şi 2, valoarea mijlocie a vitezei de precesiune este egală cu $\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{C}n}$.

c). *Viteza de rotaţie proprie.* Ecuaţia a treia din sistemul (16) ne dă

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} = n - (\cos\theta_0 - \varepsilon\sin\theta_0)\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{C}n}(1 - \cos mt)$$

adică

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{C}n}\cos\theta_0\,(1 - \cos mt). \tag{22}$$

d). *Valoarea perioadei.* Cele trei expresiuni (20), (21) şi (22) arată că vitezele de nutaţiune, de precesiune şi de rotaţie proprie trec respectiv prin aceleaşi valori când cantitatea mt se măreşte cu 2π, adică, când timpul se măreşte cu $\frac{2\pi}{m}$. Valoarea

$$T = \frac{2\pi}{m} \quad \text{sau} \quad T = \frac{2\pi A}{Cn}$$

reprezintă deci perioada fenomenului. Ea este foarte mică.

Notă. Rezultatele, atât dela capitolul de faţă cât şi dela capitolul precedent, se aplică nu numai solidelor de revoluţie omogene, dar şi solidelor de revoluţie care fără a fi omogene prezintă particularitatea că punctele lor care se corespund simetric faţă de axul de revoluţie au aceiaşi massă (Nota dela pag. 153).

3. **Giroscoape**. Rezultatele de mai sus se verifică cu ajutorul *sfârlezei giroscopice* şi a *balanţei giroscopice.*

Sfârleaza giroscopică este constituită dintr'un tor metalic T, al căruia ax AA′ este menţinut de un cadru circular C, acesta formând corp cu o vergea OZ dispusă în prelungirea axului torului.

Extremitatea O a vergelei se dispune, după învârtirea prealabilă a torului, în scobitura unui suport. Axul AA′ va părea atunci că descrie un con de revoluţie în jurul verticalei, cu o viteză unghiulară cu atât mai mică cu cât rotaţia dată torului a fost mai mare. In realitate, unghiul axului AA′ cu verticala, adică unghiul nutaţiunii, nu este constant, însă variaţiile sale fiind foarte mici nu pot fi prinse cu ochiul. De asemenea, viteza de precesiune a axului în jurul verticalei nu este constantă, însă, perioada variaţiei sale fiind

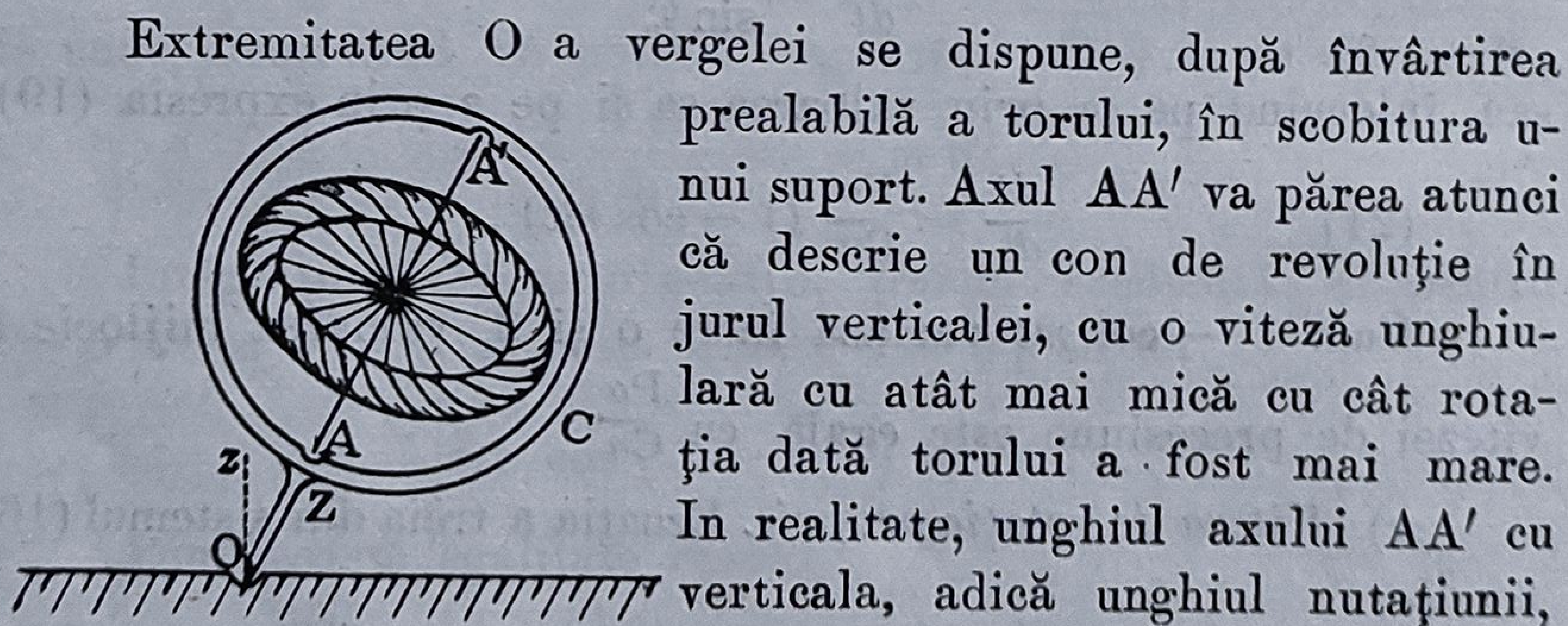


Fig. 197

foarte scurtă, ochiul nu poate prinde decât valoarea sa mijlocie $\frac{Pa}{Cn}$ [1]).

Rotaţia în jurul verticalei are de altfel acelaşi sens ca rotaţia sfârlezei în jurul axului ei.

Balanţa giroscopică se compune din două sfere metalice inegale S şi S′, montate pe aceiaşi vergea ZOZ′, mobilă în jurul punctului O. Se dă sistemului o rotaţiune rapidă în jurul axului OZ.

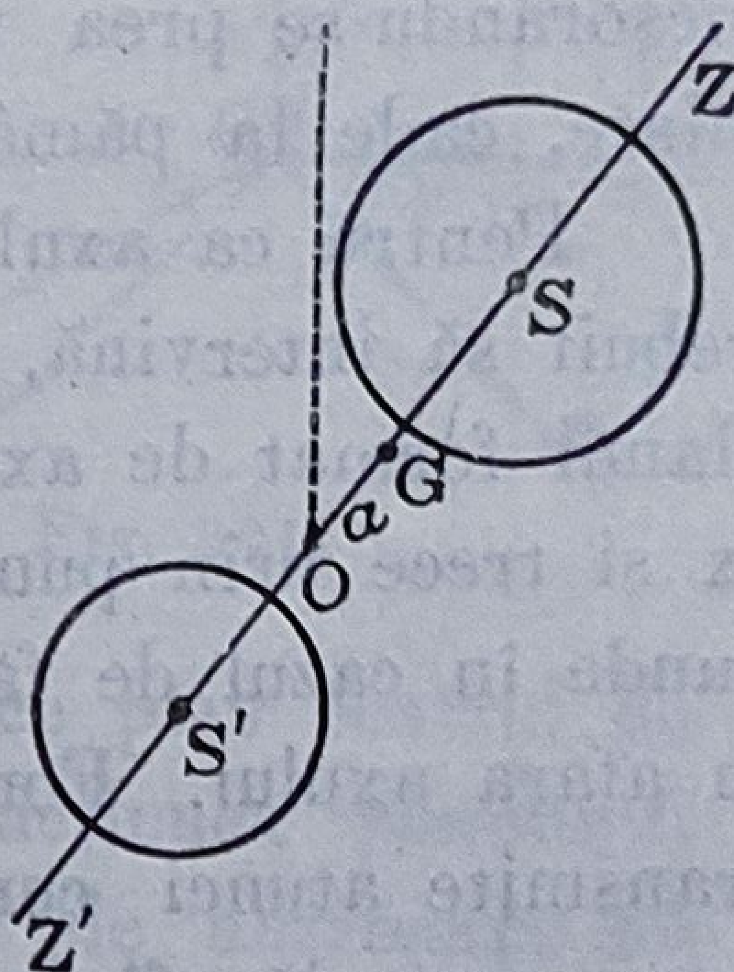


Fig. 199

Sfera S′ poate culisa în lungul vergelei. Se poate astfel modifica poziţia centrului de greutate G a sistemului, aşa fel ca distanţa a din formulele de mai sus să poaţă trece dela pozitiv la negativ şi să se realizeze în consecinţă o viteză de precesiune pozitivă sau negativă, potrivit formulei (21).

---

[1]) Cum pe de o parte această valoare este foarte mică, iar pe de altă parte, dacă neglijăm oscilaţiile insensibile ale axului de figură, avem $\frac{d\theta}{dt} = 0$, rezultă potrivit formulelor (7) adică:

$$p' = \frac{d\theta}{dt}, \quad q' = \sin\theta \frac{d\psi}{dt}$$

că p' este nul iar q' neglijabil. Componentele Ap', Aq', Cr ale momentului cinetic se reduc deci sensibil la Cr. Cu alte cuvinte, *momentul cinetic OK în raport de O coincide sensibil cu axul de figură OZ al solidului.*

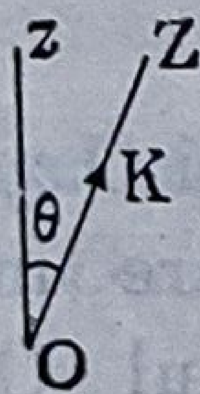


Fig. 198

Astfel fiind, aplicaţia teoremei momentului cinetic în raport de O, determină viteza punctului K şi deci pe aceea a axului de figură Oz. Aceasta constitue ceea ce se numeşte *principiul efectului giroscopic.* Viteza punctului K fiind $Cr \sin\theta \cdot \frac{d\psi}{dt}$ iar momentul greutăţii P în raport de O fiind $Pa \sin\theta$, avem, *prin aplicaţiunea directă a acestui principiu,* $Cr \sin\theta \frac{d\psi}{dt} = Pa \sin\theta$ de unde $\frac{d\psi}{dt} = \frac{Pa}{Cn}$ pentru $r = n$.

A se revedea şi Nota din josul paginei 343. Condiţia $p^2 + q^2 = 0$ de acolo, este aici realizată, căci avem $p^2 + q^2 = p'^2 + q'^2$ şi p' este nul iar q' neglijabil.

Notă. Dacă în loc de sfârleaza giroscopică considerăm o sfârlează ordinară, având extremitatea piciorului ei rotunjită şi angajată într'o scobitură, constatăm, că axul sfârlezei în loc de a descrie o mişcare conică în jurul verticalei punctului de contact, se apropie cu repeziciune de verticală şi rămâne tot timpul în această poziţie, până când viteza de rotaţie a sfârlezei micşorându-se prea mult, sfârleaza, după câteva oscilaţii neregulate, cade la pământ.

Pentru ca axul sfârlezei să se apropie de verticală, a trebuit să intervină, după cum ştim, o forţă perpendiculară pe planul format de axul sfârlezei şi verticala care întâlneşte acest ax şi trece prin punctul de contact. Acest punct nu mai corespunde în cazul de faţă cu extremitatea axului sfârlezei, ci este în afara axului. Forţa de frecare ce ia naştere la contact, se transmite atunci centrului de greutate al sfârlezei şi ea este aceea care dă sfârlezei mişcarea despre care vorbim.

GIROSCOPUL LUI FOUCAULT.

Acest giroscop e format dintr'un tor de bronz, al căruia ax AA′ este montat pe o suspensiune *„à la Cardan"*, ceea ce permite deplasări absolut libere în jurul centrului de greutate care rămâne fix. Un mecanism cu roate dinţate permite de a se da torului o rotaţiune foarte rapidă în jurul axului său de figură.

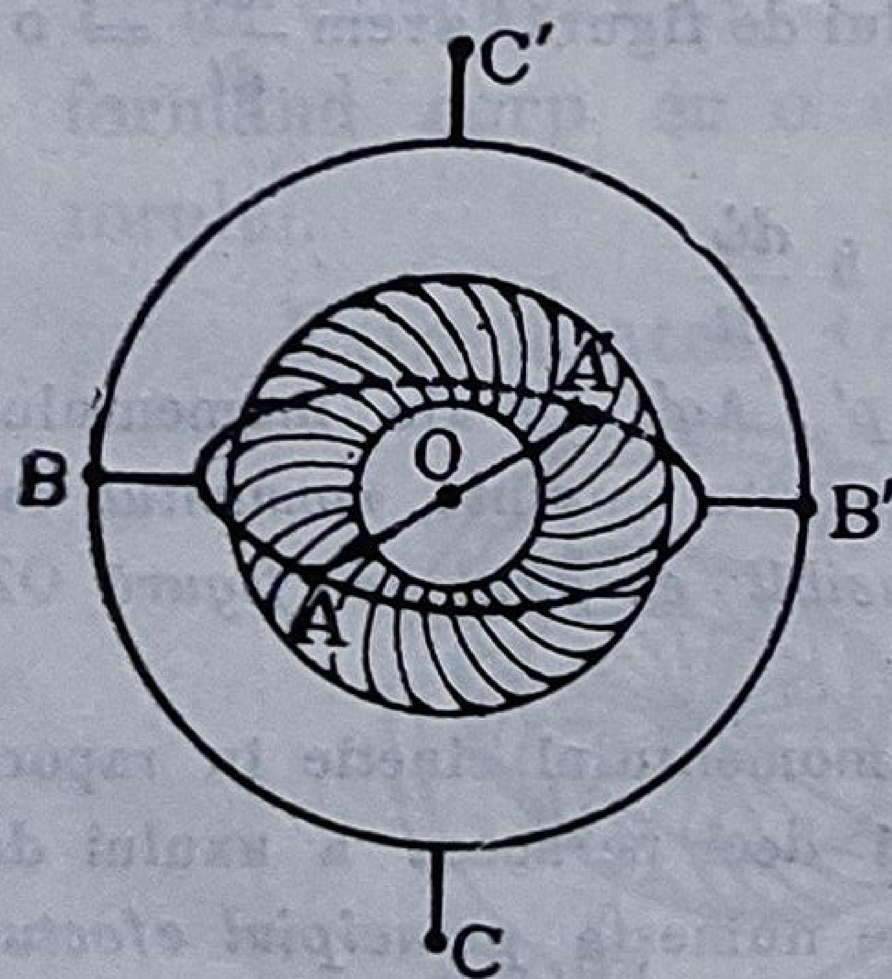


Fig. 200

Fie O centrul de greutate şi $Oxyz$ un sistem de axe dreptunghiulare invariabil legate pământului, axul Oz fiind paralel liniei polurilor şi îndreptat spre Nord, axul Ox în planul meridian şi îndreptat tot spre Nord, iar axul Oy perpendicular pe celelalte două şi îndreptat spre Est, presupunând că ne aflăm în emisfera boreală.

Fie de asemenea OA, OB, OZ cele trei axe pe care le am utilizat la studiul mişcării solidelor de revoluţie omogene

în jurul unui punct fix, axul OZ coincizând de altfel cu axul torului.

Știm că putem trata mișcarea unui corp la suprafața pământului ca o mișcare absolută, dacă alăturăm forțelor realmente aplicate, forța de inerție de antrenare și forța centrifugă compusă a fiecăruia din punctele sale. Ori, în cazul giroscopului lui Foucault, forțele realmente aplicate sunt atracțiunea terestră și acțiunea punctului fix [1]). Atracțiunea terestră, compusă cu forța de inerție de antrenare dă greutatea, și rezultanta tuturor greutăților trece prin centrul de greutate, adică prin punctul fix. Așa dar, acțiunea punctului fix, atracțiunea terestră și forțele de inerție de antrenare nu intervin în ecuațiile mișcării, momentul lor rezultant fiind nul în raport de punctul fix. Rămân deci numai forțele centrifuge compuse.

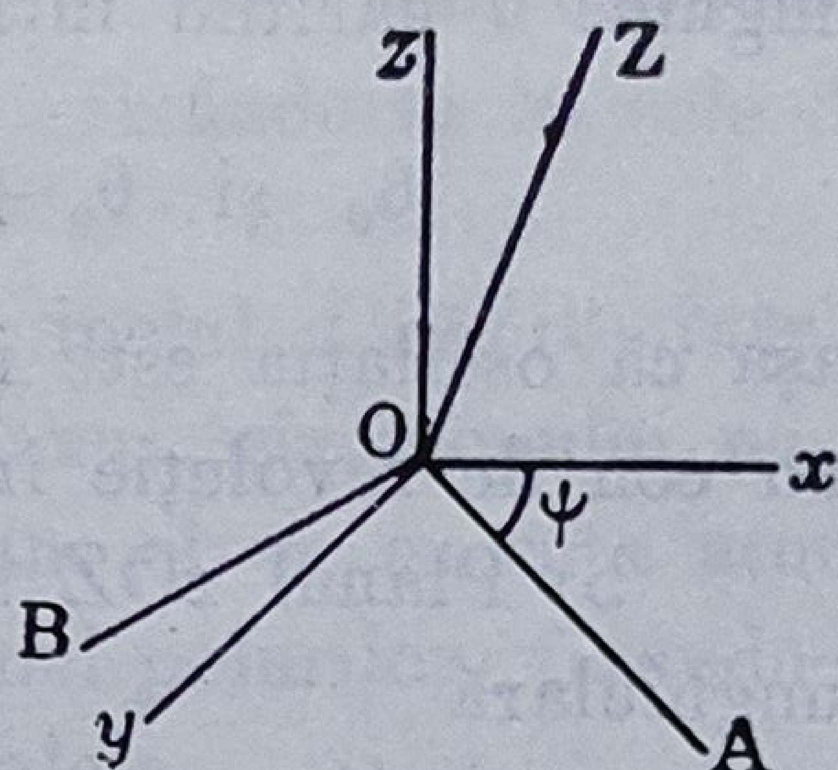


Fig. 201

Acestea intervin în ecuații prin momentele lor rezultante în raport de axele OA, OB, OZ. Fie L′, M′, N aceste momente. Se stabilește, că dacă presupunem rotația proprie $\frac{d\varphi}{dt}$ a giroscopului ca fiind foarte mare, valorile componentelor L′, M′, N se reduc aproximativ la

$$L' = C\,\omega \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\,, \qquad M' = o\,, \qquad N = o$$

ω fiind viteza unghiulară de rotație a pământului.

Dacă comparăm aceste formule cu formulele (12) adică

$$L' = Pa \sin\theta\,, \qquad M' = o\,, \qquad N = o$$

conchidem că tot ce s'a spus referitor la mișcarea unui solid de revoluție omogen și greu în jurul unui punct al axului său de figură, se aplică și giroscopului lui Foucault, înlocuindu-se în

[1]) Această acțiune este de fapt exercitată de către legăturile giroscopului; cum punctul O rămâne fix, acțiunea legăturilor echivalează însă pe aceea a punctului O considerat ca realmente fixat.

rezultatele dobândite productul Pa prin $C\omega\frac{d\varphi}{dt}$ sau $Cn\,\omega$. Astfel:

a) Axul OZ al giroscopului oscilează în planul mobil zOZ, unghiul θ variind între limitele foarte apropiate

$$\theta_0 \quad \text{şi} \quad \theta_0 + \alpha, \qquad \text{unde } \alpha = \frac{2\,A\,\omega \sin\theta_0}{C\,n}$$

aşa că oscilaţia este imperceptibilă şi axul OZ pare a descrie un con de revoluţie în jurul axului boreal:

b) Planul zOZ se învârteşte în jurul lui Oz cu o viteză unghiulară

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega\,(1 - \cos m\,t) \qquad \text{unde } m = \frac{C\,n}{A}.$$

Valoarea mijlocie a vitezei de precesiune este deci egală cu ω, adică cu viteza unghiulară de rotaţie a pământului. Cum, pe de altă parte, $\frac{d\psi}{dt}$ este totdeauna pozitiv, mişcarea de precesiune a axului giroscopului are loc dela stânga la dreapta, adică în sensul contrariu al mişcării pământului.

In rezumat, *axul giroscopului descrie sensibil un con de revoluţie, cu o mişcare uniformă, în jurul liniei boreale, şi viteza unghiulară mijlocie a acestei mişcări este egală şi de sens contrariu vitezei unghiulare de rotaţie a pământului* [1]).

---

[1]) Putem ajunge mult mai repede la acest rezultat prin aplicaţia *principiului efectului giroscopic*, luând ca axe duse prin centrul giroscopului un sistem de axe de *direcţii absolut fixe în spaţiu*. Deplasarea acestui sistem de axe fiind o translaţie, mişcarea relativă a giroscopului va depinde de efectul atracţiei terestre şi de acela al forţelor de inerţie de antrenare. Ambele aceste forţe sunt aplicate în centrul de greutate al giroscopului, adică în punctul O.

Ori, în virtutea principiului efectului giroscopic, momentul cinetic OK coincide sensibil cu direcţia OZ a axului giroscopului.



Fig. 202

Cum momentele celor două forţe considerate sunt amândouă nule, viteza punctului K este nulă şi prin urmare axul de figură OZ păstrează aceiaşi direcţie absolută în spaţiu, adică rămâne îndreptat spre aceiaşi stea fixă. Rezultă atunci imediat, că pentru un observator terestru, axul giroscopului, întocmai ca şi steaua către care rămâne îndreptat, va părea că se învârteşte în jurul liniei boreale, în sensul invers al mişcării pământului şi cu o viteză unghiulară egală ca mărime cu aceea a rotaţiei terestre.

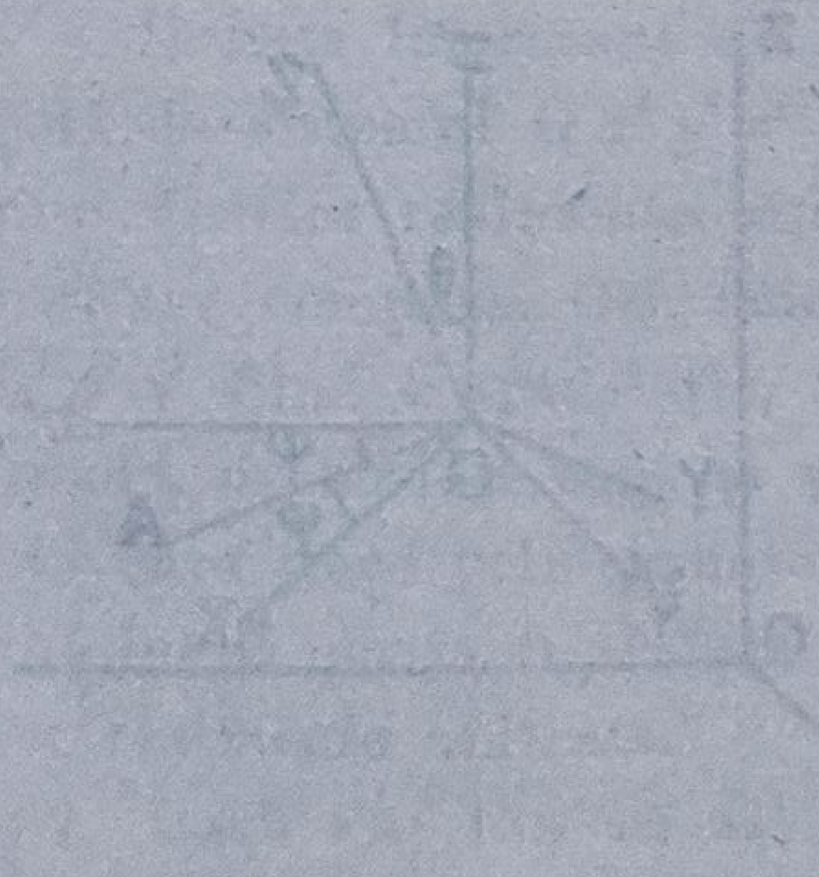
Dacă se fixează inelul de suspensiune BAB′A′ într un plan orizontal, axul CC′ fiind vertical, axul giroscopului nu se va putea deplasa decât orizontal; el va oscila de o parte şi de alta a meridianei adevărate, aşa după cum acul unui declinator oscilează în jurul meridianei magnetice, fixându-se în cele din urmă pe meridiană.

Dacă din potrivă se imobilizează inelul CBC′B′ într'un plan perpendicular planului meridian, axul giroscopului nu se va putea deplasa decât în planul meridian; el va executa atunci o serie de oscilaţii în jurul paralelei liniei polurilor, fixându-se în cele din urmă pe direcţia acestei paralele.

Din cele de mai sus se vede că giroscopul lui Foucault poate servi pentru a demonstra mişcarea de rotaţie a pământului şi a determina într'un loc meridiana adevărată şi latitudinea locului. Aceste din urmă determinări nu au însă, după cum se înţelege, decât un interes teoretic.

Notă. Mişcările sfârlezei şi balanţei giroscopice despre care s'a vorbit mai înainte, sunt tot mişcări relative, însă în ele efectul forţei centrifuge compuse are o slabă influenţă pe lângă acela al greutăţii, care nu se găseşte aplicată în punctul fix ca în cazul giroscopului lui Foucault.

Experienţa însăşi dovedeşte acest fapt.



V. MIŞCAREA UNUI SOLID LIBER.

Să considerăm un corp solid, liber în spaţiu şi solicitat de anumite forţe. Pentru a-i cunoaşte mişcarea, va fi suficient să determinăm mişcarea în spaţiu a centrului său de greutate, apoi mişcarea solidului în jurul acestui punct.

Fie Oxyz un sistem de axe fixe şi G centrul de greutate al solidului, de cordonate a, b, c.

Ecuaţiile mişcării lui G sunt, după cum se ştie,

$$(1) \qquad M\frac{d^2a}{dt^2} = \Sigma X \,, \quad M\frac{d^2b}{dt^2} = \Sigma Y \,, \quad M\frac{d^2c}{dt^2} = \Sigma Z$$

în care M reprezintă massa solidului.

Prin punctul G să ducem axele Gx', Gy', Gz' paralele cu Ox, Oy, Oz. Ştim (pag. 238) că teorema momentelor cantităţilor de mişcare se aplică faţă de sistemul G$x'y'z'$ ca şi cum acest sistem de axe ar fi fix în spaţiu, adică fără a fi nevoe de a alătura vre-o forţă aparentă, forţelor reale care lucrează asupra solidului. Ori, *ecuaţiile care determină mişcarea unui solid în jurul unui punct fix, rezultă numai din aplicaţiunea teoremei momentelor cantităţilor de mişcare.*

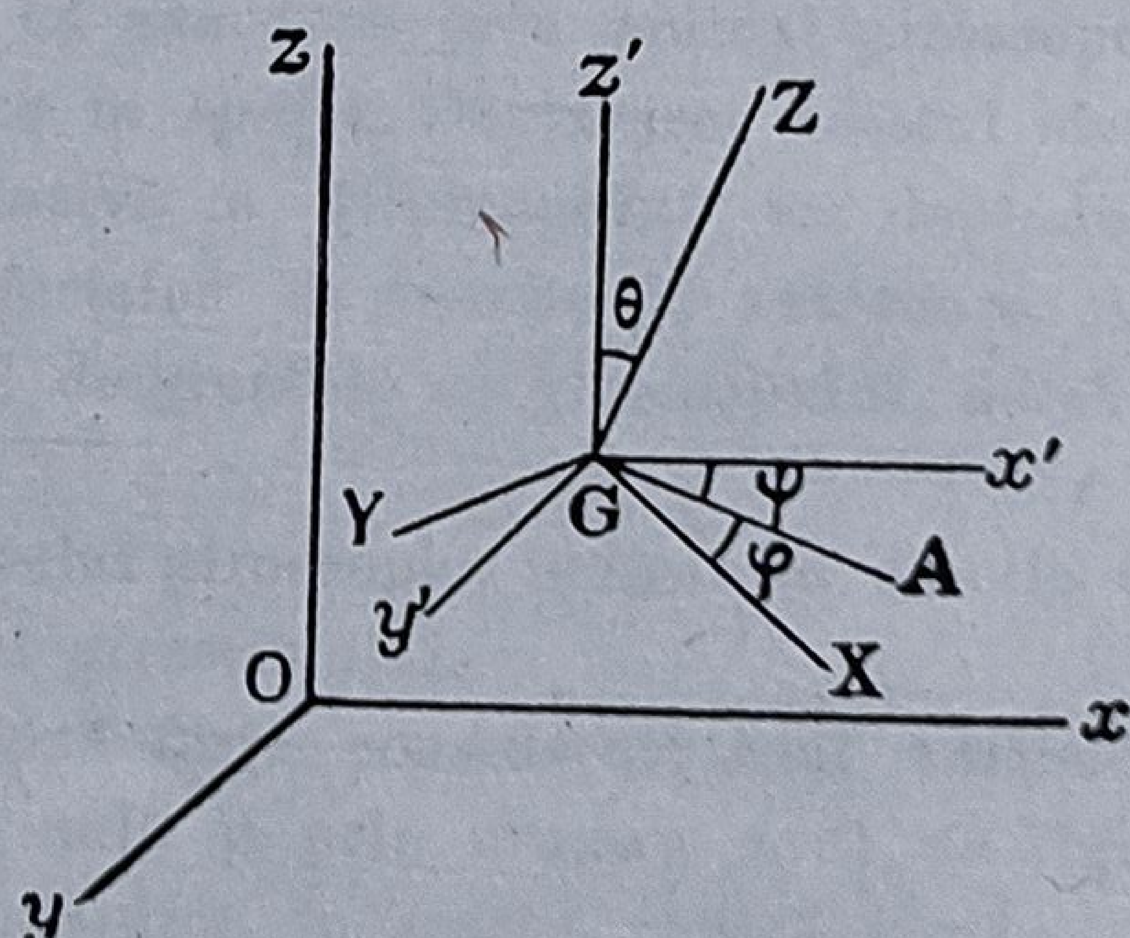


Fig. 203

Vom scrie deci acele ecuaţii ca şi cum sistemul G$x'y'z'$ ar fi fix în spaţiu şi vom avea, prin aceasta, cele trei ecuaţii ale

mişcării relative a solidului în jurul centrului său de greutate [1]).

Dacă luăm ca axe invariabil legate solidului cele trei axe principale de inerţie pentru punctul G, poziţia solidului va putea fi definită prin cele trei unghiuri ale lui Euler ψ, θ, φ şi aplicaţiunea teoremei momentelor cantităţilor de mişcare va conduce, după cum se ştie, la ecuaţiile lui Euler:

$$(2)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = N\,. \end{cases}$$

Ecuaţiile (1) şi (2) considerate simultan ne dau pe a, b, c; p, q, r în funcţie de t. Se vor determina apoi unghiurile ψ, θ, φ prin relaţiile cunoscute în funcţie de p, q, r.

Exemplu. ***Mişcarea unui solid în vid sub simpla acţiune a greutăţii.*** Mişcarea iniţială a solidului se va caracteriza prin poziţia şi viteza centrului său de greutate şi prin rotaţia instantanee în jurul unui anumit ax trecând prin centrul de greutate.

Ecuaţiile (1) se vor putea integra separat, ele ne depin-

---

[1]) Este interesant de a mai raţiona şi astfel: Mişcarea solidului în raport de sistemul $Gx'y'z'$ poate fi tratată ca o mişcare absolută, dacă alăturăm forţelor realmente aplicate forţele de inerţie de antrenare şi forţele centrifuge compuse. Ori, cele din urmă sunt nule, mişcarea sistemului de axe $Gx'y'z'$ fiind o translaţie, iar forţele de inerţie de antrenare, fiind toate paralele, de acelaşi sens şi proporţionale cu massele punctelor, dau o rezultantă care trece prin punctul G. Aşa dar, mişcarea relativă a solidului în jurul lui G poate fi tratată ca o mişcare absolută, sub simplul efect al forţelor realmente aplicate.

Dacă s'ar lua un alt punct în loc de G — căci mişcarea solidului în spaţiu rezultă dintr'o translaţie identică cu mişcarea unuia oarecare din punctele sale şi dintr'o rotaţie în jurul acestui punct — atunci rezultanta forţelor de inerţie de antrenare n'ar trece prin acel punct şi ar trebui să se ţină seama de ea. *De aci, interesul alegerii lui G, pe lângă acela pe care îl prezintă utilizarea ecuaţiilor* (1).

zând decât de a, b, c și corespunzând ecuațiilor care ne dau mișcarea în vid a unui punct de massă M supus acțiunei greutății. Traectoria centrului de greutate va fi deci o parabolă. Apoi, în ecuațiile (2) va trebui să facem pe L, M, N egali cu zero, căci singura forță care lucrează asupra solidului este greutatea sa, aplicată în G. Vom fi deci în cazul mișcării unui solid supus la forțe care admit o rezultantă trecând prin punctul fix, problemă care a fost studiată.

VI. EFECTUL PERCUŢIILOR ASUPRA UNUI SOLID IN MIŞCARE.

I. TEORIA PERCUŢIILOR.

1. Fie M un punct material liber, de massă m, mişcându-se în linie dreaptă sub acţiunea unei forţe F. Creşterea pe care o dă forţa vitezei şi deci cantităţei de mişcare a punctului într'un interval de timp dt, este infinit de mică potrivit egalităţei

$$m\,dv = \mathrm{F}\,dt \qquad \text{sau} \qquad d.\,mv = \mathrm{F}\,dt\,.$$

Să considerăm un interval de timp θ, care fără a fi infinit de mic să fie totuşi foarte mic, egal spre exemplu cu a suta parte dintr'o secundă. Fie v viteza punctului în momentul t, pe care să-l luăm ca moment iniţial, şi u noua valoare a vitezei după timpul θ. Avem

$$\Delta\,.\,mv = mu - mv = \int_0^\theta \mathrm{F}\,dt\,.$$

Membrul al doilea este o cantitate foarte mică, căci, însemnând prin F′ valoarea mijlocie a lui F în intervalul de timp dela o la θ, avem destul de aproximativ

$$\int_0^\theta \mathrm{F}\,dt = \mathrm{F}'.\,\theta\,.$$

Să presupunem însă că forţa F conservă o valoare foarte mare în tot intervalul de timp considerat. Atunci valoarea sa mijlocie F′ va fi tot foarte mare şi productul $\mathrm{F}'\theta$ va dobândi o valoare finită, în raport bine înţeles cu mărimea lui F. In asemenea caz, variaţia cantităţii de mişcare a punctului va fi

deci finită şi se va zice că, în intervalul de timp θ, *punctul a primit o percuţie* P definită prin egalitatea

$$P = \int_0^\theta F\,dt\,.$$

Vom admite totdeauna că, în intervalul de timp considerat, *deplasarea punctului este neglijabilă.*

Iată un exemplu din care se poate vedea că asemenea ipoteză este admisibilă. Fie forţa, de direcţie constantă,

$$F = A\,\frac{t}{\theta}$$

care creşte uniform dela o la A când t creşte dela o la θ; să presupunem că ea lucrează asupra punctului M plecând din repaus. Cantitatea de mişcare dobândită de punct după timpul θ, va fi

$$mu = \int_0^\theta F\,dt = \frac{1}{2}\,A\,\theta\,.$$

Dacă A este destul de mare, se înţelege că productul $A\theta$ poate dobândi ori ce valoare finită.

Spaţiul s parcurs în acelaşi timp, rezultă din relaţia

$$m\,s = \int_0^\theta mu\;dt$$

care ne dă, înlocuind pe mu prin $\frac{1}{2}\,A\theta$,

$$m\,s = \frac{1}{2}\,A\,\theta^2$$

şi el este prin urmare foarte mic [1]).

2. Dacă în intervalul de timp θ, forţa F este variabilă şi ca intensitate şi ca direcţie, vom avea, proectând pe trei axe cordonate,

---

[1]) Astfel izbind o bilă de biliard cu tacul, putem considera bila ca şi imobilă pe timpul θ cât durează izbirea. După acest scurt interval de timp, centrul de greutate al bilei va dobândi o viteză finită, bila rostogolindu-se pe postavul biliardului aşa după cum se va arăta la capitolul următor al *Mişcării solidelor naturale.*

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta \,.\, m \dfrac{dx}{dt} = m\, u_x - m\, v_x = \displaystyle\int_0^\theta X\, dt \\ \Delta \,.\, m \dfrac{dy}{dt} = m\, u_y - m\, v_y = \displaystyle\int_0^\theta Y\, dt \\ \Delta \,.\, m \dfrac{dz}{dt} = m\, u_z - m\, v_z = \displaystyle\int_0^\theta Z\, dt \end{cases}$$

X, Y, Z fiind componentele forţei F, *mv* cantitatea de mişcare a punctului în momentul iniţial şi *mu* cantitatea sa de mişcare după timpul θ. Formulele (1) exprimă că cele trei integrale

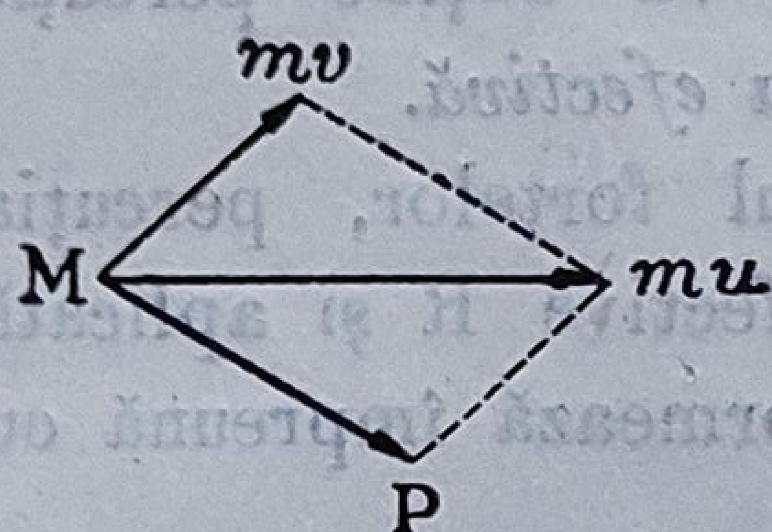


Fig. 204

$$P_x = \int_0^\theta X\, dt,\; P_y = \int_0^\theta Y\, dt,\; P_z = \int_0^\theta Z\, dt$$

corespund unui vector P, egal cu diferenţa geometrică a vectoarelor *mu* şi *mv*. Percuţiile pot fi deci reprezentate prin vectoare, ca şi forţele, putându-li-se aplica în consecinţă toate regulele de compunere ale acestora.

3. **Problema percuţiilor pentru un punct material.** Fie un punct material liber asupra căruia lucrează diferite forţe ordinare. Intr'un anumit moment al mişcării, când punctul ocupă o poziţie M şi este animat de o viteză *v*, intervine o forţă foarte mare F care lucrează asupra punctului numai un timp θ foarte scurt. Presupunând că în timpul θ punctul nu schimbă sensibil de poziţie, se cere noua viteză *u* cu care punctul îşi va continua mişcarea cu începere din M, sub acţiunea forţelor ordinare ce-i rămân aplicate.

Problema se rezolvă în felul următor:

1º Se neglijează, în intervalul de timp θ cât durează percuţia, acţiunea forţelor ordinare faţă de aceea a forţei F;

2º Se calculează cele trei integrale din formulele (1) care determină pe P;

3º Se compune însfârşit vectorul P cu vectorul *mv*, obţi-

nându-se prin aceasta cantitatea de mişcare mu şi prin urmare valoarea u a vitezei căutate.

Punct supus la legături. Dacă punctul este obligat, spre exemplu, de a rămâne pe o suprafaţă, atunci percuţia dată P ocazionează din partea suprafeţii o acţiune normală tot de percuţie P′ şi aşa fel că rezultanta R a celor două percuţii P şi P′ este tangentă suprafeţei. Odată calculat P, se va proecta prin urmare acest vector pe planul tangent suprafeţii în M şi se va obţine percuţia R care va fi *percuţia efectivă*.

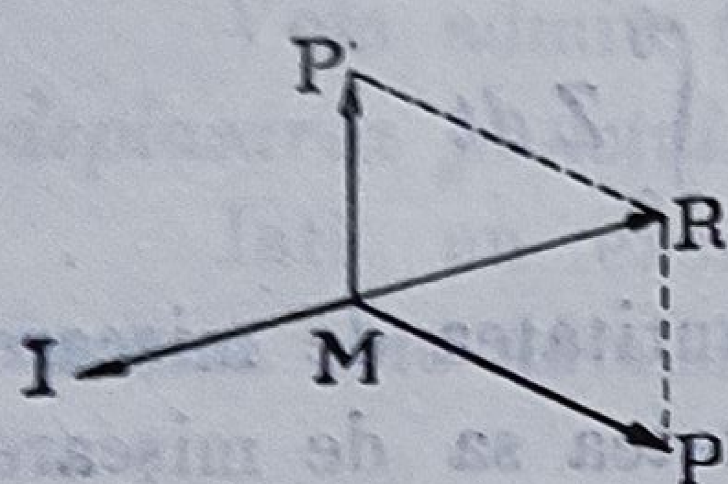


Fig. 205

Ca şi în cazul forţelor, percuţia fictivă I, egală şi direct opusă percuţiei efective R şi aplicată în M, este zisă *percuţie de inerţie;* ea formează împreună cu P şi P′ un sistem de percuţii în echilibru.

Componentele percuţiei de inerţie sunt:

$$-\Delta . m \frac{dx}{dt}, \quad -\Delta . m \frac{dy}{dt}, \quad -\Delta . m \frac{dz}{dt}.$$

4. Percuţii aplicate unui sistem de puncte materiale. Să presupunem că punctele unui sistem material, sau numai o parte din ele, sunt supuse la percuţii de durate care pot fi diferite însă toate foarte mici.

Teorema I. ***Dacă se consideră centrul de greutate ca un punct având ca massă massa totală a sistemului, creşterea geometrică a cantităţii sale de mişcare este egală cu aceea pe care ar dobândi-o acest punct dacă toate percuţiile i-ar fi aplicate în mod echipolent.***

Din egalităţile (1) deducem, în adevăr,

$$\sum \Delta . m \frac{dx}{dt} = \sum \int_0^\theta X \, dt$$

sau

$$\Delta . \sum m \frac{dx}{dt} = \sum P_x$$

şi alte două ecuaţii analoage. Dar, însemnând prin a, b, c cor-

donatele centrului de greutate şi prin M massa sistemului, avem

$$Ma = \Sigma mx\,, \qquad Mb = \Sigma my\,, \qquad Mc = \Sigma mz$$

deci

$$\sum m\frac{dx}{dt} = M\frac{da}{dt}\,, \quad \sum m\frac{dy}{dt} = M\frac{db}{dt}\,, \quad \sum m\frac{dz}{dt} = M\frac{dc}{dt}$$

şi, în consecinţă,

$$\Delta.\, M\frac{da}{dt} = \Sigma\, P_x$$

$$(2) \qquad \Delta.\, M\frac{db}{dt} = \Sigma\, P_y$$

$$\Delta.\, M\frac{dc}{dt} = \Sigma\, P_z\,.$$

Cele 3 componente ale creşterii de viteză ce dobândeşte centrul de greutate prin efectul percuţiilor, vor avea deci ca valori

$$\frac{\Sigma\, Px}{M}\,, \quad \frac{\Sigma\, Py}{M}\,, \quad \frac{\Sigma\, Pz}{M}\,.$$

Teorema II. ***Creşterea geometrică a momentului rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de un ax, este egală cu momentul rezultant al percuţiilor în raport de acelaşi ax.***

Tot din egalităţile (1) deducem, în adevăr,

$$\sum\left(y\,\Delta.\, m\frac{dx}{dt} - z\,\Delta.\, m\frac{dy}{dt}\right) = \sum\left(y\int_0^\theta Z\,dt - z\int_0^\theta Y\,dt\right)$$

sau, *pentru că creşterile cordonatelor* y, z *sunt neglijabile*, adică socotind pe y şi z ca pe nişte constante în intervalul de timp dela o la θ, însă bine înţeles nu şi pe derivatele lor,

$$\Delta.\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \sum\left(y\,P_z - z\,P_y\right).$$

Dacă axul considerat a fost luat ca ax Ox al unui sistem de axe dreptunghiulare, egalitatea precedentă corespunde tocmai enunţului teoremei în chestiune.

In raport de trei axe cordonate, avem în acelaşi timp,

$$\Delta . \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum \left(y P_z - z P_y \right)$$

$$(3) \quad \Delta . \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \sum \left(z P_x - x P_z \right)$$

$$\Delta . \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \left(x P_y - y P_x \right)$$

şi aceste ecuaţii exprimă că *creşterea geometrică a momentului rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de origina sistemului* (care poate fi un punct arbitrar) *este egală cu momentul rezultant al percuţiilor în raport de acel punct.*

5. ***Notă.*** Din cele de mai sus se vede că teoremele I şi II se deduc din teoremele generale ale Dinamicei ce le corespund, înlocuind în acestea din urmă notaţiunea $\frac{d}{dt}$ prin Δ iar forţele prin percuţii.

Făcând aceiaşi înlocuire în ecuaţia generală a Dinamicei, se obţine

$$(4) \quad \sum \left[\left(P_x - \Delta . m \frac{dx}{dt} \right) \delta x + \left(P_y - \Delta . m \frac{dy}{dt} \right) \delta y + \left(P_z - \Delta . m \frac{dz}{dt} \right) \delta z \right] = 0 .$$

Această ecuaţie poate fi de altfel obţinută în mod direct, în felul următor:

Ecuaţia generală a Dinamicei

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0$$

în care X, Y, Z reprezintă numai forţe de percuţii (cele ordinare fiind neglijabile) având loc în tot intervalul de timp dela o la θ, poate fi înmulţită cu dt şi integratădela o la θ [1]).

---

[1]) Tot aşa după cum, spre exemplu, ecuaţia $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$ se înmulţeşte cu dt şi se integrează, obţinându-se

$$\Delta . m \frac{dx}{dt} = \int_0^\theta X \, dt.$$

Cum, în intervalul de timp considerat, cordonatele x, y, z, ... se presupune că rămân constante, variaţiile δx, δy, δz, ... care rezultă din ecuaţiile de legătură de forma $f(x, y, z, \ldots, t) = 0$ vor trebui privite şi ele tot ca constante. In consecinţă, rerezultatul integraţiunei va fi

$$\Sigma\left[\left(\int_0^\theta X dt - \Delta . m \frac{dx}{dt}\right)\delta x + \left(\int_0^\theta Y dt - \Delta . m \frac{dy}{dt}\right)\delta y + \left(\int_0^\theta Z dz - \Delta . m \frac{dz}{dt}\right)\delta z\right] = 0$$

adică tocmai ecuaţia (4).

II. EFECTUL PERCUŢIILOR ASUPRA UNUI SOLID CARE SE ÎNVÂRTEŞTE IN JURUL UNUI AX FIX.

Percuţiile aplicate unui solid care se învârteşte în jurul unui ax fix, au ca efect de a da solidului o creştere bruscă de viteză unghiulară, $\Delta \omega$, precum şi de a determina asupra axului de rotaţie două percuţii aplicate în cele două puncte fixe ale acestui ax [1].

1. **Calculul lui $\Delta \omega$.** Fie I momentul de inerţie al solidului în raport de axul de rotaţie şi **N** momentul rezultant al percuţiilor aplicate solidului în raport de acelaşi ax. Ştim că momentul rezultant al cantităţilor de mişcare în raport de axul de rotaţie este egal cu $I\omega$.
Aplicaţiunea teoremei II ne dă imediat

$$\Delta . I\omega = N \quad \text{sau} \quad I . \Delta\omega = N$$

de unde

$$\Delta\omega = \frac{N}{I} . \tag{1}$$

Aşa dar: *Creşterea vitezei unghiulare de rotaţie se obţine, divizând momentul rezultant al percuţiilor, în raport de axul de rotaţie, prin momentul de inerţie al solidului în raport de acelaşi ax.*

---

[1]) Fie care din punctele solidului dobândind o creştere a cantităţii sale de mişcare egală cu $m\,r.\,\Delta\omega$, r fiind depărtarea punctului de ax, trebue considerat ca supus unei percuţii echivalente.

2. Calculul percuţiilor determinate asupra axului de rotaţie. Vom presupune că solidul este supus unei singure percuţii P.

Fie O_1 şi O_2 cele două puncte fixe ale axului de rotaţie, pe care să-l luăm ca ax Oz al unui sistem dreptunghiular $Oxyz$. Pentru simplicitatea formulelor, vom alege axul Ox astfel ca în momentul considerat planul xOz să treacă prin centrul de greutate G al solidului, origina O a lui Ox fiind pe de altă parte aleasă aşa fel ca acest ax să treacă prin punctul A unde percuţia dată P întâlneşte planul xOz.

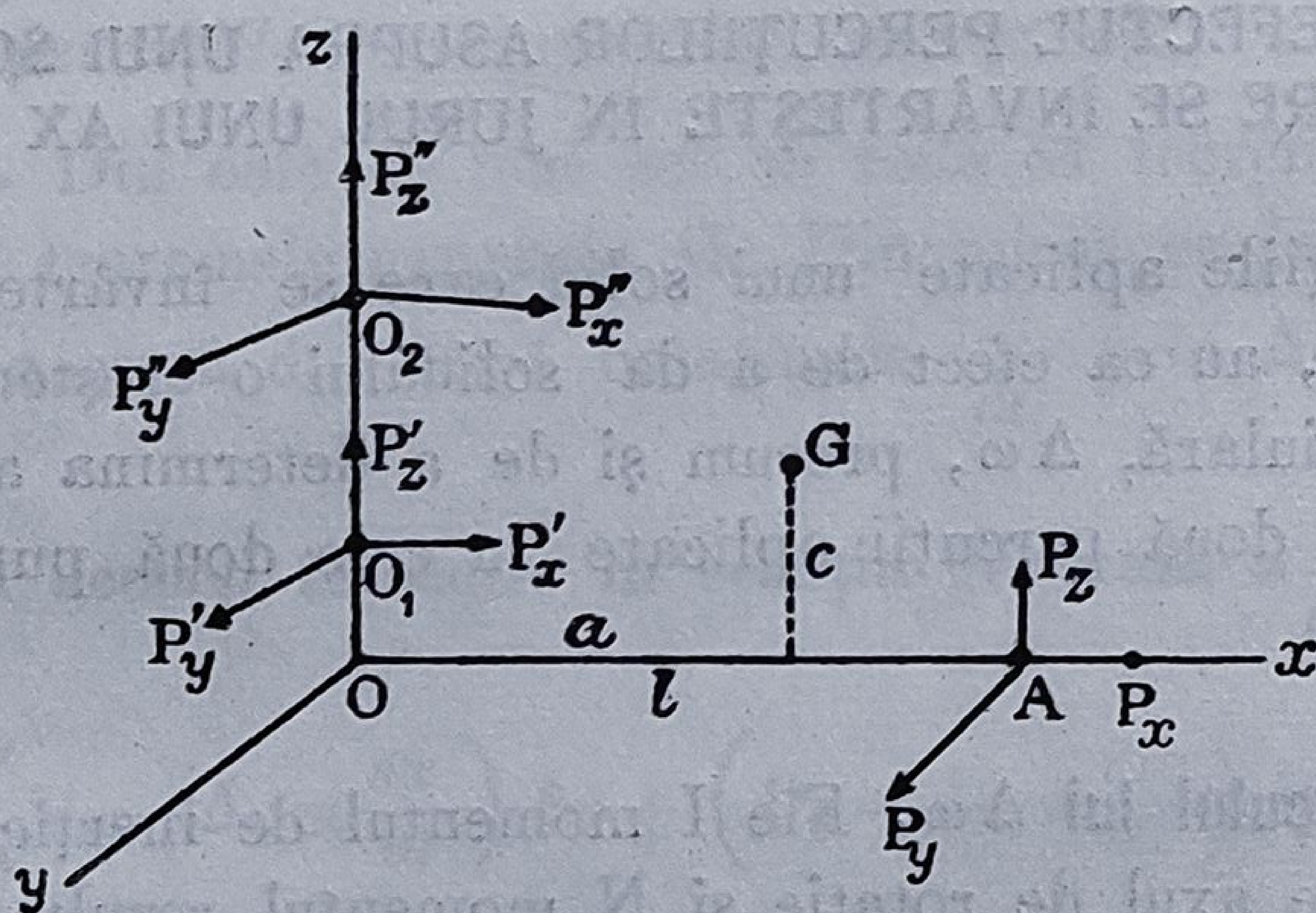


Fig. 206

Fie P′ şi P″ percuţiile de legătură, adică acţiunile de percuţie ale celor două puncte fixe O_1 şi O_2 asupra solidului. Percuţiile căutate sunt egale şi direct opuse percuţiilor P′ şi P″. Să le calculăm pe acestea din urmă.

Potrivit principiului lui d'Alembert, există echilibru între percuţia dată P, percuţiile de legătură P′, P″ şi percuţiile de inerţie. Dacă prin urmare însemnăm prin P_x, P_y, P_z; P'_x, P'_y, P'_z; P''_x, P''_y, P''_z componentele percuţiilor P, P′, P″; prin Q_x, Q_y, Q_z componentele vectorului rezultant al percuţiilor de inerţie şi prin L, M, N componentele momentului rezultant în raport de O al acestor percuţii; prin l distanţa OA şi prin h_1, h_2 distanţele OO_1, OO_2; avem următoarele 6 ecuaţii de echilibru:

$$(2)\quad \begin{cases} P_x + P'_x + P''_x + Q_x = 0 \\ P_y + P'_y + P''_y + Q_y = 0 \\ P_z + P'_z + P''_z + Q_z = 0 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} -h_1 P'_y - h_2 P''_y + L = 0 \\ -l P_z + h_1 P'_x + h_2 P''_x + M = 0 \\ l P_y + N = 0 . \end{cases}$$

a). *Componentele* Q_x, Q_y, Q_z. Aceste componente au ca expresiuni:

$$Q_x = -\Delta . \Sigma m \frac{dx}{dt}, \quad Q_y = -\Delta . \Sigma m \frac{dy}{dt}, \quad Q_z = -\Delta . \Sigma m \frac{dz}{dt} .$$

Ori, însemnând prin ω viteza unghiulară de rotaţie, avem

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y , \quad \frac{dy}{dt} = \omega x , \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

deci

$$Q_x = \Delta\omega \, \Sigma my , \quad Q_y = -\Delta\omega \, \Sigma mx , \quad Q_z = 0 .$$

Cum însă, prin ipoteză, centrul de greutate al solidului este coprins în planul xOz, avem însemnând prin a absciss a acestui punct şi prin M massa sistemului,

$$\Sigma my = 0 , \quad \Sigma mx = Ma .$$

In consecinţă

$$Q_x = 0 , \quad Q_y = -Ma\,\Delta\omega , \quad Q_z = 0 .$$

Vectorul rezultant al percuţiilor de inerţie este deci perpendicular pe planul xOz şi egal ca mărime cu $Ma\,\Delta\omega$.

b). *Componentele* L, M, N. Componentele percuţiei de inerţie dintr'un punct x, y, z fiind

$$-\Delta . m \frac{dx}{dt} , \quad -\Delta . m \frac{dy}{dt} , \quad -\Delta . m \frac{dz}{dt}$$

adică

$$my\,\Delta\omega , \quad -mx\,\Delta\omega , \quad 0$$

componentele momentului acestei percuţii în raport de O sunt

$$mxz\,\Delta\omega\,, \quad myz\,\Delta\omega\,, \quad -m\,(x^2+y^2)\,\Delta\omega\,.$$

Deducem, pentru componentele momentului rezultant,

$$L = \Delta\omega\,\Sigma mxz\,, \qquad M = \Delta\omega\,\Sigma myz\,, \qquad N = -\,I\,\Delta\omega$$

însemnând prin I momentul de inerţie al solidului în raport de axul de rotaţie.

c). Inlocuind în ecuaţiile (2) şi (3) pe Q_x, Q_y, Q_z şi L, M, N prin valorile lor, obţinem

$$(4)\quad \begin{cases} P_x + P'_x + P''_x = 0 \\ P_y + P'_y + P''_y - Ma\,\Delta\omega = 0 \\ P_z + P'_z + P''_z = 0 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} -h_1\,P'_y - h_2\,P''_y + \Delta\omega\,\Sigma mxz = 0 \\ -l\,P_z + h_1\,P'_x + h_2\,P''_x + \Delta\omega\,\Sigma myz = 0 \\ l\,P_y - I\,\Delta\omega = 0\,. \end{cases}$$

Ecuaţia a şeasea dă creşterea de viteză unghiulară $\Delta\omega$; a treia dă suma $P'_z + P''_z$ iar celelalte patru procură valorile componentelor P'_x, P'_y, P''_x, P''_y.

3. **Condiţii pentru ca axul să nu sufere nici o percuţie.** Trebue pentru aceasta ca cele şease ecuaţii precedente să fie satisfăcute când facem în ele pe P'_x, P'_y, P'_z şi P''_x, P''_y, P''_z egali cu zero. Ori, ele devin atunci,

$$(6)\quad P_x = 0\,, \qquad P_y = Ma\,\Delta\omega\,, \qquad P_z = 0$$

$$(7)\quad \Sigma mxz = 0\,, \qquad \Sigma myz = 0\,, \qquad P_y = \frac{I}{l}\,\Delta\omega\,.$$

Condiţiile $P_x = 0$, $P_z = 0$ exprimă că percuţia dată P trebue să fie normală planului xOz.

Egalităţile $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$ exprimă că axul Oz este ax principal de inerţie pentru punctul O.

Cât priveşte celelalte două ecuaţii

$$P_y = Ma\,\Delta\omega, \qquad P_y = \frac{I}{l}\,\Delta\omega$$

ele ne dau, prin eliminarea simultană a lui P_y şi a lui $\Delta\omega$, relaţia

$$Ma = \frac{I}{l} \quad \text{de unde} \quad l = \frac{I}{Ma}.$$

Expresia distanţei l este, după cum se vede, aceiaşi ca expresia lungimii pendulului sincron al unui pendul compus.

Cu această valoare pentru l, ambele ecuaţii de mai sus ne dau pentru creşterea de viteză unghiulară $\Delta\omega$ aceiaşi valoare şi anume $\Delta\omega = \frac{P_y}{Ma}$.

In rezumat, pentru ca axul da rotaţie să nu sufere nici o percuţie este necesar şi suficient:

1° ca percuţia aplicată solidului să fie perpendiculară pe planul care trece prin axul de rotaţie şi centrul de greutate;

2° ca axul de rotaţie să fie ax principal de inerţie pentru punctul unde el întâlneşte planul perpendicular dus prin direcţia percuţiei;

3° ca percuţia să lucreze la distanţa $l = \frac{I}{Ma}$ de axul de rotaţie.

In asemenea condiţiuni, punctul A, unde direcţia percuţiei întâlneşte planul dus prin axul de rotaţie şi centrul de greutate, se numeşte *centru de percuţie*.

Aplicaţie. *Fie o bară omogenă cilindrică, susţinută orizontal de mână şi putând a se învârti în jurul axului orizontal proectat în O, de unde o ţine mâna. Se aplică barei o percuţie P. Se întreabă, în ce condiţii nu va suferi mâna nici-o izbire de pe urma acestei percuţii?*

Răspuns:

1° Trebue ca percuţia P să fie perpendiculară pe planul care trece prin axul orizontal proectat în O şi prin centrul de greutate G al barei, deci să fie o percuţie verticală;

2°. Axul de rotaţie proectat în O este principal de inerţie pentru punctul O situat pe axul barei[1]); trebue deci ca percuţia verticală P să întâlnească acest ax. Fie A punctul de întâlnire;

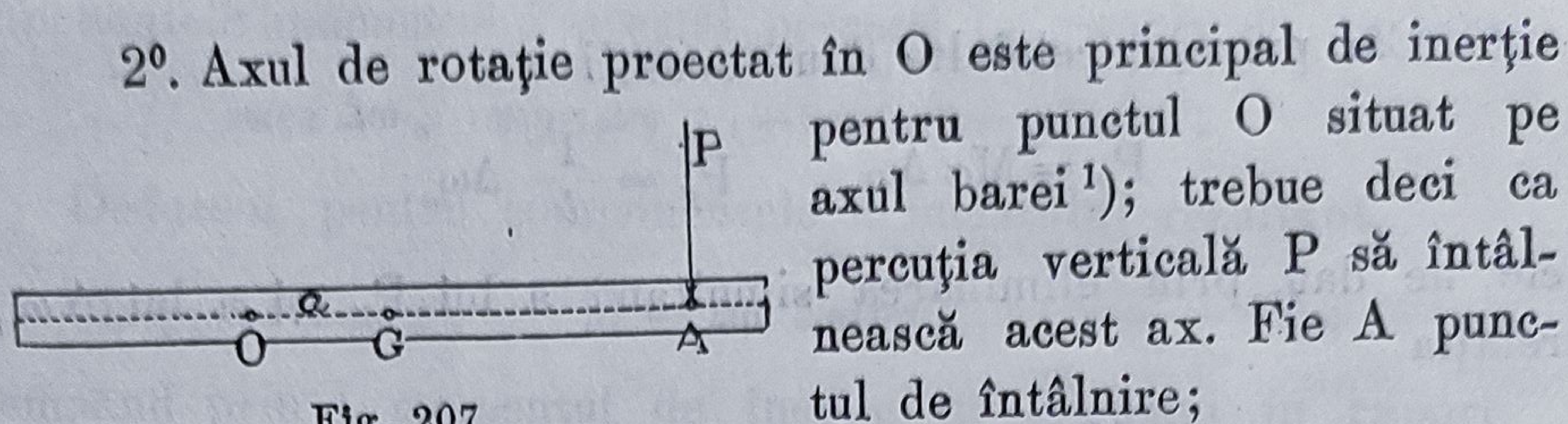


Fig. 207

3° Trebue însfârşit ca punctul A să fie situat dincolo de centrul de greutate G al barei şi anume la depărtarea $l = \frac{I}{Ma}$ de punctul O; I fiind momentul de inerţie al barei în raport de axul de rotaţie O, M massa barei şi a distanţa OG.

Dacă însemnăm prin K raza de giraţie corespunzătoare momentului de inerţie în raport de axul dus prin G paralel axului de rotaţie, ştim că avem

$$I = MK^2 + Ma^2 = M\,(K^2 + a^2).$$

Putem deci scrie

$$l = \frac{I}{Ma} = a + \frac{K^2}{a}$$

$\frac{K^2}{a}$ reprezentând prin urmare lungimea GA.

Rolul punctelor O şi A poate fi inversat, adică putem susţine bara în A şi aplica percuţia în O; mâna nu va suferi nici atunci vre-o izbire.

In adevăr, noua lungime l' privitoare cazului când axul de rotaţie este în A, fiind dată de formula

$$l' = a' + \frac{K^2}{a'}$$

unde a' reprezintă distanţa GA, egală după cum s'a spus cu $\frac{K^2}{a}$, avem

$$l' = \frac{K^2}{a} + K^2 . \frac{a}{K^2} = a + \frac{K^2}{a}$$

deci $l' = l$.

Să observăm însfârşit, că dacă punem GA $= d$, avem

$$a\,d = K^2.$$

[1]) Pag. 318 litera b) sau c).

III. EFECTUL PERCUŢIILOR ASUPRA UNUI SOLID CARE SE ÎNVÂRTEŞTE IN JURUL UNUI PUNCT FIX.

1. Să presupunem solidul în repaus. Sub acţiunea percuţiilor, el va dobândi o viteză unghiulară ω în jurul unui anumit ax instantaneu trecând prin punctul fix. Trebue să determinăm poziţia acestui ax şi valoarea lui ω.

Pentru aceasta va fi suficient să aplicăm teorema II exprimând că, în raport de punctul fix, momentul rezultant al cantităţilor de mişcare dobândite este egal cu momentul rezultant al percuţiilor.

Fie A, B, C momentele de inerţie principale ale solidului pentru punctul fix; p, q, r componentele lui ω pe cele trei axe ale elipsoidului de inerţie şi L, M, N componentele pe aceleaşi axe ale momentului rezultant al percuţiilor.

Ştim că proecţiile momentului rezultant al cantităţilor de mişcare pe axele considerate sunt egale cu Ap, Bq, Cr. Avem deci egalităţile

$$(1) \qquad Ap = L, \qquad Bq = M, \qquad Cr = N.$$

Aceste ecuaţii ne dau soluţia chestiunei, căci ele determină componentele p, q, r ale vectorului rotaţiei şi prin urmare atât pe ω cât şi poziţia axului instantaneu.

Dacă solidul nu pleacă din repaus, ecuaţiile (1) au forma

$$A.\Delta p = L, \qquad B.\Delta q = M, \qquad C.\Delta r = N$$

Δp, Δq, Δr fiind creşterile geometrice ale componentelor p, q, r ale vectorului rotaţiei instantanee iniţiale.

2. **Teoremă**. ***Când unui solid, care are un punct fix şi este în stare de repaus, i se aplică percuţii, axul rotaţiei instantanee ce dobândeşte este diametrul conjugat, în elipsoidul de inerţie, al planului dus prin punctul fix perpendicular pe momentul rezultant al percuţiilor în raport de acest punct.***

In adevăr, ecuaţia planului dus prin origina axelor cordonate (punctul fix) perpendicular pe vectorul L, M, N fiind

$$LX + MY + NZ = 0$$

iar elipsoidul de inerţie având ca ecuaţie

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

cosinusurile directoare ale diametrului conjugat în chestiune sunt proporţionale cu $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$ şi deci cu p, q, r potrivit egalităţilor (1).

3. **Notă**. Teoria percuţiilor este o teorie aproximativă, care se sprijină pe presupunerea că pe timpul duratei percuţiilor deplasarea corpului e neglijabilă. Această teorie nu se poate deci aplica unui giroscop animat de o foarte mare viteză de rotaţie. Astfel, o percuţie aplicată giroscopului poate să nu schimbe direcţia axului său de rotaţie.

IV. EFECTUL PERCUŢIILOR ASUPRA UNUI SOLID LIBER.

In cazul unui solid liber, se determină mai întâi creşterea geometrică a vitezei pe care o dobândeşte centrul de greutate al solidului prin efectul percuţiilor, apoi rotaţia instantanee a solidului în jurul centrului de greutate considerat ca fix.

Presupunând că solidul ar pleca din repaus, aplicaţia formulelor (2) dela teorema I ne dă

$$M \frac{da}{dt} = \sum P_x , \quad M \frac{db}{dt} = \sum P_y , \quad M \frac{dc}{dt} = \sum P_z$$

ecuaţii care determină componentele vitezei ce dobândeşte centrul de greutate.

Raportând mişcarea relativă a solidului, în jurul centrului de greutate, la trei axe cordonate de direcţii invariabile trecând prin acest punct, poziţia axului instantaneu şi viteza unghiulară a rotaţiei nu vor depinde decât de percuţiile aplicate solidului. Determinarea acestor elemente se va face deci ca la capitolul precedent.

Exemplu. *Un elipsoid omogen şi greu, cu unul din axe vertical, este supus unei percuţii* P *conţinută în planul orizontal care*

trece prin centrul său. Să se determine mişcarea pe care o imprimă elipsoidului percuţia dată, presupunând că elipsoidul se găsea în stare de repaus.

Elipsoidul fiind omogen, cele trei axe ale sale sunt principale de inerţie pentru centrul său O care este şi centru de greutate.

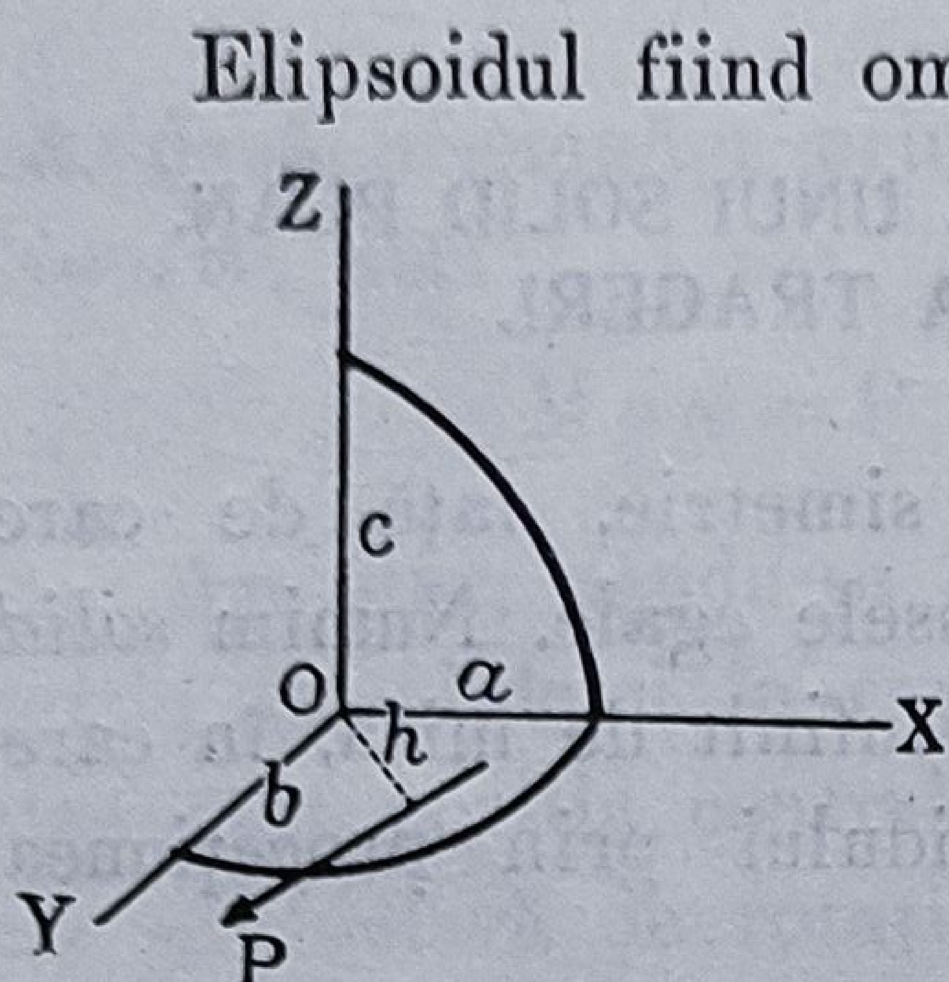


Fig. 208

Viteza V pe care o dobândeşte centrul de greutate prin efectul percuţiei, rezultă după cum ştim din egalitatea

$$MV = P$$

în care se va face

$$M = \frac{4}{3} \pi abc \,.\, \rho$$

ρ fiind densitatea. Centrul de greutate va dobândi deci o viteză orizontală în direcţia percuţiei.

In cât priveşte mişcarea relativă în jurul punctului O, ştim că componentele p, q, r ale vectorului rotaţiei instantanee sunt date de formulele

$$p = \frac{L}{A}\,, \qquad q = \frac{M}{B}\,, \qquad r = \frac{N}{C}\,.$$

Insă, în exemplul considerat, L şi M sunt nuli iar N este egal cu Ph, însemnând prin h distanţa dela O la vectorul P Aşa dar

$$p = 0\,, \qquad q = 0\,, \qquad r = \frac{Ph}{C}\,.$$

Axul instantaneu este deci axul OZ

După încetarea percuţiei, centrul de greutate, găsindu-se animat de viteza V şi solidul fiind abandonat greutăţii, va descrie o parabolă cu axul vertical.

Mişcarea în jurul centrului de greutate va fi aceea a unui solid în jurul unui punct fix, când rezultanta forţelor aplicate trece prin acest punct. Cum mişcarea dată de percuţia P este o rotaţie în jurul unui ax principal de inerţie, acest ax va deveni ax permanent de rotaţie.

In rezumat, centrul de greutate al elipsoidului va descrie,

ulterior percuţiei, o parabolă cu axul vertical, în timp ce elipsoidul se va învârti cu o viteză constantă în jurul axului său vertical care se va deplasa paralel cu el însuşi.

V. EFECTUL PERCUŢIILOR ASUPRA UNUI SOLID PLAN. PERCUŢIILE TUNURILOR LA TRAGERI.

Fie un solid având un plan de simetrie, faţă de care punctele solidului simetric aşezate au massele egale. Numim *solid plan* acest plan de simetrie cu grosime infinit de mică, în care presupunem concentrată toată massa solidului prin proecţiunea tuturor masselor pe suprafaţa lui.

Vom studia efectul percuţiilor aplicate unui solid plan în planul său. Acesta este unul din cazurile cele mai interesante ce se prezintă în practică. Astfel este, spre exemplu, cazul unui tun aşezat pe o platformă orizontală în poziţie de tragere şi supus percuţiei ce i-o imprimă gazele pulberii de încărcare. Efectul acestei percuţii asupra tunului întreg, va fi acela pe care îl imprimă percuţia, solidului plan la care reducem tunul.

1. Solid plan liber. Fie un solid plan, *în stare de repaus*, având centrul de greutate în G. Sub efectul unei percuţii P, solidul ia o mişcare elementară de rotaţie în jurul unui centru instantaneu O [1]). Viteza acestui centru fiind nulă cantitatea sa de mişcare este şi ea nulă. Punctul O ne suferind astfel nici-o percuţie, ştim că se găseşte pe perpendiculara ridicată din G pe direcţia percuţiei şi la o distanţă a de punctul G astfel încât

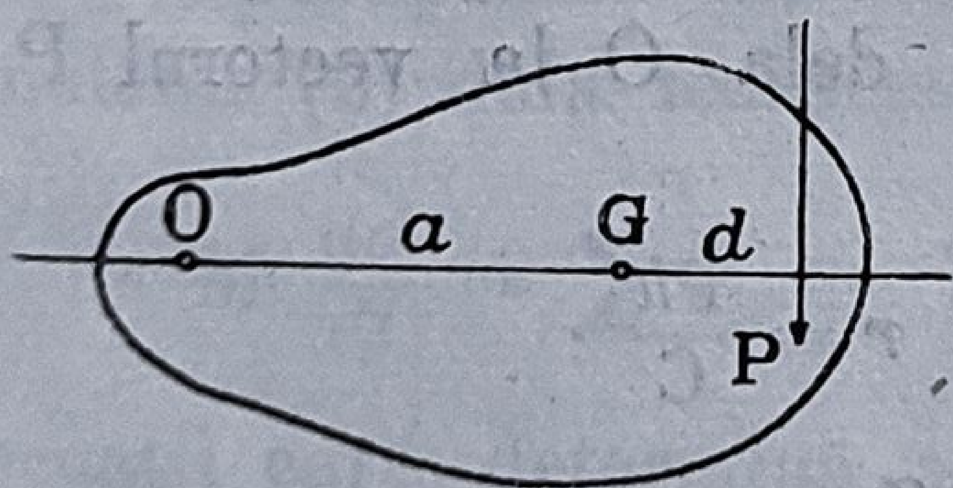


Fig. 209

$$a \cdot d = K^2$$

însemnând prin d depărtarea punctului G de percuţie şi prin K raza de giraţie corespunzătoare momentului de inerţie al solidului în raport de G.

---

[1]) *Cinematica*, pag. 102.

Pe de altă parte, mai știm că viteza V pe care o dobândește centrul de greutate G prin efectul percuției, rezultă din egalitatea

$$M . V = P$$

însă, dacă însemnăm prin ω viteza unghiulară a rotației, avem $V = a\omega$, deci

$$M a \omega = P \qquad \text{de unde} \qquad \omega = \frac{P}{Ma} .$$

Așa dar, dându-se centrul de greutate G, momentul de inerție al solidului în raport de G și percuția P, putem determina atât poziția centrului instantaneu de rotație O cât și viteza unghiulară de rotație ω [1]).

Notă. Din punctul G ca centru și cu raza de girație K, să descriem un cerc. Polara punctului O față de acest cerc, zis *cercul de inerție*, este dreapta CD. Ori, avem

$$\overline{CG}^2 = OG . IG \qquad \text{adică } K^2 = a . IG$$

și, cum $K^2 = a . d$, rezultă că IG este egal cu d.

Așa dar, simetrica polarei CD în raport de G, care este

[1]) Aceste elemente se puteau determina și pe baza celor expuse la capitolul precedent întitulat *Efectul percuțiilor asupra unui solid liber*. In adevăr, dacă în locul solidului din spațiu considerăm un solid din planul XGY, centrul de greutate fiind în origină, viteza V a acestui centru, paralelă cu direcția percuției, rezultă din egalitatea $MV = P$, iar valoarea vitezei unghiulare de rotație ω în jurul lui G, este dată de ecuația momentelor $I\omega = Pd$, în care I este momentul de inerție în raport de G, egal de altfel cu MK^2, K fiind raza de girație. Insă, în cazul de față, mișcarea de translație de viteză V a solidului plan compusă cu mișcarea de rotație de viteză unghiulară ω din jurul lui G, dau ca mișcare rezultantă o rotație de aceiași viteză unghiulară în jurul unui punct O situat pe perpendiculara coborâtă din G pe direcția percuției, la distanța $GO = a = \frac{V}{\omega}$ (*Cinematica* pag. 188). Cele 3 egalități:

$$MV = P, \qquad MK^2 \omega = Pd, \qquad a = \frac{V}{\omega}$$

ne dau imediat

$$Ma\omega = P, \qquad a . d = K^2$$

adică aceleași formule ca mai sus pentru determinarea lui ω și a lui a.

perpendiculara C′D′, reprezintă poziţia percuţiei P faţă de punctele O şi G.

Rezultă de aci un mijloc geometric de a determina poziţia punctului O când se dă G şi P, sau poziţia percuţiei P când se dă G şi O presupunând pe K cunoscut.

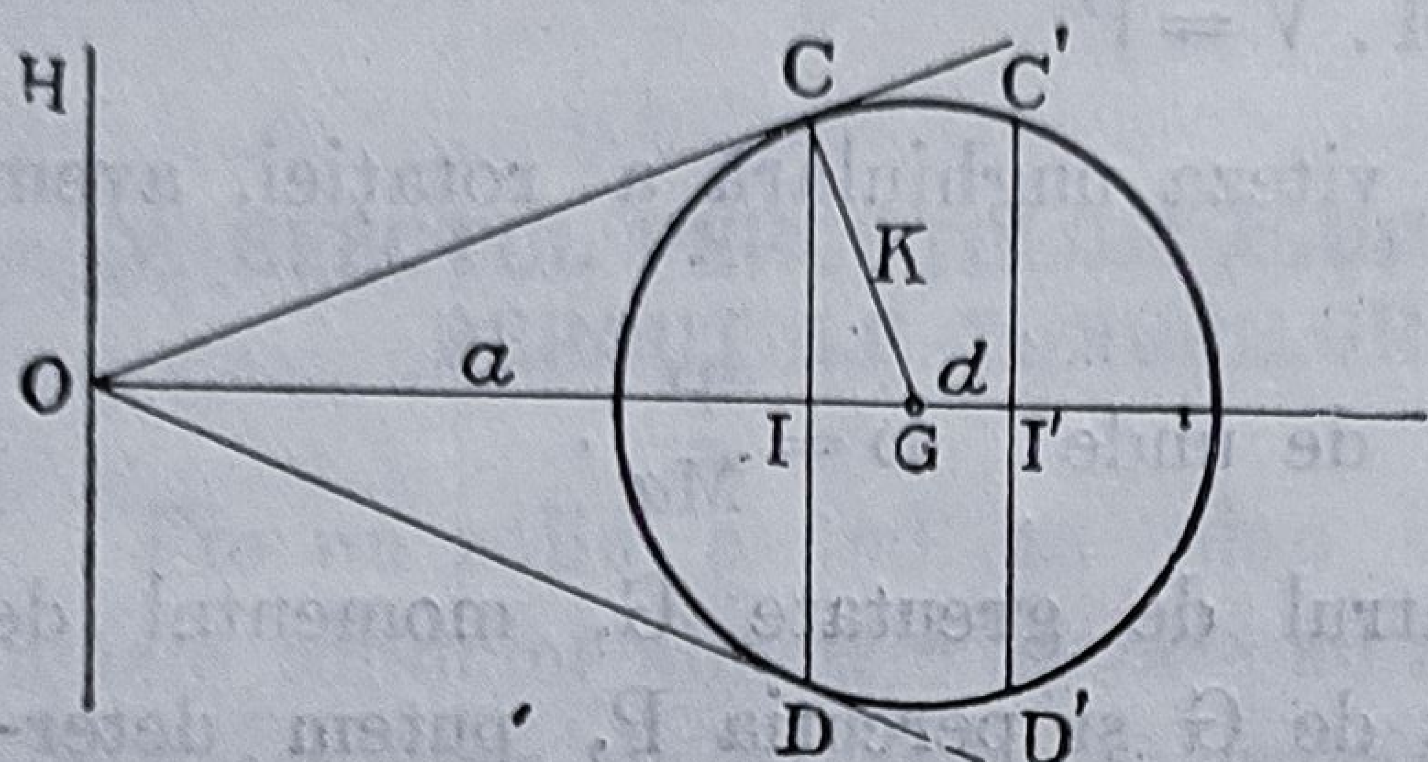


Fig. 210

Ştim pe de altă parte din Geometrie, că polara ori-cărui punct de pe perpendiculara OH trece prin punctul I, care este polul dreptei OH în cercul considerat. Ne vom servi la paragraful 4 de acest rezultat.

2. **Solid plan care are un punct fix.** Fie O punctul fix, G centrul de greutate al solidului şi P percuţia dată, aplicată pe direcţia SS′.

Ca şi în cazul forţelor ordinare, solidul îşi ia mişcarea sa liberă sub efectul percuţiei motrice, sau efective, care este rezultanta percuţiei direct aplicate P şi a acţiunii percuţiei punctului fix O asupra solidului, pe care să o numim P′. Direcţia acesteia din urmă trece neapărat prin punctul O.

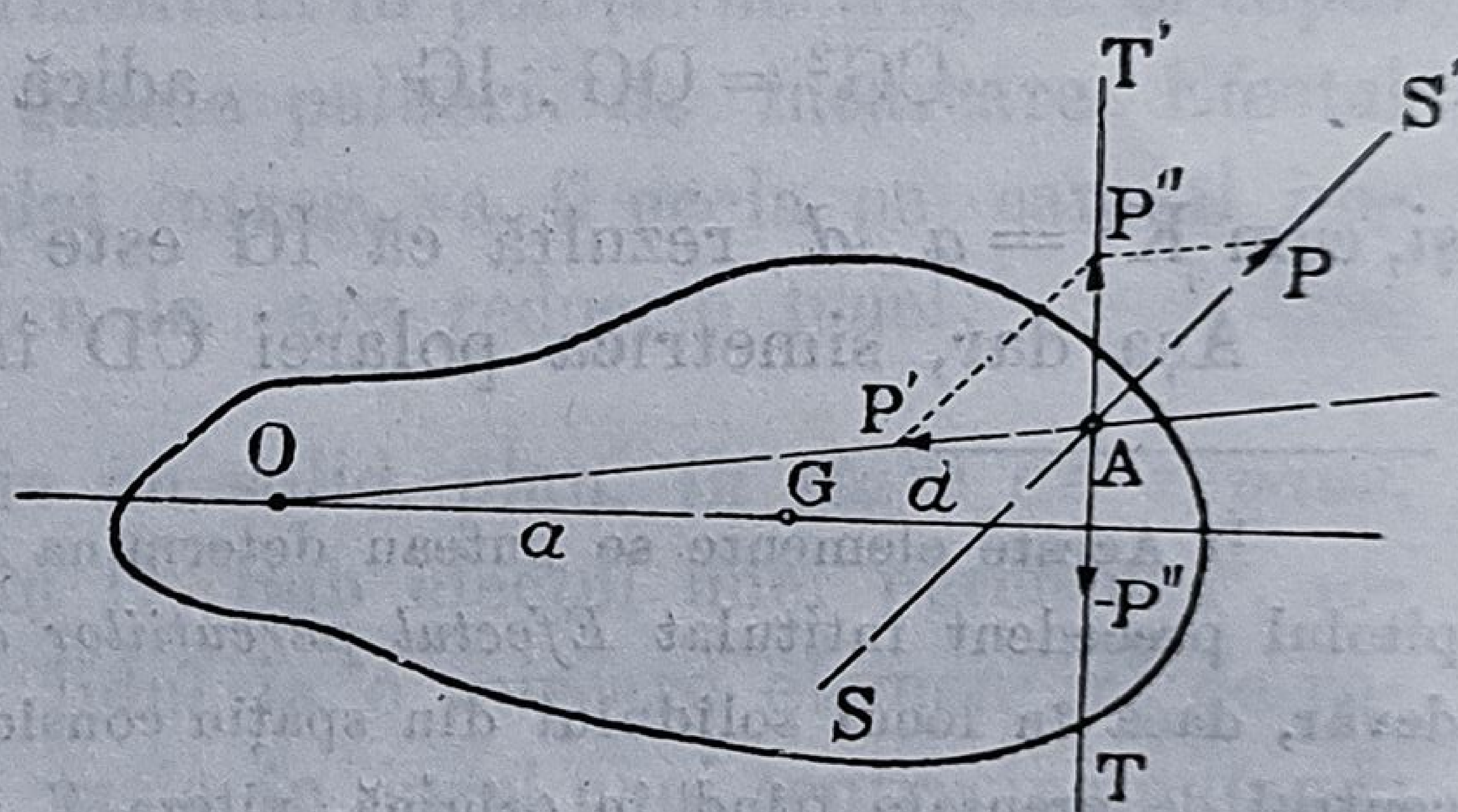


Fig. 211

Ori, percuţia efectivă ştim că este perpendiculară pe dreapta OG şi depărtată de punctul G de lungimea d egală cu $\frac{K^2}{a}$, adică este simetrica polarei punctului O în cercul de inerţie. Fie TT′ această dreaptă şi A punctul ei de intersecţie cu direcţia SS′ a percuţiei P.

Luând punctul A ca punct de aplicaţie al percuţiei P şi formând paralelogramul APP″P′A, obţinem atât percuţia P′ cât

şi percuţia efectivă P'', care este, după cum am spus, rezultanta percuţiilor P şi P'. Dealtfel, după cum ştim, avem

$$P'' = M a\omega \quad \text{şi prin urmare} \quad \omega = \frac{P''}{Ma} \cdot$$

Să mai observăm că percuţia de inerţie fiind percuţia — P'', egală şi direct opusă lui P'', potrivit principiului lui d'Alembert solidul poate fi considerat ca fiind în echilibru sub efectul celor 3 percuţii P, P' şi — P'' [1]).

3. **Solid plan cu diferite legături.** Metoda generală constă în aplicaţia principiului lui d'Alembert, scriind că există echilibru între percuţiile direct aplicate, percuţiile ocazionate de legături asupra solidului şi percuţiile de inerţie.

4. *Aplicaţiune.* **Percuţiile tunurilor la trageri.** Fie un tun în poziţie de tragere, aşezat pe o platformă orizontală de lemn, cu roţile împiedecate.

Gazele pulberii de încărcare dau ţevii tunului o percuţie P, a căreia linie de acţiune coincide cu axul ţevii. Această per-

---

[1]) Am fi putut ajunge la rezultatele precedente şi în mod analitic urmând metoda expusă la capitolul întitulat *Efectul percuţiilor asupra unui solid care se învârteşte în jurul unui ax fix.*

Potrivit acelei metode, luând sistemul dreptunghiular xOy aşa după cum arată figura alăturată, avem cele 3 ecuaţii

$$P_x + P'_x - P''_x = o, \qquad P_y + P'_y - P''_y = o,$$

$$I\omega = l P_y$$

I fiind momentul de inerţie al solidului în raport de O, egal de altfel cu $M(a^2 + K^2)$. Însă

$$P''_x = \Sigma m \frac{dx}{dt} = -\omega \Sigma my = - M b\omega = o,$$ ordonata b a lui G fiind nulă, iar

$$P''_y = \Sigma m \frac{dy}{dt} = \omega \Sigma mx = Ma\,\omega.$$ Deci $P'' = Ma\omega$,

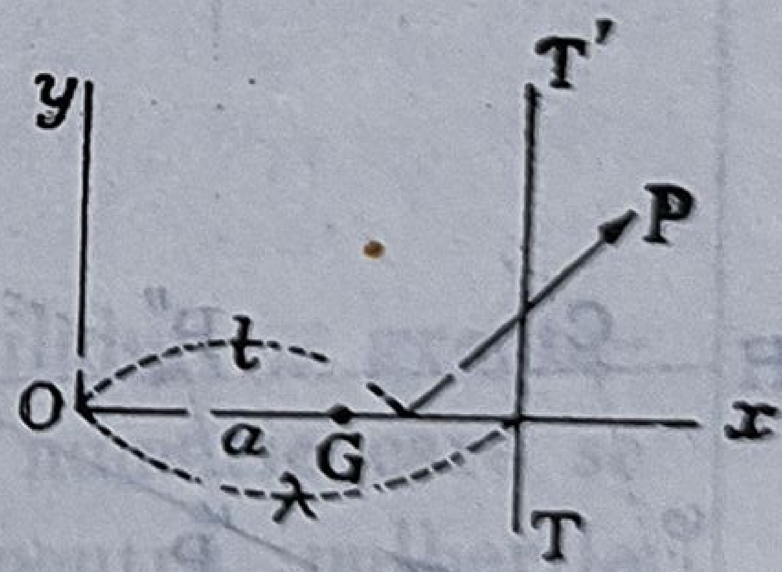


Fig. 212

şi pe de altă parte, cum momentele celor două percuţii P şi P'' sunt egale de oare-ce percuţia P' trecând prin O are momentul său nul, avem $I\omega = lP_y = Ma\,\omega\lambda$, aşa că, în definitiv

$$P'_x = - P_x, \qquad P'_y = M a\omega - P_y, \qquad \lambda = \frac{I}{Ma} = a + \frac{K^2}{a}$$

$$\omega = \frac{l\,P_y}{I} = \frac{P''}{Ma}.$$

cuţie se transmite întregului sistem format de ţeavă, afet şi roate şi dă tunului o mişcare de recul. Presupunând afetul rigid, tunul constitue atunci un solid invariabil. Solidul plan, la care reducem tunul, fiind o porţiune din planul vertical care trece prin axul ţevii, va lua sub efectul percuţiei, când unghiul de tragere [1]) este superior unei anumite limite, o mişcare de translaţie orizontală în acest plan.

1⁰. *Translaţie simplă.* In timpul acestei mişcări, cele 2 puncte de reazăm C şi R ale solidului plan, care corespund contactului cozii afetului şi roatelor tunului cu platforma, aluneca cu frecare pe platformă în direcţia dela R la C. Fie φ unghiul de frecare, a căruia tangentă, în cazul care ne ocupă al frecării ferului pe lemn, este egală cu 0,50.

Fie de asemenea:

G_t, centrul de greutate al ţevii tunului, situat pe axul ţevii şi în vecinătatea axului orizontal proectat în U al umerilor afetului care susţin ţeava;

$G_t A$, axul ţevii înclinat pe orizont de un unghiu α, care este unghiul de tragere;

G, centrul de greutate al întregului tun;

OH, orizontala care trece prin G.

Prin punctul O, unde direcţia percuţiei P întâlneşte orizontala OH, să ducem dreapta SO care face cu verticala unghiul de frecare φ.

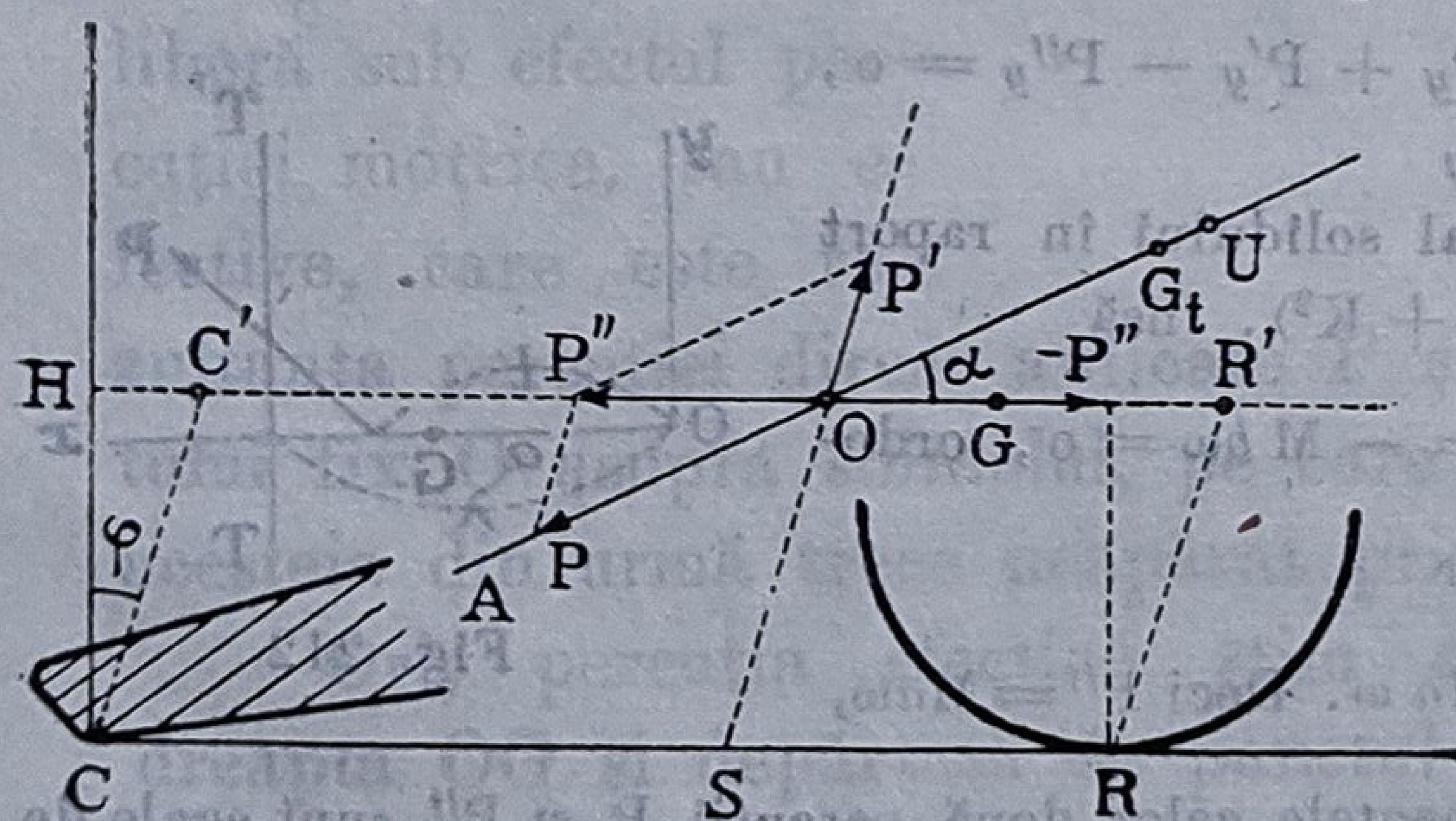


Fig. 213

Cum centrul de greutate G se mişcă pe orizontala OH, vedem, că dacă mutăm punctul de aplicaţie al percuţiei P în O şi construim apoi paralelogramul OPP''P'O, vectorul OP' va reprezenta

---

[1]) Unghiul de tragere este unghiul pe care îl formează axul ţevii cu orizontul.

percuţia P′ a platformei asupra punctelor de reazăm C şi R ale tunului, iar vectorul OP″ percuţia efectivă sau motrice P″ care determină mişcarea de recul a întregului tun. Insfârşit, — P″ va fi percuţia de inerţie. Cele 3 percuţii P, P′ şi — P″, potrivit principiului lui d'Alembert, îşi fac echilibru.

Aşa dar, dacă se cunoaşte P, putem determina percuţia motrice P″ şi prin urmare viteza de recul a întregului sistem egală cu $\frac{P''}{M + M'}$, M fiind massa ţevii şi M′ massa afetului cu roatele sale, cum de asemenea percuţia P′ a platformei asupra tunului, care se descompune în două componente paralele aplicate în punctele C şi R. Componentele din R se distribue apoi în mod egal celor două roate.

Valoarea percuţiei P fiind egală cu cantitatea de mişcare Mv, pe care o dobândeşte ţeava când se mişcă liber sub acţiunea gazelor pulberii, pe un plan orizontal pe care poate aluneca fără frecare, artileriştii au căutat o formulă care să procure pe Mv. Această formulă nu se poate însă obţine prin aplicaţia teoremei cantităţilor de mişcare, ca la pag. 224 a Cursului nostru, căci ţeava nu îşi dobândeşte viteza ei maximă de recul v decât după ce proectilul a mai parcurs vre-o 50 de metri în aer, în care timp gazele pulberii continuă de a împinge ţeava înapoi şi proectilul înainte. Dintre diferitele formule empirice propuse, cea mai utilizată este formula

$$Mv = mV\left(1 + b\,\frac{\varpi}{p}\right)$$

în care mV este cantitatea de mişcare a proectilului, ϖ greutatea încărcăturei de pulbere, iar b un coeficient numeric care se ia egal cu 2 pentru pulberile negre şi cu 2,5 pentru pulberile moderne.

2°. ***Translaţie şi rotaţie.*** Referindu-ne la figura precedentă, vom observa că dacă axul ţevii face cu verticala unghiul de frecare φ, adică dacă unghiul de tragere α devine egal cu $90 - \varphi$, reculul tunului se anulează căci P″ devine nul.

Când direcţia axului ţevii trece prin punctul C′, percuţia din punctul R este nulă, întreaga percuţie P′ a platformei fiind aplicată în punctul C.

De îndată ce punctul O trece de punctul C′ la stânga, componenta din R a percuţiei P′ devine negativă, ceea ce este inadmisibil. Efectul percuţiei P, asupra solidului plan la care reducem tunul, este atunci de a da acestui solid o mişcare elementară de translaţie în direcţia RC, în acelaşi timp cu o mişcare elementară de rotaţie în planul solidului şi în jurul punctului C. Aceste două mişcări revin însă la o simplă rotaţie în jurul unui centru instantaneu I, situat pe normala din C a traectoriei acestui punct, adică pe verticala CH [1]).

Asemenea mişcare de rotaţie, sau cum se mai zice: *cabrarea tunului*, are deci loc ori de câte ori unghiul de tragere este mai mic decât unghiul $G_t C' R'$. Ea se produce, în particular, în tragerile orizontale.

Fig. 214

Să determinăm viteza unghiulară de rotaţie ω a acestei mişcări.

Pentru aceasta, să observăm următoarele:

a) Percuţia P′ aplicată în C are direcţia dreptei CD care face cu verticala unghiul de frecare φ;

b) Percuţia motrice P″ este situată pe simetrica faţă de G a polarei punctului necunoscut I, în raport de cercul de inerţie, adică cercul descris din G ca centru cu raza de giraţie K. Această polară, după cum am mai spus, trece însă

---

[1]) *Cinematica*, pag. 102.

prin punctul E de pe orizontala GH, care este polul dreptei indefinite CH. Deci, simetrica polarei în raport de G, şi prin urmare direcţia percuţiei P″ trece prin punctul E′ simetricul lui E.

c) Fie D punctul unde se întâlnesc direcţiile cunoscute ale percuţiilor P şi P′. Cum percuţia motrice P″ trece şi ea prin acest punct, linia ei de acţiune va fi deci dreapta E′ D.

Rezultă din aceste considerații, că aplicând percuţia P în punctul D şi construind paralelogramul DPP″P′D, obţinem în mod grafic atât valorile cât şi liniile de acţiune ale celor două percuţii P″ şi P′.

In cât priveşte punctul I, el se află la intersecţia dreptei CH cu perpendiculara coborâtă din G pe direcţia DE′, şi, dacă punem IG = a, avem, după cum ştim,

$$P'' = (M + M')\, a\, \omega$$

de unde rezultă valoarea lui ω.

3°. ***Rotaţie simplă.*** Să presupunem ca şi mai sus că unghiul de tragere α este mai mic decât unghiul G_t C′ R′. Dacă se fixează punctul C (tunuri cu sapă rigidă la călcâi) atunci tunul nu poate lua decât o mişcare de rotaţie în jurul lui C.

Fig. 215

Linia de acţiune a percuţiei motrice P″ ştim că este simetrica polarei punctului C în cercul de inerţie. Fie DB această linie, D fiind punctul ei de intersecţie cu direcţia percuţiei P. Ori, direcţia percuţiei din C trece şi ea prin acest punct. Formând atunci paralelogramul D P P″ P′ D, obţinem în mod grafic valorile şi direcţiile percuţiilor P″ şi P′.

Ca şi mai sus, viteza unghiulară de rotaţie ω este

$$\omega = \frac{P''}{(M+M')a}$$

punând CG = a.

Când direcţia axului ţevii $G_1 A$ trece prin C, percuţia P″ se anulează. Aşa dar *cabrarea tunului* începe dela un unghiu de tragere mai mare decât unghiul $G_1 C'R'$ dela Nr. precedent şi se continuă pentru toate unghiurile de tragere mai mici decât $G_1 CR$.

Cabrarea tunului este foarte compromiţătoare pentru rezistenţa materialului[1]). In tunurile moderne ea se evită introducându-se legături elastice între ţeavă şi afet care se opun tendinţei de cabrare. Aceste legături elastice sunt constituite din frâne de tragere şi recuperatoare, de care noi nu ne putem ocupa în Cursul de faţă.

Notă. Valoarea percuţiei P a gazelor asupra ţevii, am spus că se determină prin formula

$$P = Mv \cong mV\left(1 + b\frac{\varpi}{p}\right).$$

Mai ştim însă că

$$P = \int_0^\theta F\,dt$$

F fiind presiunea motrice a gazelor asupra fundului ţevii, în intervalul de timp dela o la θ care corespunde dobândirei vitezii maxime de recul. Valorile F nu se pot însă determina. Se cunoaşte legea variaţiunii presiunilor din interiorul ţevilor de tunuri, însă F nu reprezintă aceste presiuni, căci o bună parte din presiuni se perd cu producerea deformaţiunilor elastice şi vibraţiunile intense ce ocazionează materialului. Cum aceste perderi de presiune nu pot fi determinate, rezultă că legea variaţiunii lui F, în intervalul dela o la θ, ne rămâne necunoscută.

---

[1]) Inălţimea verticală la care se ridică centrul de greutate G prin cabrare, se obţine aplicând teorema forţelor vii, cu începere din momentul când viteza unghiulară de rotaţie este ω şi până în momentul când această viteză se anulează prin efectul travaliului negativ al greutăţii tunului. Forţa vie este dealtfel $\frac{1}{2}I\omega^2$, I fiind momentul de inerţie al tunului, redus la un solid plan, în raport de C.

Putem însă determina valoarea mijlocie F′ a acestor eforturi F. Avem, în adevăr, egalitatea

$$Mv = \int_0^\theta F\,dt = F'.\,\theta$$

din care deducem

$$F' = \frac{Mv}{\theta}$$

valoarea lui θ determinându-se experimental sau prin formule de Balistică interioară.

Ceea ce ar fi mai interesant de cunoscut, ar fi desigur valoarea maximă a lui F. In lipsă de aceasta, în determinarea reacţiunilor care se produc între ţeavă, afet şi roate, se utilizează valoarea F′ mărită cu un coeficient de siguranţă care se determină prin comparaţiunea materialului în studiu cu un material similar existent, de bună construcţie, ceea ce revine de altfel la o anumită micşorare a valoarei lui θ, după cum am făcut noi în proectul ce am stabilit pentru *Construcţia şi Organizaţia Afetului destinat ţevilor de tun de 150 mm. calibru, scoase din forturile cetăţii Bucureşti*, publicat în *Revista Artileriei* din Mai—Iunie 1921.

Cititorul se mai poate referi şi la articolul nostru întitulat *Construcţia Tunurilor Antiaeriene*, publicat de aceiaşi Revistă în Martie 1936, unde se găsesc toate formulele şi calculele noastre numerice privitoare organizării frânei de tragere şi resoartelor recuperatoare dela *tunurile antiaeriene de 57 mm. calibru*, cu tragere repede, sistem *Burileanu*, care au luat parte la războiul din 1916—18.

VII. MIŞCAREA SOLIDELOR NATURALE

Când un solid natural se mişcă în spaţiu sub acţiunea unor forţe, deformaţiunile pe care le suferă în punctele de aplicaţie ale forţelor sunt în general neglijabile, aşa că solidul poate fi considerat ca păstrând o formă invariabilă. Se vor putea deci aplica mişcării solidelor naturale toate teoremele privitoare mişcării solidelor invariabile, fără vre-o altă consideraţie de avut în vedere.

Nu se va proceda însă astfel decât pentru studiul mişcării solidelor isolate.

Când un solid natural rămâne pe timpul mişcării sale în contact cu unul sau mai multe alte solide naturale, trebue să se ţină seama de reacţiunile particulare ce se produc în punctele de contact, aceste reacţiuni nefiind aceleaşi ca în cazul contactului dintre solidele pe care le consideră Mecanica raţională. Numai cu această condiţie se vor putea apoi aplica solidelor naturale teoremele referitoare Dinamicei solidelor invariabile.

Cu reamintirea celor expuse la capitolul intitulat *„Echilibrul solidelor naturale“* exemplele care urmează vor lămuri suficient această chestiune.

1. Rostogolirea unui cilindru de revoluţie pe un plan orizontal. Fie un cilindru de revoluţie omogen şi greu, de rază r şi de greutate P, stând în repaus pe un plan orizontal. Să aplicăm în centrul de greutate O al cilindrului şi perpendicular pe ax, un efort orizontal de tracţiune T pe care să-l facem să crească progresiv cu începere dela zero.

Știm că cilindrul va rămâne în stare de repaus până când valoarea lui T va deveni egală cu $\frac{P}{r}\delta$, însemnând prin δ distanța punctului de contact mecanic C la verticala centrului de greutate. In acel moment, acțiunea planului orizontal asupra cilindrului are o componentă orizontală F egală cu tracțiunea T și o componentă verticală P′ egală cu P însă de sens opus. Componenta F reprezintă o frecare și vom presupune că valoarea ei este mai mică decât frecarea de alunecare

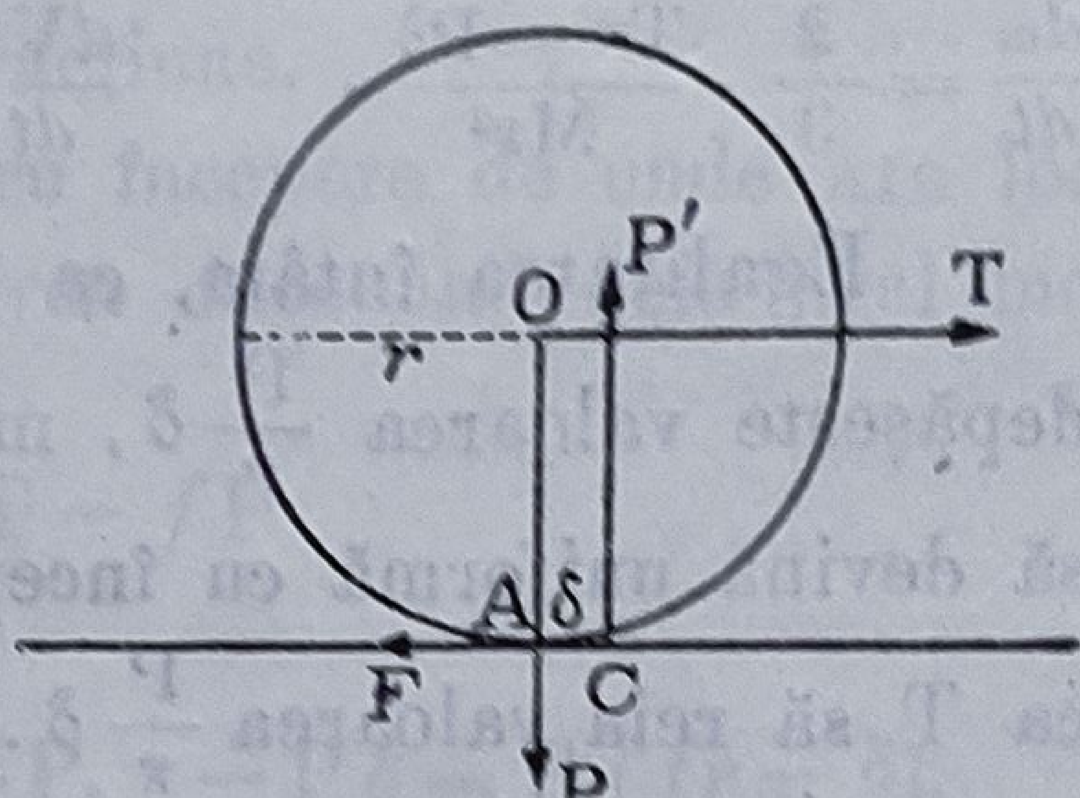


Fig. 216

fP, așa ca mărind pe T dincolo de valoarea $\frac{P}{r}\delta$ cilindrul să nu ia decât o mișcare de rostogolire.

Pe timpul acestei mișcări, componenta P′ va rămâne aceiași pe când F va fi variabil. Centrul de greutate O se va mișca în direcția efortului T după legea

$$(1) \qquad M\frac{dV}{dt} = T - F$$

M fiind massa cilindrului și V viteza lui O.

Pe de altă parte, însemnând prin I momentul de inerție al cilindrului în raport de axul său și prin ω viteza unghiulară de rotație în jurul acestui ax, avem

$$I\frac{d\omega}{dt} = Fr - P\delta$$

sau, pentru că I este egal cu $\frac{1}{2}Mr^2$,

$$(2) \qquad \frac{1}{2}Mr^2\frac{d\omega}{dt} = Fr - P\delta\,.$$

Insfârșit, cum există rostogolire, viteza punctului de contact geometric A este nulă. Viteza de antrenare a acestui punct fiind egală cu V iar viteza relativă egală cu $-r\omega$, viteza sa absolută are ca expresie $V - r\omega$; avem deci relația

$$(3) \qquad V - r\omega = o\,.$$

Ecuaţiile (1), (2) şi (3) ne permit a determina pe $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ şi F. Ele ne dau în adevăr, în funcţie de datele problemei

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{2}{3}\cdot\frac{Tr-P\delta}{Mr^2}, \qquad \frac{dV}{dt}=\frac{2}{3}\cdot\frac{Tr-P\delta}{Mr}, \qquad F=\frac{Tr+2P\delta}{3r}.$$

Egalitatea întâia, ca şi a doua, arată, că de îndată ce T depăşeşte valoarea $\frac{P}{r}\delta$, mişcarea se accelerează. Pentru ca ea să devină uniformă cu începere de la un moment oarecare, trebue ca T să reia valoarea $\frac{P}{r}\delta$.

Égalitatea a treia stabileşte că F creşte odată cu T. Pentru ca F să nu atingă valoarea frecării de alunecare, caz în care mişcarea cilindrului ar fi o rostogolire cu alunecare, trebue să avem

$$\frac{Tr+2P\delta}{3r}<fP$$

adică

$$T<P.\frac{3fr-2\delta}{r}.$$

In asemenea ipoteză, să ne închipuim că într'un moment oarecare al mişcării se suprimă efortul T. Mişcarea va deveni atunci uniform întârziată şi va avea loc potrivit egalităţilor

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{P\delta}{Mr^2}=-\frac{2}{3}\frac{g\delta}{r^2}$$

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{g\delta}{r}$$

care se deduc din cele de mai sus făcând pe T egal cu zero. Frecarea va deveni constantă, valoarea ei fiind

$$F=\frac{2}{3}\frac{P}{r}\delta.$$

2. **Rostogolirea cu alunecare a unui cilindru de revoluţie pe un plan orizontal.** In exemplul precedent am presupus că rostogolirea are loc fără alunecare. Alunecarea se poate produce chiar dela eşirea din starea de repaus dacă se întâmplă ca $\frac{P}{r}\delta$ să

atingă valoarea fP, adică dacă avem $f = \frac{\delta}{r}$. Am mai văzut că alunecarea se poate produce pe timpul rostogolirii când componenta F atinge aceiaşi valoare fP, ceea ce corespunde unei anumite valori a efortului de tracţiune.

Ori care ar fi momentul cu începere de unde are loc rostogolirea cu alunecare, vom avea începând dela acel moment

$$(4) \qquad M \frac{dV}{dt} = T - fP$$

$$(5) \qquad \frac{1}{2} Mr^2 \frac{d\omega}{dt} = fP.\, r - P\delta = P\,(fr - \delta).$$

Prima ecuaţie dă pe $\frac{dV}{dt}$ iar a doua pe $\frac{d\omega}{dt}$. Componenta F rămâne constantă şi egală cu fP. Expresia $V - r\omega$ nu mai este nulă şi reprezintă viteza de alunecare.

Punând termenul $P(fr - \delta)$ sub forma $Pfr\left(1 - \frac{\delta}{fr}\right)$ avem de observat că în practică valoarea raportului $\frac{\delta}{fr}$ este foarte mică faţă de unitate. Astfel, în cazul unei roate de fer de un metru ca diametru care s'ar rostogoli cu alunecare pe o şină de fer, se poate lua $f = 0{,}18$ şi $\delta = 0{,}43$ milimetri aşa că $\frac{\delta}{fr} = \frac{1}{222}$. In consecinţă ecuaţia (5) se poate scrie pur şi simplu

$$(5)^{\text{bis}} \qquad \frac{1}{2} Mr^2 \frac{d\omega}{dt} = Pfr$$

aceasta revenind după cum se vede la neglijarea lui δ. Deci, în regulă generală, *când există rostogolire cu alunecare, se poate considera punctul de contact mecanic ca confundat cu punctul de contact geometric.*

3. **Mişcarea unui cilindru de revoluţie pe un plan înclinat.** Vom presupune că cilindrul pleacă din stare de repaus sub simpla acţiune a greutăţii sale, generatricea de contact geometric a cilindrului cu planul fiind orizontală.

Cilindrul va coborî planul sub efectul forţei de tracţiune $T = P \sin \alpha$, α fiind înclinarea planului pe orizont.

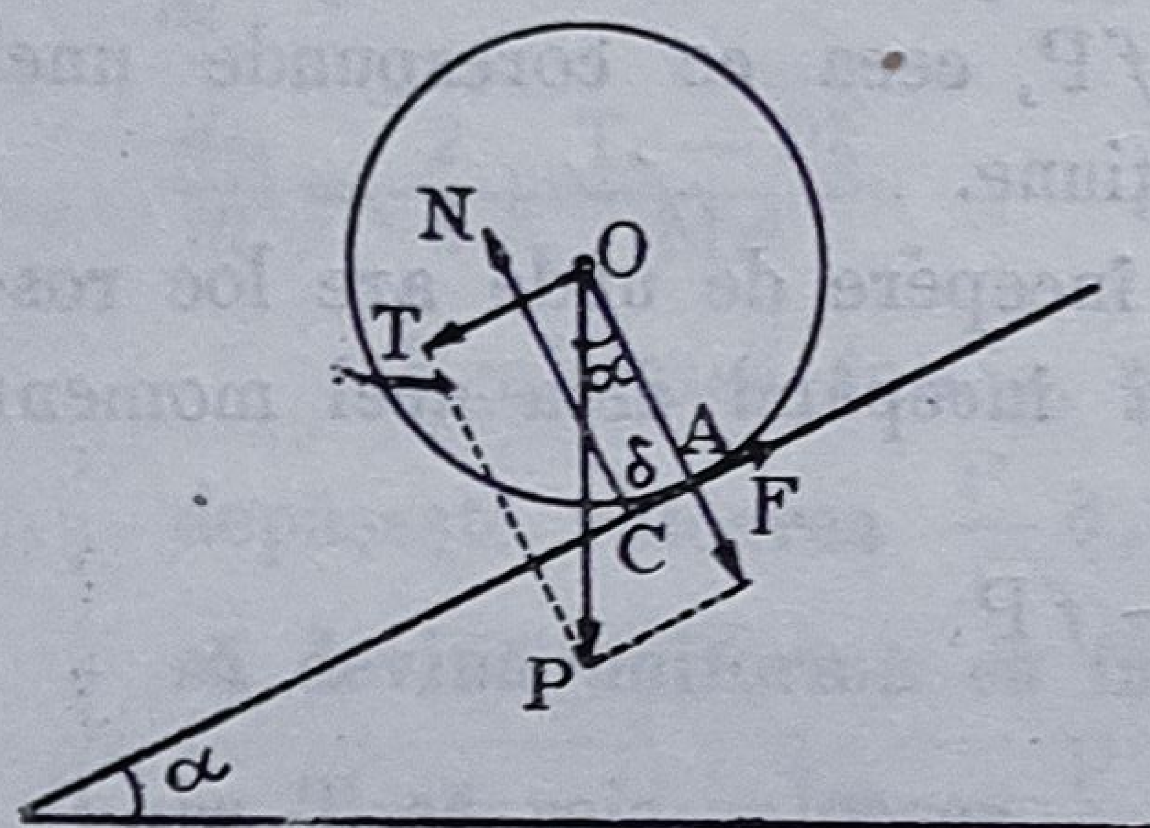


Fig. 217

Pentru ca mişcarea să poate începe, trebue ca valoarea lui T să fie mai mare decât $\frac{N}{r}\delta$, N fiind componenta normală a acţiunii planului. Cum $N = P \cos \alpha$, trebue deci să avem

$$P \sin \alpha > \frac{P \cos \alpha}{r}\delta \text{ adică}$$

$$(6) \qquad \operatorname{tg} \alpha > \frac{\delta}{r}.$$

Dacă mărim progresiv pe α cu începere dela zero, cilindrul se va pune în mişcare când α va trece de valoarea $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{r}$. Rezultă de aci un mijloc practic pentru determinarea valoarei lui δ.

Să presupunem condiţia (6) îndeplinită. Mişcarea va putea fi o rostogolire, sau o rostogolire cu alunecare, după valoarea pe care o are α.

a). ***Rostogolire fără alunecare.*** Dacă presupunem că α are astfel de valoare că rostogolirea se produce fără alunecare, ecuaţiile mişcării vor fi ecuaţiile (1), (2) şi (3) de mai sus, în care se va înlocui T prin $P \sin \alpha$ şi componenta normală a acţiunii planului prin $P \cos \alpha$. Făcând aceste înlocuiri, se obţine

$$(7) \qquad M \frac{dV}{dt} = P \sin \alpha - F$$

$$(8) \qquad \frac{1}{2} M r^2 \frac{d\omega}{dt} = F r - P \delta \cos \alpha$$

$$(9) \qquad V = r \omega.$$

Din aceste ecuaţii deducem

$$F = P \frac{r \sin \alpha + 2 \delta \cos \alpha}{3 r}.$$

Inlocuind pe F prin această valoare, ecuaţiile mişcării se reduc la cele două ecuaţii

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2g}{3r}\left(r \sin \alpha - \delta \cos \alpha\right) = r\frac{d\omega}{dt}$$

deci, mişcarea va fi uniform accelerată, diferenţa $r \sin \alpha - \delta \cos \alpha$ fiind o cantitate pozitivă potrivit inegalităţii (6).

Pentru ca în conformitate cu ipoteza admisă să nu existe alunecare, trebue să avem $F < f . P \cos \alpha$ adică

$$\frac{r \sin \alpha + 2\delta \cos \alpha}{3r} < f \cos \alpha$$

de unde

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg} \alpha < 3f - 2\frac{\delta}{r}.$$

Valoarea lui α trebue deci să satisfacă acestei condiţii, care se reduce la $\operatorname{tg} \alpha < 3f$ dacă neglijăm pe $2\frac{\delta}{r}$.

b). *Rostogolire cu alunecare.* Dacă inegalitatea (10) nu are loc, mişcarea va fi o rostogolire cu alunecare. Se vor utiliza atunci ecuaţiile (4) şi (5) bis sub forma

$$M\frac{dV}{dt} = P(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$\frac{1}{2} M r^2 \frac{d\omega}{dt} = P f r \cos \alpha$$

sau

$$\text{(11)} \qquad \frac{dV}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

$$\text{(12)} \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2gf}{r} \cos \alpha .$$

Putem observa că ecuaţia (11) este identică cu aceea care dă viteza unui corp greu, terminat printr'o suprafaţă plană, care ar coborî planul cu alunecare.

4. Mişcarea unei sfere omogene şi grele pe un plan orizontal, când se ţine seama de frecare (*mişcarea unei bile de biliard*). Să considerăm o sferă omogenă şi grea care se mişcă cu frecare pe un plan orizontal, sfera fiind animată în momentul iniţial de o mişcare de rostogolire cu alunecare.

Să luăm trei axe dreptunghiulare fixe Ox, Oy, Oz, dintre care Oz vertical şi îndreptat în sus iar Ox şi Oy în planul pe care se mişcă sfera. Prin centrul O' al sferei să ducem axele $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ paralele celor precedente.

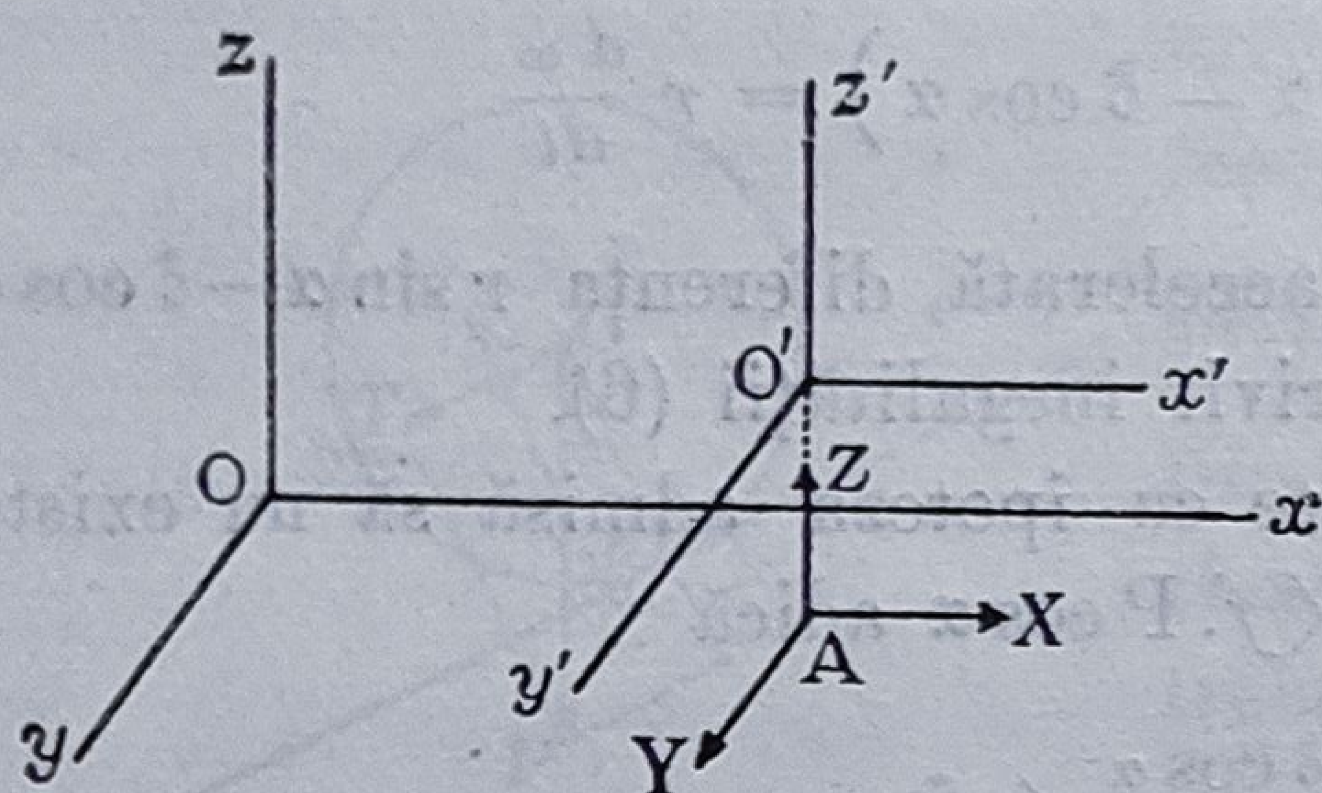


Fig. 218.

Fie:

u, v proecţiile pe Ox şi Oy ale vitezei centrului O'; p, q, r proecţiile pe $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ ale vectorului rotaţiei în jurul axului instantaneu trecând prin O';

R raza sferei;

K raza sa de giraţie în raport de unul oarecare din diametre;

f coeficientul de frecare al sferei pe plan.

Faza I-a. Cum, prin ipoteză, sfera posedă în momentul iniţial o mişcare de rostogolire cu alunecare, această mişcare se va continua un oarecare timp, constituind prima fază a mişcării.

Neglijând parametrul de rostogolire δ, să însemnăm prin X, Y, Z, componentele acţiunii planului asupra sferei, din punctul de contact geometric A situat pe verticala $O'z'$. In afară de această acţiune, sfera nu mai este supusă decât acţiunii greutăţei sale Mg aplicată în O'.

Teorema mişcării centrului de greutate ne dă ecuaţiile

$$(1) \qquad M\frac{du}{dt} = X, \qquad M\frac{dv}{dt} = Y, \qquad Z - Mg = 0.$$

Apoi, avem prin teorema momentelor cantităţilor de mişcare (ecuaţiile lui Euler):

$$(2) \qquad M.K^2\frac{dp}{dt} = RY, \qquad MK^2\frac{dq}{dt} = -RX, \qquad \frac{dr}{dt} = 0.$$

Pe de altă parte, componenta tangenţială a acţiunii pla-

nului, adică frecarea propriu zisă, fiind egală cu $\sqrt{X^2 + Y^2}$, avem egalitatea

$$(3) \qquad \sqrt{X^2+Y^2}=fZ.$$

Insfârşit, această componentă tangenţială fiind direct opusă vitezei punctului de contact A, considerat ca aparţinând sferei, şi viteza acestui punct având ca proecţii $u - Rq$ pe Ox şi $v + Rp$ pe Oy [1]), avem ca ultimă ecuaţie

$$(4) \qquad \frac{X}{Y}=\frac{u-Rq}{v+Rp}.$$

In total, opt ecuaţii pentru determinarea celor opt necunoscute u, v; p, q, r; X, Y, Z.

Din ecuaţiile (1) şi (2) deducem

$$\frac{X}{Y}=\frac{du}{dv}=-\frac{dq}{dp}$$

şi, cum

$$\frac{du}{dv}=-\frac{dq}{dp}=\frac{du-R\,dq}{dv+Rdp}=\frac{d(u-Rq)}{d(v+Rp)}$$

conchidem potrivit ecuaţiei (4) că

$$\frac{d(u-Rq)}{d(v+Rp)}=\frac{u-Rq}{v+Rp}.$$

Această ecuaţie pusă sub forma

$$\frac{d(u-Rq)}{u-Rq}=\frac{d(v+Rp)}{v+Rp}$$

ne dă prin integraţiune

$$\text{Log}\,\frac{u-Rq}{v+Rp}=\text{const.}$$

Deci raportul $\frac{u-Rq}{v+Rp}$ este constant, ca şi egalul sau $\frac{X}{Y}$. Rezultă că *direcţia frecării este constantă*; pe de altă parte, *in-*

---

[1]) Componentele — Rq şi Rp rezultă din aplicaţia formulelor generale $qz' - ry'$, $rx' - pz'$ făcând $x' = y' =$ o şi $z' = -R$ care sunt cordonatele punctului A.

tensitatea ei este de asemenea constantă, căci ecuaţiile (1) şi (3) ne dau prin eliminarea lui Z,

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = Mgf.$$

Vedem astfel că *centrul de greutate O′ descrie o parabolă*, de oarece el se mişcă ca un punct material izolat supus unei forţe constante. Parabola poate de altfel să se reducă la o dreaptă, dacă viteza iniţială este în direcţia forţei.

Acest rezultat poate fi verificat cu o bilă spoită cu alb şi lansată pe un biliard aşa fel ca bila să posede o mare alunecare iniţială; se constată atunci forma parabolică a urmei lăsate pe postavul biliardului.

In vederea determinării celor opt necunoscute, să presupunem, pentru simplicitatea formulelor, că axul Oy a fost ales aşa fel ca direcţia lui să coincidă cu aceea a vitezei iniţiale pe care o are punctul de contact A. Atunci, componenta acestei viteze pe Ox fiind nulă, avem

$$u_0 - Rq_0 = 0$$

şi, pentru că frecarea este direct opusă vitezei de alunecare şi păstrează o direcţie invariabilă,

$$X = 0, \qquad Y = -Mgf.$$

Ca urmare, ecuaţiile mişcării devin

$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = -fg, \qquad Z = Mg$$

$$K^2 \frac{dp}{dt} = -Rfg, \qquad \frac{dq}{dt} = 0, \qquad \frac{dr}{dt} = 0.$$

Potrivit acestor ecuaţii, vedem mai întâi că cele trei cantităţi u, q, r rămân constante:

$$u = u_0, \qquad q = q_0, \qquad r = r_0.$$

Deducem apoi prin integraţiune pentru v şi p,

$$v = v_0 - fgt, \qquad p = p_0 - \frac{Rfg}{K^2} t.$$

Am determinat în felul acesta toate necunoscutele în funcţie de condiţiile iniţiale ale mişcării.

Dacă voim ecuaţia proecţiunii traectoriei centrului de greutate pe planul xOy, observăm, că însemnând prin a, b, cordonatele lui O′, ecuaţiile

$$u = \frac{da}{dt} = u_0, \qquad v = \frac{db}{dt} = v_0 - fgt$$

ne dau, dacă luăm ca origină poziţia iniţială a punctului A,

$$a = u_0 t, \qquad b = v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2.$$

Ecuaţia în chestiune rezultă din eliminarea lui t între aceste două din urmă ecuaţii.

Faza 2-a. Viteza de alunecare a punctului de contact A are ca componente $u - Rq$, $v + Rp$. Ori, avem

$$u - Rq = u_0 - Rq_0 = 0$$

$$v + Rp = v_0 - fgt + R\left(p_0 - \frac{Rfg}{K^2} t\right).$$

Cu sistemul particular de axe ce am ales, prima componentă este deci totdeauna nulă. Cealaltă este o funcţie lineară de t care se anulează pentru valoarea

$$t' = \frac{K^2}{fg} \cdot \frac{v_0 + R p_0}{K^2 + R^2}.$$

Pentru $t > t'$ mişcarea de alunecare va înceta de a se mai produce, căci dacă ar continua de a avea loc atunci viteza ei $v + Rp$ ar trebui să schimbe de semn şi ar dobândi acelaşi sens ca frecarea, ceea ce constitue o imposibilitate. *Mişcarea va fi deci o rostogolire* executată potrivit ecuaţiilor (1), (2) cărora li se vor alătura cele două ecuaţii

$$(5) \qquad u - Rq = 0, \qquad v + Rp = 0$$

adică în total tot opt ecuaţii pentru determinarea celor opt necunoscute u, v; p, q, r; X, Y, Z.

Ele dau pentru X *şi* Y *valori nule,* verificându-se astfel absenţa oricărei tendinţe la alunecare. In adevăr, dacă eliminăm pe X şi Y între ecuaţiile (1) şi (2) obţinem

$$\frac{du}{dt} + \frac{K^2}{R} \frac{dq}{dt} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} - \frac{K^2}{R} \frac{dp}{dt} = 0$$

şi aceste ecuaţii, înlocuind pe $\frac{dq}{dt}$ şi $\frac{dp}{dt}$ prin valorile deduse din ecuaţiile (5), se reduc la

$$(6) \qquad \frac{du}{dt} = o\,, \qquad \frac{dv}{dt} = o$$

ceea ce potrivit ecuaţiilor (1) conduce la rezultatul

$$X = o\,, \qquad Y = o\,.$$

Cum ecuaţiile (6) stabilesc că u şi v rămân constanţi, rezultă că începând dela momentul t' *mişcarea centrului de greutate devine rectilină şi uniformă.*

Sensul acestei mişcări depinde de semnele componentelor u şi v în momentul t' când încetează alunecarea. Ori, raportându-ne la studiul primei faze, u şi v, în sistemul particular de axe, au în momentul t' valorile

$$u_0\,, \qquad v_0 - fgt'$$

adică, înlocuind pe t' prin valoarea sa şi pentru că $u_0 - Rq_0 = o$,

$$Rq_0\,, \qquad \frac{R(Rv_0 - K^2 p_0)}{K^2 + R^2}\,.$$

Rezultanta acestor componente poate, după ordinea de mărime şi semnele cantităţilor q_0, v_0, p_0 să facă un unghiu oarecare cu viteza iniţială a centrului de greutate, ale cărei componente sunt Rq_0, v_0. Se poate deci întâmpla ca după momentul t' sfera să continue de a înainta în sensul impulsiei primitive, sau să se întoarcă înapoi (efectul de *retro* la biliard) sau însfârşit să ia o direcţie intermediară oare-care.

Observaţiune. Cu începere din momentul t', am spus că centrul de greutate al sferei dobândeşte o mişcare rectilină şi uniformă, care ar fi să continue indefinit.

Asemenea rezultat se înţelege că nu se verifică în practică. Cauza este nu numai rezistenţa aerului, care se opune mişcării sferei şi de care nu s'a ţinut socoteală, dar totodată faptul că s'a neglijat rezistenţa la rostogolire, admiţându-se că şi pe timpul rostogolirei fără alunecare punctul de contact mecanic a

rămas în coincidență cu punctul de contact geometric. Ori, asemenea presupunere nu permite de a ajunge la conclusiuni exacte.

Fără această presupunere, componentele u și v ale vitezei centrului de greutate n'ar fi constante, după cum nici componentele X și Y ale frecărei n'ar fi nule. Frecarea ar fi însă mai mică, bine înțeles, decât frecarea de alunecare Mgf.

PARTEA V

MIŞCAREA PROECTILULUI ÎN JURUL CENTRULUI SĂU DE GREUTATE.

I. NOŢIUNI INTRODUCTIVE.

GREUTATEA. REZISTENŢA AERULUI. FRECĂRILE LATERALE. MIŞCAREA CENTRULUI DE GREUTATE.

Problema mişcării proectilului în jurul centrului său de greutate, constitue o foarte interesantă aplicaţiune la un caz concret a teoriei mişcării unui solid în jurul unui punct fix. Pentru artilerişti, ea este de o importanţă considerabilă, interesând în mod direct atât precizia tragerilor cât si construcţia proectilelor.

Nu ne putem însă ocupa de această chestiune fără a preciza mai întâi toate consideraţiile de ordin balistic pe care vom sprijini rezolvirea ei.

Este ceea ce vom face în prezentul capitol.

* * *

Un proectil asvârlit de o gură de foc se găseşte supus pe timpul mişcării sale în aer la acţiunea greutăţii sale mg, la rezistenţa R a aerului şi la frecările F ocazionate de scurgerea aerului pe pereţii săi. Determinarea mişcării proectilului, pretinde ca să cunoaştem în fiecare moment al mişcării mărimea şi direcţia acestor forţe.

1. **Variaţia lui g cu altitudinea.** Greutatea este o forţă cunoscută. Mărimea ei depinde însă de g care variază cu altitudinea. In calculele balistice se ţine socoteală de această variaţie în felul următor.

Fie g_y şi g_0 valorile acceleraţiei greutăţii la altitudinele y şi o. R fiind raza pământului, avem potrivit legii atracţiunei universale

$$\frac{m\,g_y}{R^2}=\frac{m\,g_0}{(R+y)^2}$$

deci

$$g_y=\frac{g_0}{\left(1+\frac{y}{R}\right)^2} \quad \text{sau} \quad g_y=g_0\left(1+\frac{y}{R}\right)^{-2}.$$

Dată fiind micimea cantităţii $\frac{y}{R}$, putem lua din desvoltarea lui $\left(1+\frac{y}{R}\right)^{-2}$ numai cei doi dintâi termeni, scriind

$$g_y=g_0\left(1-\frac{2y}{R}\right).$$

Insă termenii 1 şi $-\frac{2y}{R}$ sunt totdeodată primii doi termeni din desvoltarea funcţiei $e^{-\frac{2y}{R}}$; mai putem deci scrie, în aceiaşi ordine de aproximaţie,

$$g_y=g_0\,e^{-\frac{2y}{R}}$$

de unde

$$\log g_y=\log g_0-\frac{2y}{R}\log e.$$

Ori, pentru $y=730$, avem

$$\frac{2y}{R}\log e=0{,}0001.$$

Pentru a se ţine seama de variaţia lui g cu altitudinea, se va micşora prin urmare $\log g_0$ cu o unitate de al 4-lea ordin zecimal, de fiecare 730 metri ai altitudinei.

2. **Rezistenţa aerului.** Fie un element de suprafaţă $d\sigma$ care se deplasează în aer paralel cu el însuşi, într'o direcţie CD perpendiculară acestui element.

Rezistenţa opusă de aer mişcării elementului, este perpendiculară pe element şi depinde de suprafaţa $d\sigma$, de densitatea Δ a aerului şi de viteza v a deplasării. Cum experienţa a dovedit, că pentru o suprafaţă plană rezistenţa este proporţională

cu densitatea aerului și cu suprafața, putem scrie, însemnând prin R_n rezistența pe elementul $d\sigma$:

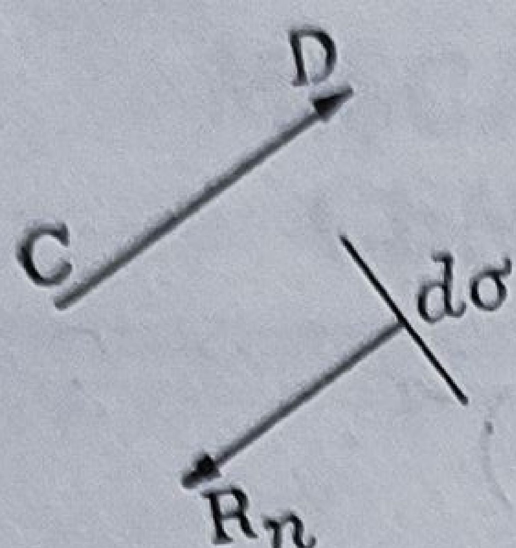


Fig. 219

$$R_n = d\sigma . \Delta . \psi(v)$$

$\psi(v)$ reprezentând o funcție de viteză.

Dacă direcția translației CD face un unghiu θ cu elementul $d\sigma$, se admite că rezistența perpendiculară acestui element, opusă de aer, este

$$R_\theta = d\sigma . \Delta . \psi(v) . f(\theta)$$

$f(\theta)$ fiind o funcție crescătoare de θ, care pentru $\theta = 90^0$ este egală cu 1.

Ca urmare, dacă reprezentăm prin R_y proecția lui R_θ pe direcția translației, avem

$$R_y = R_\theta \sin\theta = d\sigma . \Delta . \psi(v) . f(\theta) \sin\theta .$$

Să considerăm acum un proectil ogival. Fie AB meridiana ogivei sale, raportată la axul Oy al proectilului și la o perpendiculară Ox pe Oy din planul meridianei. Să presupunem că proectilul se deplasează în aer în direcția axului său Oy. Atunci, numai ogiva suportă presiunea aerului.

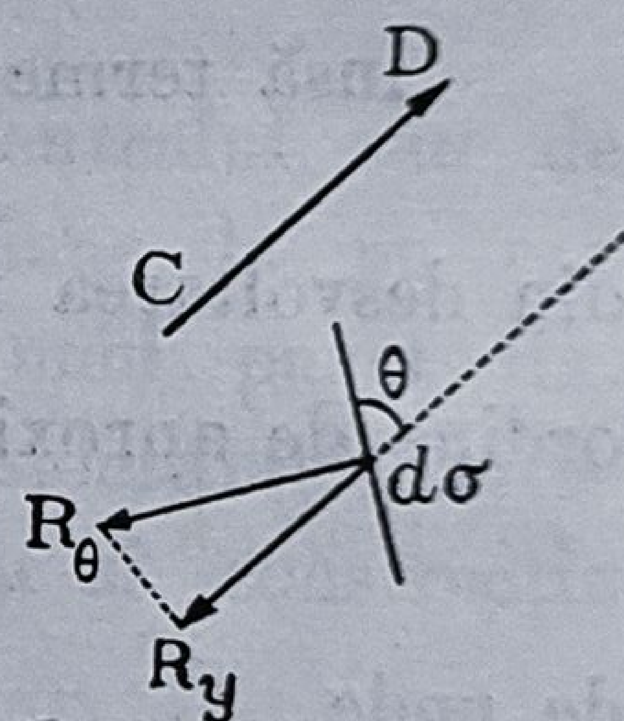


Fig. 220

Pe meridiana AB să considerăm un element MN de lungime ds. Prin învârtirea în jurul axului Oy, acest element naște o suprafață $d\sigma$ egală cu $2\pi x\, ds$ [1]). Fie un element al acestei suprafețe de lungime ds și de lățime $d\lambda$. Rezistența paralelă cu Oy fiind aceiași pe toate elementele de acest fel în care se poate descompune $d\sigma$, rezistența pe suprafața $d\sigma$ va fi

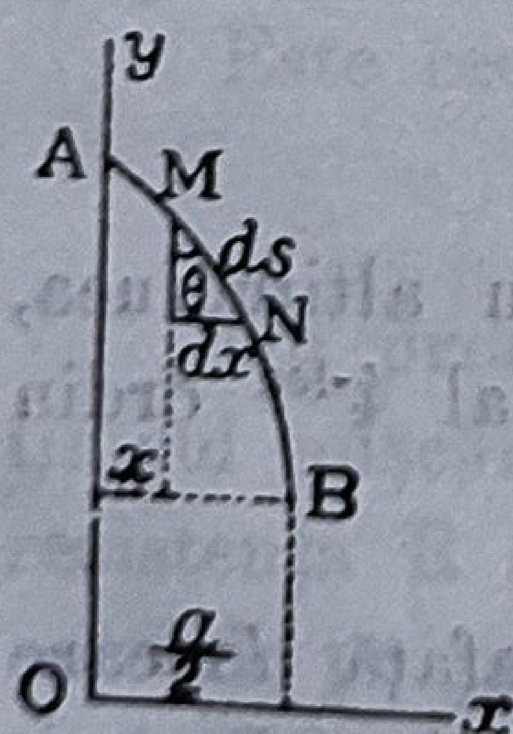


Fig. 221

$$R_y = 2\pi x\, ds . \Delta . \psi(v) . f(\theta) \sin\theta$$

sau, pentru că $ds \sin\theta = dx$,

$$R_y = 2\pi x\, dx . \Delta . \psi(v) . f(\theta) .$$

---

[1]) Suprafață de trunchiu de con, egală după cum se știe cu $\pi\, ds\, [x + (x + dx)]$ adică, în valoare principală, suprafața cilindrică $2\pi x\, ds$.

Rezistența R_x a aerului pe $d\sigma$ este nulă, căci componentele lui R_x sunt două câte două egale și direct opuse.

Așa dar, însemnând prin a calibrul proectilului, rezistența totală R a aerului asupra ogivei are ca expresie

$$R = \pi \Delta \psi(v) \int_0^{\frac{a}{2}} d(x^2) f(\theta)$$

adică

$$R = \pi \Delta \psi(v) \frac{a^2}{4} f(\theta_m)$$

θ_m fiind o valoare intermediară a lui θ în intervalul dela A la B. Dacă însfârşit punem $f(\theta_m) = i$, avem

$$R = \frac{\pi}{4} a^2 i \Delta \psi(v).$$

Accelerația corespunzătoare este

$$w = \frac{R}{\left(\frac{p}{g}\right)} = \frac{\pi}{4} \frac{a^2}{p} g i \Delta \psi(v)$$

sau, punând $\frac{\pi}{4} g \psi(v) = F(v)$,

$$w = \frac{a^2}{p} i \Delta F(v). \tag{1}$$

In această expresie a accelerației, i caracterizează forma proectilului. I se zice *indice de formă.* Expresia sa $i = f(\theta_m)$ arată, că pentru un calibru dat, el este cu atât mai mic cu cât ogiva proectilului este mai alungită.

Δ este greutatea metrului cub de aer în punctul de altitudine y, unde se găsește proectilul în momentul t, viteza sa fiind v. Punând

$$c = i \Delta \frac{a^2}{p}$$

expresia accelerației ia forma simplă

$$w = c F(v).$$

Valoarea c care coprinde caracteristicele proectilului se numește *coeficient balistic.* Acest coeficient nu este o constantă, căci el variază cu densitatea aerului.

Pentru înălţimile până la săgeţile de cel mult 8.000 de metri, valoarea densităţii Δ, pe care să o însemnăm la altitudinea y prin $\Delta(y)$, se calculează în mod practic prin formula

$$\Delta(y) = \Delta_o \cdot e^{\frac{-y}{10.000}}$$

Δ_o fiind densitatea la suprafaţa pământului.

Rămâne să vorbim despre funcţia $F(v)$. Pentru determinarea valorilor numerice ale acestei funcţii, se procedează în felul următor:

Se execută o tragere orizontală şi se măsoară vitezele v_1 şi v_2 ale proectilului la distanţele x_1 şi x_2 dela gura ţevii, luându-se $x_1 = 50$ metri pentru ca viteza proectilului să nu mai fie influenţată de împingerea gazelor care ies din ţeavă, şi x_2 vecin de 400 metri, proectilul mergând ca şi în linie dreaptă pe această distanţă.

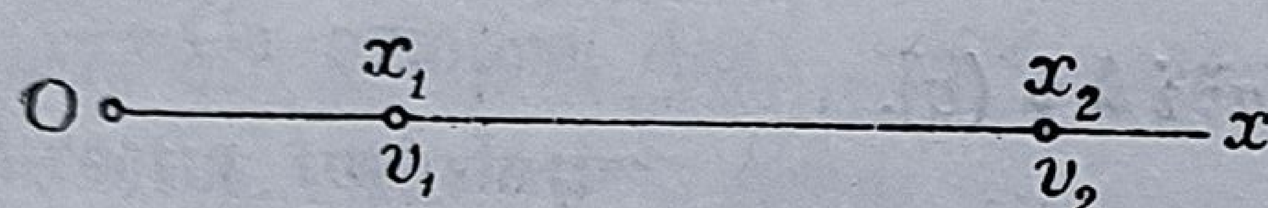


Fig. 222

Cum pe parcurs orizontal travaliul greutăţii este nul, teorema forţelor vii ne dă relaţia:

$$-R\,dx = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

sau, înlocuind pe R prin mw,

$$-w\,dx = d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

şi integrând dela x_1 la x_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} w\,dx = -\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

Insemnând prin w_m o valoare mijlocie a acceleraţiei, putem scrie

$$w_m(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

de unde

$$w_m = \frac{1}{2}\,\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2 - x_1}.$$

Se admite că valoarea w_m astfel calculată, corespunde vitezei $\frac{v_1 + v_2}{2}$. Experienţa se repetă de mai multe ori cu acelaşi proectil însă cu viteze iniţiale diferite, formându-se un tablou în care w_m se însemnă prin w iar $\frac{v_1 + v_2}{2}$ prin v. Acest tablou ne dă corespondenţa între v şi w. Formula

$$(\alpha) \qquad w = i\,\Delta_0 \frac{a^2}{p} F(v)$$

ne dă apoi valoarea numerică a lui $i\,F(v)$ pentru diferitele valori ale vitezei v.

La poligonul dela *Gâvre*, din Franţa, s'au făcut altă dată asemenea experienţe cu trei principale tipuri de proectile şi s'a constatat, că dacă se divid valorile $i\,F(v)$ obţinute la aceste experienţe prin sinusul semi-unghiului ogival γ al proectilului respectiv, raportul

$$\frac{i\,F(v)}{\sin \gamma}$$

are aceiaşi valoare pentru toate cele trei tipuri de proectile experimentate, la egalitate de viteză.

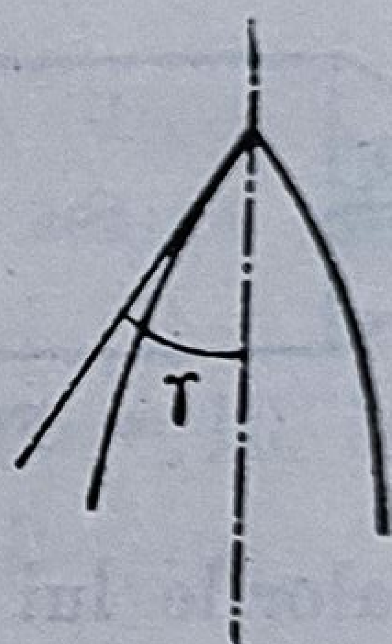


Fig. 223

Punând atunci

$$\frac{i\,F(v)}{\sin \gamma} = \varphi(v)$$

$\varphi(v)$ fiind zisă *funcţia dela Gâvre*, s'a conchis, că pentru ori-ce alt proectil de formă apropiată celor trei forme experimentate, valorile $i\,F(v)$ corespunzătoare proectilului sunt egale cu valorile $\varphi(v)$ înmulţite cu sinusul semi-unghiului său ogival γ. S'a luat deci $F(v) = \varphi(v)$ şi $i = \sin \gamma$.

Formele moderne de proectile, cu ogiva mult mai alungită şi cu partea de dinapoi tronconică, nu se mai conformează acestei legi simple. Se înţelege de altfel, că de oare-ce rezistenţa R depinde de forma particulară a proectilului, fiecare formă de proectil are funcţia sa proprie de rezistenţă. In practică, se admite totuşi, că diferitele funcţii $i\,F(v)$ se deduc tot din funcţia $\varphi(v)$ înmulţită cu un coeficient i, indicele de formă, care

pentru proectilele actuale poate totdeauna să fie luat egal cu un sinus :

$$i = \sin \gamma_m$$

unghiul γ_m fiind însă atunci un semi-unghiu ogival *fictiv.*

Această valoare a lui i se determină printr'o tragere de experiență la fel cu celelalte, din care rezultă două valori numerice pentru v și w. Tabla F (v) dându-ne atunci valoarea acestei funcții care corespunde lui v, formula (α) în care înlocuim pe w și F (v) prin valorile lor numerice ne procură pe i. Dacă facem mai multe asemenea experiențe, se constată că i variază puțin cu viteza, așa că nu este tocmai o constantă după cum se admite.

In lipsă de experiență, se poate obține o valoare aproximativă pentru i utilizând formula empirică :

$$\log i = \overline{1},800 - 0,45 \log (h + 1,25\, h')$$

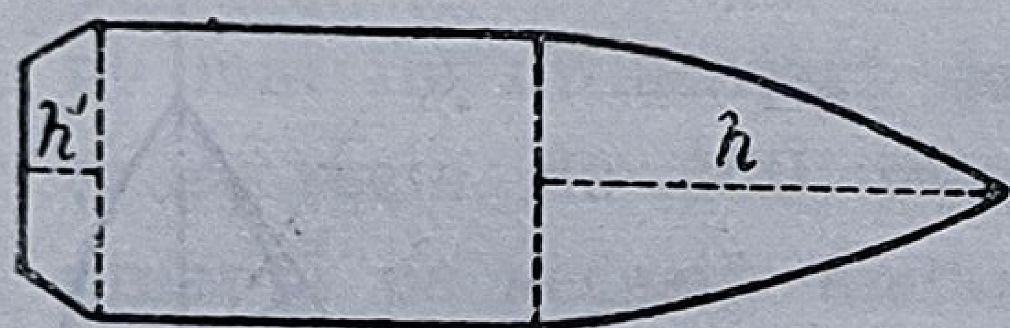


Fig. 224

h și h' fiind, respectiv, înălțimile *evaluate în calibre* a ogivei și a părței tronconice de dinapoi a proectilului.

Pentru proectilele actuale, valorile lui i sunt coprinse între 0,3 și 0,7.

In ceea ce privește funcția F (v), aliura generală a curbei sale reprezentative este aceea a unei parabole când v variază dela o la 300 $^m/_s$ și a unei drepte pentru $v > 300\ ^m/_s$.

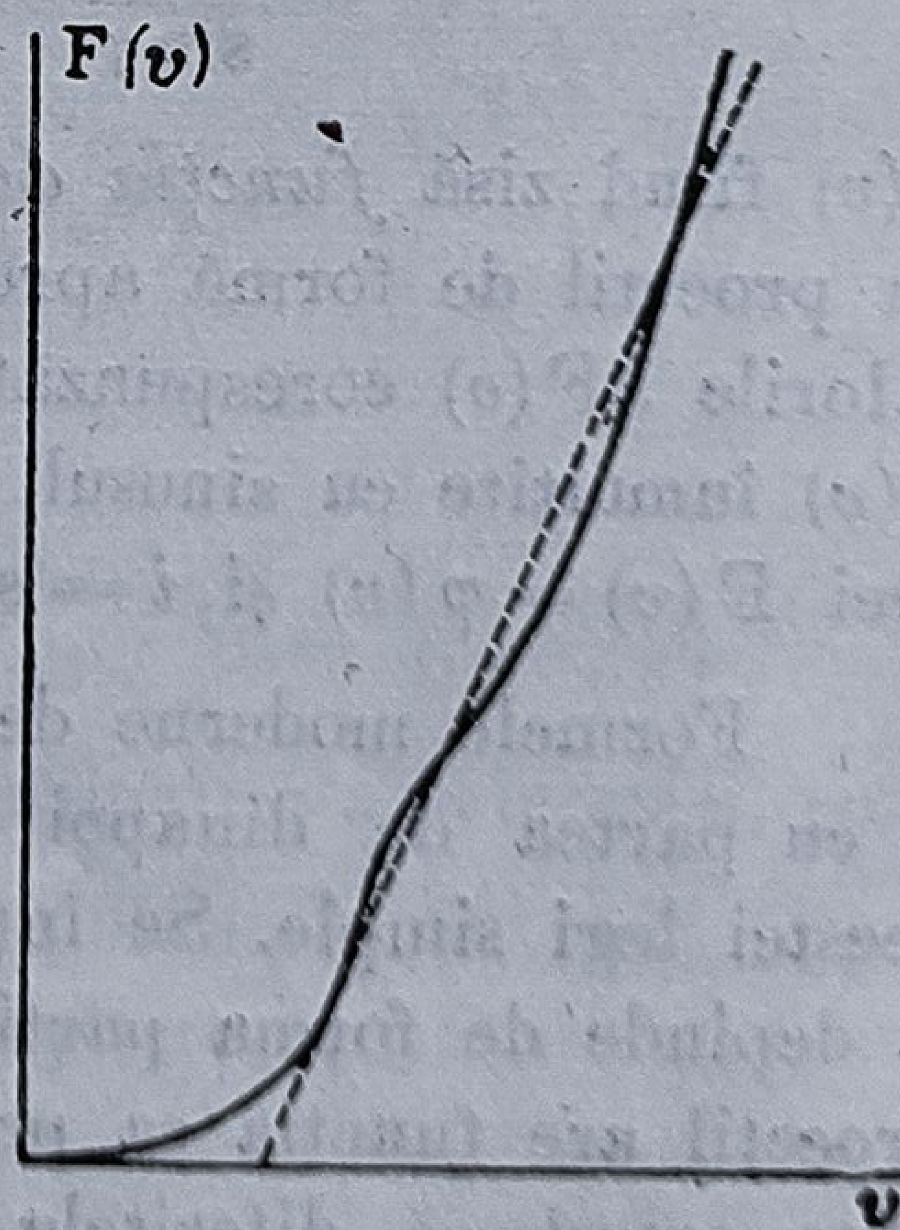


Fig. 225

S'a căutat să se dea funcției F (v) și forme analitice. Dintre acestea, sunt mai ales de reținut următoarele două:

$F(v) = 0,13\, v^2$ pentru $v < 300\ ^m/_s$

$F(v) = 400\,(v - 260)$ „ $v > 300\ ^m/_s$

ceea din urmă fiind datorită *Generalului Chapel*, care a mai indicat și formula

$$F(v) = K\,(A + \sin \varphi)\, v^2$$

$$\text{cu} \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{v - 320}{140}, \quad A = 1{,}89, \quad K = 0{,}13713$$

care se aplică pe toată întinderea funcţiei $F(v)$.

In unele calcule, în loc de funcţia $F(v)$ se utilizează funcţia

$$f(v) = \frac{F(v)}{v^2}.$$

Curba reprezentativă a acestei funcţii are un punct de inflexiune pentru $v = 340$ $^m/_s$ şi un maximum pentru $v = 468$ $^m/_s$.

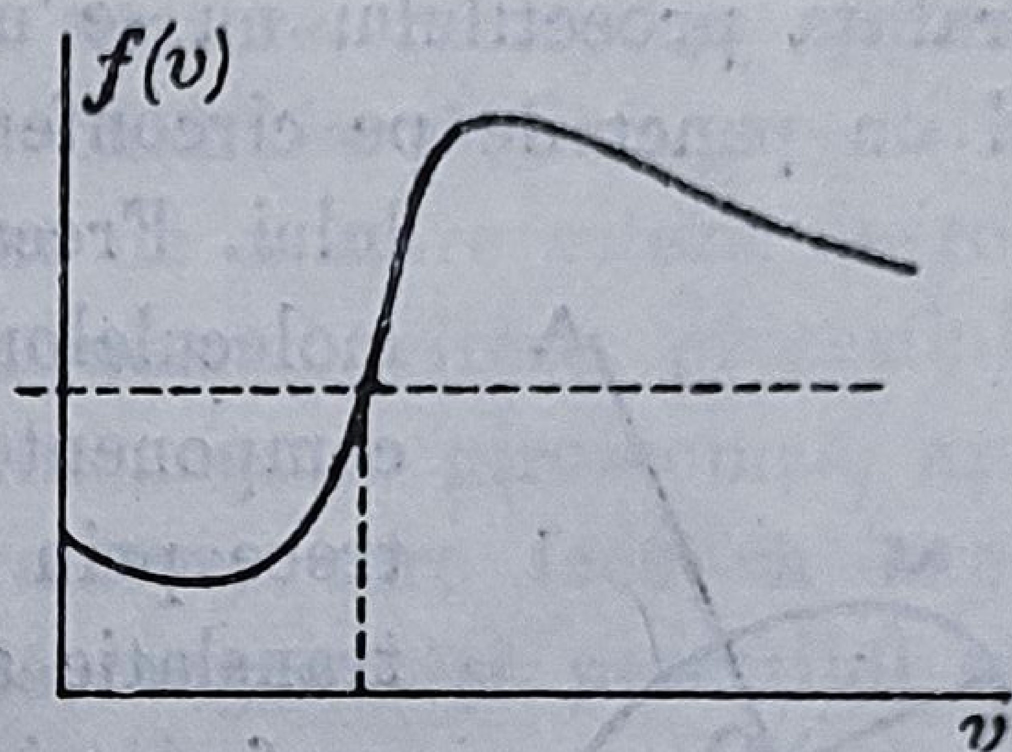


Fig. 226

Ca unităţi de măsură în calculele balistice, se ia metrul, kilogramul şi secunda.

Notă. Valorile coeficientului balistic

$$c = i \Delta \frac{a^2}{p}$$

sunt coprinse între 10^{-4} şi $10^{-4} . 20$.

Servindu-ne de aceste valori, putem să ne dăm seama de importanţa rezistenţii aerului.

Să presupunem spre exemplu că $v = 500$ $^m/_s$ şi $c = 10^{-4}$. Potrivit formulei lui *Chapel*, avem

$$w = c\,F(v) = 10^{-4} . 400 (500 - 260) = 9{,}6 .$$

Aşa dar acceleraţia rezistenţii aerului este de aceiaşi ordine de mărime ca acceleraţia gravităţii.

Să luăm însă $v = 500$ $^m/_s$ şi $c = 10^{-4} . 8$ ceea ce corespunde aproximativ unora din vechile proectile de 75 m. m.; obţinem atunci

$$w = c\,F(v) = 76{,}8 .$$

Acceleraţia este deci în acest caz de opt ori mai mare decât acceleraţia gravităţii.

3. **Frecările aerului.** Să considerăm ca şi mai sus un proectil care se deplasează în aer în direcţia axului său. Rezistenţa opusă de aer înaintării acestui proectil este datorită nu numai presiunei aerului asupra ogivei, dar şi frecărilor ocazionate de scurgerea aerului pe meridianele proectilului.

Dacă proectilul este animat de o simplă mişcare de translaţie, rezultanta acestor frecări este evident îndreptată pe linia axului proectilului şi valoarea sa intră în funcţia experimentală $F(v)$ care totalizează astfel presiunea aerului asupra proectilului şi frecările longitudinale.

Dacă proectilul este însă animat şi de o viteză de rotaţie în jurul axului său, atunci scurgerea moleculelor de aer pe suprafaţa proectilului nu se mai face în direcţia meridianelor. Fie M un punct de pe circonferinţa unei secţiuni drepte a proectilului. Frecarea din M ocazionată de scurgerea moleculelor de aer, se poate descompune în două componente: una F_1 tangentă meridianei care trece prin M şi depinzând de simpla mişcare de translaţie a proectilului şi alta F_2 tangentă circonferinţei secţiunii drepte, îndreptată în sensul contrariu al rotaţiei proectilului şi depinzând numai de această rotaţie.

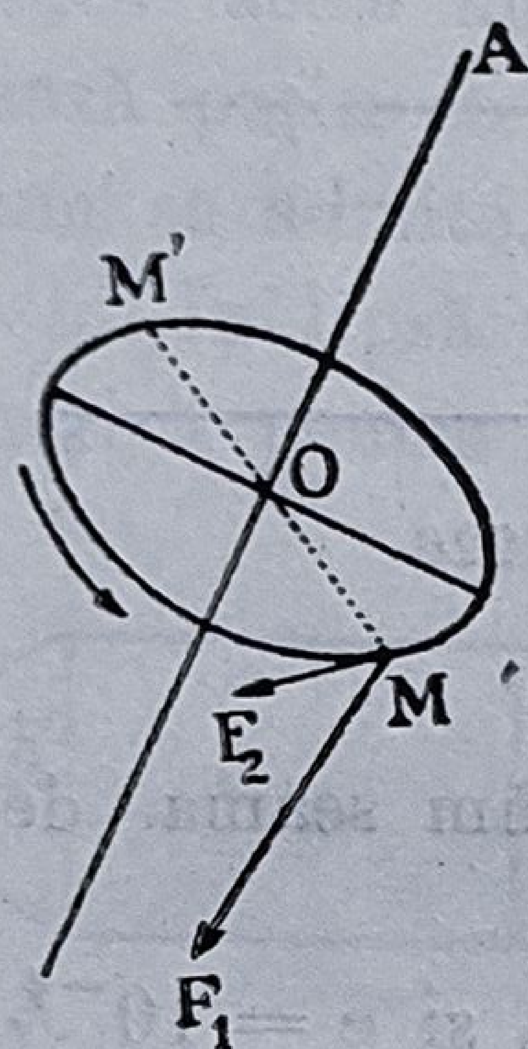


Fig. 227

Frecările longitudinale F_1 dau, după cum am mai spus, o rezultantă care intră în valoarea funcţiei experimentale $F(v)$. Cele laterale F_2 formează două câte două un cuplu, al căruia ax coincide cu acela al proectilului, aşa că rezultanta acestor cupluri este un cuplu având ca ax tot axul proectilului. Acest cuplu rezultant este fără efect asupra mişcării centrului de greutate; el tinde numai a micşora întru câtva viteza de rotaţie a proectilului în jurul axului său de figură. Viteza aceasta este însă aşa de mare că influenţa cuplului asupra ei este ca şi neglijabilă [1]).

4. Cum se pune problema mişcării proectilului în aer. La începutul mişcării sale în aer, proectilul asvârlit de o gură de foc se găseşte animat de o viteză de translaţie v_0 în direcţia prelungirii axului ţevii şi de o viteză unghiulară de rotaţie ω în jurul propriului său ax.

---

[1]) Pentru tunurile de câmp de 75 m. m. valoarea vitezei unghiulare de rotaţie a proectilului în jurul axului său este de cel puţin 700 $^m/_s$.

Pe un parcurs de câteva sute de metri, traectoria centrului său de greutate G este ca şi rectilină, axul GA al proectilului coincizând sensibil pe acest parcurs cu direcţia GT a vitezei iniţiale v_0. Apoi, din cauza greutăţii, curbura traectoriei centrului de greutate accentuându-se, tangenta GT se înclină pe orizont aşa că direcţia ei ajunge a forma un unghiu θ cu axul proectilului. De îndată ce unghiul θ ia naştere, rezistenţa aerului R devine oblică faţă de ax. Ea n'ar întârzia să dea proectilul peste cap dacă acesta n'ar fi animat de o mare viteză de rotaţie în jurul axului său. Din cauza acestei viteze, proectilul, sub efectul rezistenţei R, ia o anumită mişcare giroscopică, aşa după cum se va vedea în capitolul următor, care face ca axul său să nu se depărteze prea mult de tangentă şi proectilul să cadă astfel la pământ cu vârful înainte [1]).

Fie, într'un moment oarecare, AGT poziţia planului format de ax şi tangentă. Din cauza unghiului θ, rezistenţa aerului nu mai este aceiaşi pe meridianele proectilului. In lungul meridianei SNPQ dinspre partea tangentei GT, ea este evident mai mare decât pe meridiana opusă SKLM, însă, în două puncte simetrice faţă de planul AGT rezistenţele sunt egale şi simetric aşezate, aşa că rezultanta lor este o forţă conţinută în acest plan. *Rezultanta generală a presiunilor aerului asupra pereţilor proectilului este deci o forţă* R *conţinută în planul* AGT *numit plan de rezistenţă.* Punctul C unde forţa R întâlneşte axul GA se numeşte *centru de rezistenţă.*

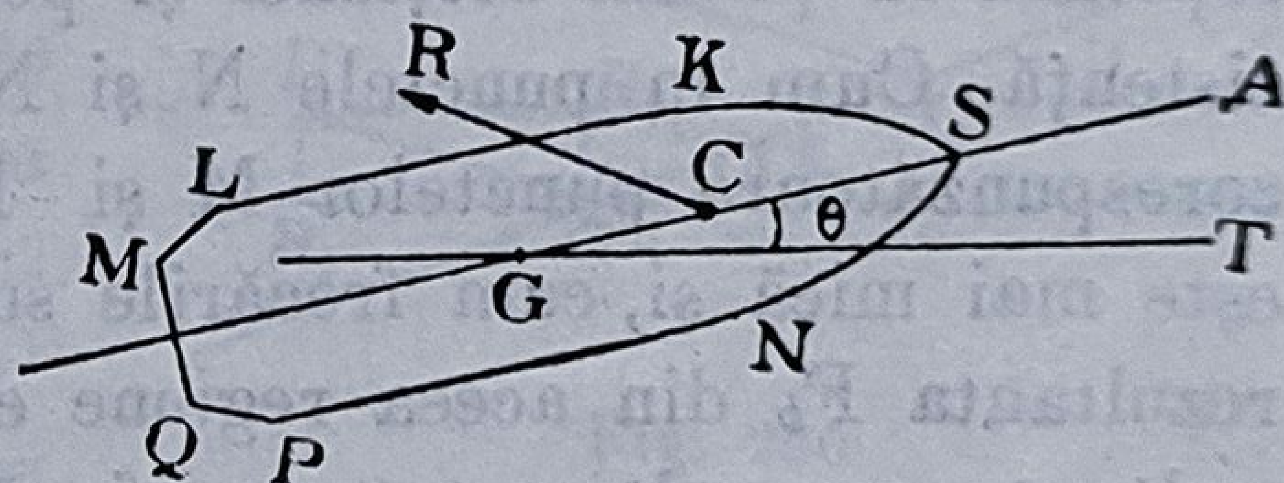


Fig. 228

Să trecem acum la chestia frecărilor. Considerând o secţiune dreaptă a proectilului de centru O, fie: M un punct de pe circonferinţa secţiunii, F_1 frecarea tangenţială a moleculelor de aer din M pe suprafaţa proectilului care ar înainta fără a se

---

[1]) Aceasta însă numai în tragerile obişnuite de artilerie, iar nu şi în acelea prea vecine de verticală.

învârti şi F_2 frecarea moleculelor tangentă circonferinţei în ipoteza că proectilul s'ar învârti stând pe loc.

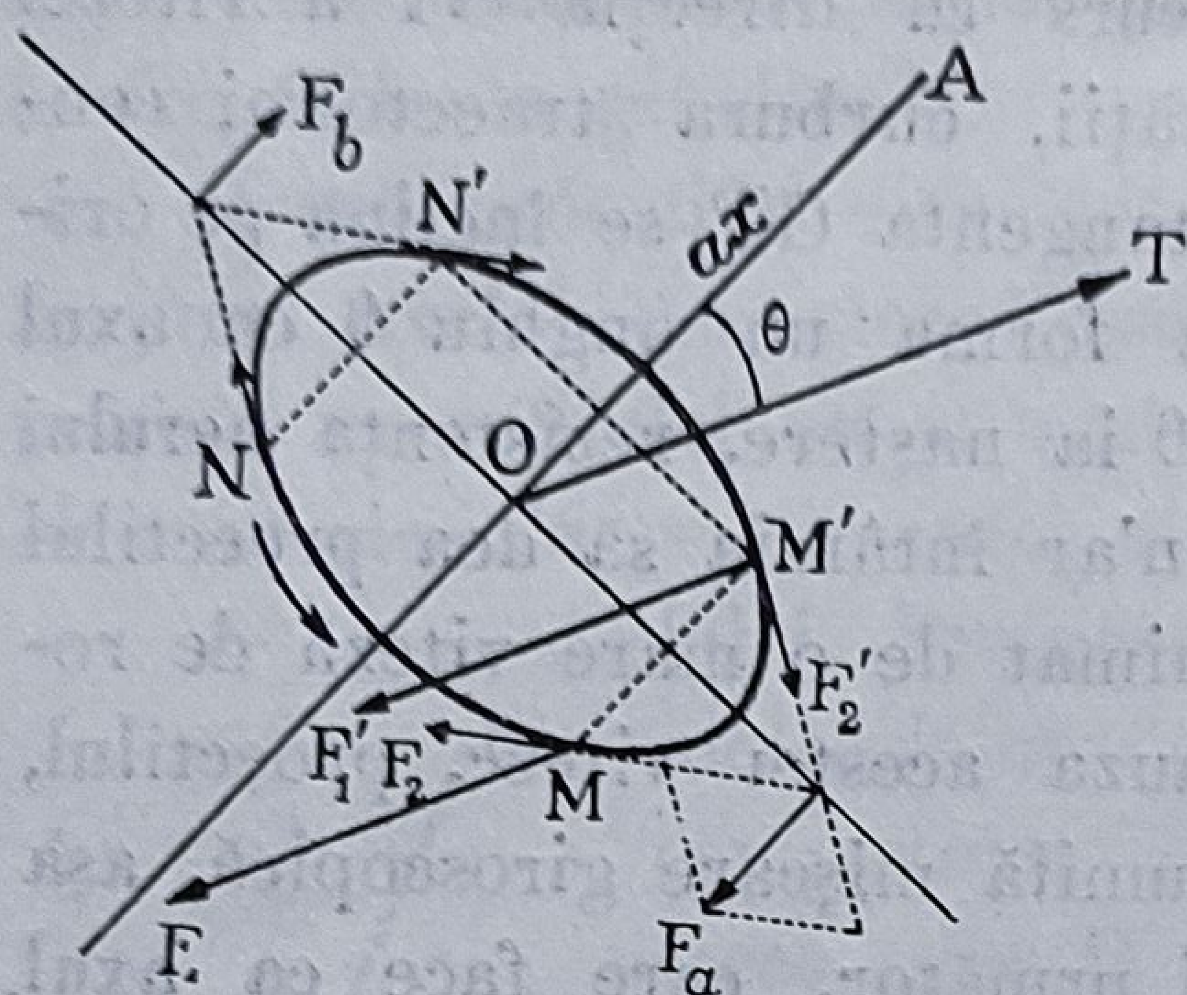


Fig. 229

In punctul M', simetricul lui M în raport de planul de rezistenţă, frecarea F'_1 este egală cu F_1 şi simetrică faţă de acest plan, aşa că rezultanta lor este coprinsă în planul de rezistenţă. Toate aceste frecări longitudinale dau prin urmare o rezultantă generală coprinsă în planul de rezistenţă, a cărei valoare intră în valoarea rezistenţei aerului R.

Frecarea F'_2 din punctul M' este egală ca mărime cu F_2 şi simetrică faţă de planul de rezistenţă cu F_2 luată în sens contrariu. Rezultanta frecărilor F_2 şi F'_2 este deci o forţă F_a coprinsă în planul secţiunei şi perpendiculară pe planul de rezistenţă. Cum în punctele N şi N' de pe spinarea proectilului, corespunzătoare punctelor M şi M' din faţă, presiunea aerului este mai mică şi, cum frecările sunt proporţionale cu presiunile, rezultanta F_b din aceea regiune este mai mică decât F_a. *Rezultanta generală a tuturor frecărilor laterale este deci o forţă* F *perpendiculară pe planul de rezistenţă şi aplicată într'un punct al acestui plan situat faţă de ax de aceiaşi parte ca tangenta.* Această rezultantă este de altfel cu atât mai mare cu cât unghiul θ este el însuşi mai mare, de oare-ce θ crescând frecările F_a cresc pe când frecările F_b se micşorează.

In ceea ce priveşte sensul vectorului reprezentativ al forţei F, se va ţine socoteală, că dacă după cum este cazul figurei, rotaţia proectilului are loc dela dreapta la stânga, observatorul culcat pe acest vector, transportat paralel cu el însuşi în centrul de greutate G, ca origină, trebue să vadă rotaţia care aduce pe GA peste GT dela stânga la dreapta; el trebue din potrivă să vadă această rotaţie ca având loc dela dreapta la stânga, dacă proectilul se învârteşte dela stânga la dreapta.

Potrivit teoriei generale a mişcării unui solid liber, determinarea mişcării unui proectil în aer depinde de integraţiunea unui sistem de şease ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea, dintre care trei corespund la mişcarea centrului de greutate G sub acţiunea greutăţii mg şi a celor două forţe R şi F transportate paralel cu ele însăşi în punctul G, iar celelalte trei corespund la mişcarea proectilului în jurul centrului său de greutate sub acţiunea forţelor R şi F. Problema luată astfel ar fi însă foarte complicată. Ea se simplifică în felul următor:

a). Pentru determinarea mişcării centrului de greutate, se neglijează forţa F. Rămân atunci aplicate în G numai cele două forţe mg şi R. Forţa R se descompune apoi în planul de rezistenţă în componenta R_t de pe direcţia tangentei GT şi în componenta R_n perpendiculară pe această direcţie. *Cum experienţele de tragere au dovedit că unghiul* θ *dintre axul* GA *al proectilului şi tangenta* GT *rămâne totdeauna mic*, unghiul pe care îl formează direcţia rezistenţei R cu tangenta este şi el mic, aşa că forţa R_t este ca şi egală cu R. In consecinţă, se studiază mai întâi mişcarea centrului de greutate G sub acţiunea greutăţii mg şi a rezistenţei experimentale R_t şi pe urmă se determină influenţa pe care o are asupra acestei mişcări componente R_n a rezistenţei.

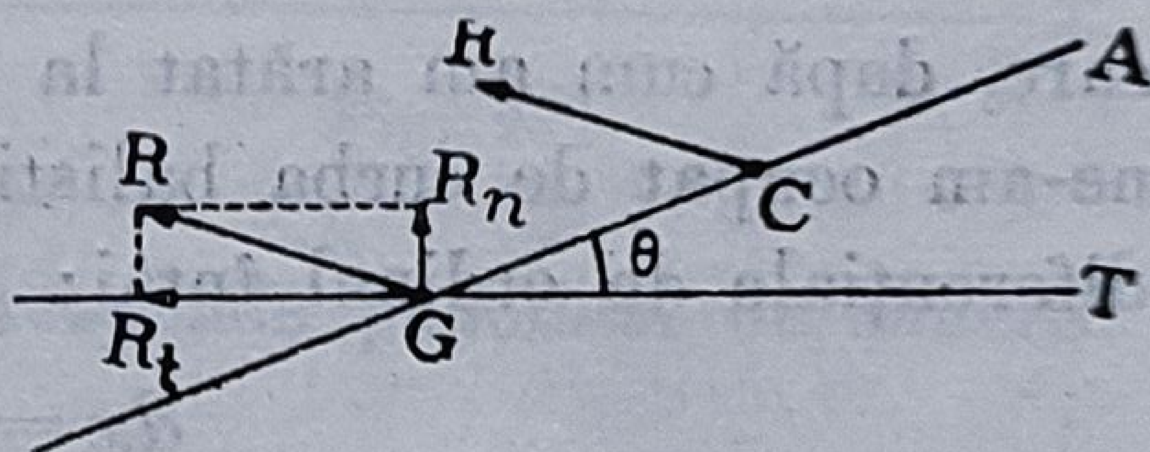


Fig. 230

Sub acţiunea forţelor mg şi R_t, centrul de greutate G descrie o traectorie coprinsă în planul proectant vertical al vitezei iniţiale v_0. Forţa R_n tinde ca să scoată pe G din acest plan, dând naştere prin componenta ei orizontală, perpendiculară pe tangentă, la abaterea zisă *Derivaţiunea* [1]). Cum însă poziţia forţei R_n depinde de orientarea în spaţiu a planului de rezis-

[1]) Cealaltă componentă a forţei R_n, perpendiculară pe tangentă şi coprinsă în planul vertical al traectoriei, are un efect ca şi nul asupra mişcării centrului de greutate, fiind succesiv orientată şi la scurte intervale de timp când deasupra când dedesubtul tangentei, după cum vom arăta la capitolul *Derivaţiunii proectilelor*.

tenţă A GT în care se află ea coprinsă, studiul derivaţiunii se face în urma aceluia al mişcării proectilului în jurul centrului său de greutate, care precizează variaţia de poziţie a planului A GT în cursul mişcării proectilului în aer.

b) După studiul mişcării centrului de greutate, se trece la acela al mişcării proectilului în jurul acestui centru sub simpla acţiune a rezistenţei R din punctul C. Se determină apoi influenţa forţei F asupra acestei mişcări.

5. **Ecuaţiile generale ale mişcării centrului de greutate.** Centrul de greutate mişcându-se ca un punct material de greutate mg supus unei rezistenţe tangenţiale $R = mc\,F(v)$, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sale sunt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\,mc\,F(v)\cos\tau$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\,mc\,F(v)\sin\tau - mg$$

care, după cum am arătat la pag. 80 a Cursului nostru unde ne-am ocupat de curba balistică, revin la următoarele 4 ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi:

$$dx = v\cos\tau\,dt$$

$$dy = v\sin\tau\,dt$$

$$d(v\cos\tau) = \frac{c}{g}\,v\,F(v)\,d\tau$$

$$v\,d\tau = -\,g\cos\tau\,dt.$$

Ecuaţia a treia poartă după cum ştim numele de *ecuaţia hodografului*. Dacă $F(v)$ ar fi o funcţie analitică iar coeficientul balistic c o constantă, integraţiunea sistemului de ecuaţii s'ar face integrând mai întâi ecuaţia hodografului care nu ar conţine decât variabilele v şi τ. In realitate însă, funcţia $F(v)$ nu este cunoscută decât prin valorile sale numerice iar coeficientul c ştim că depinde de densitatea Δ a aerului şi prin urmare de alti-

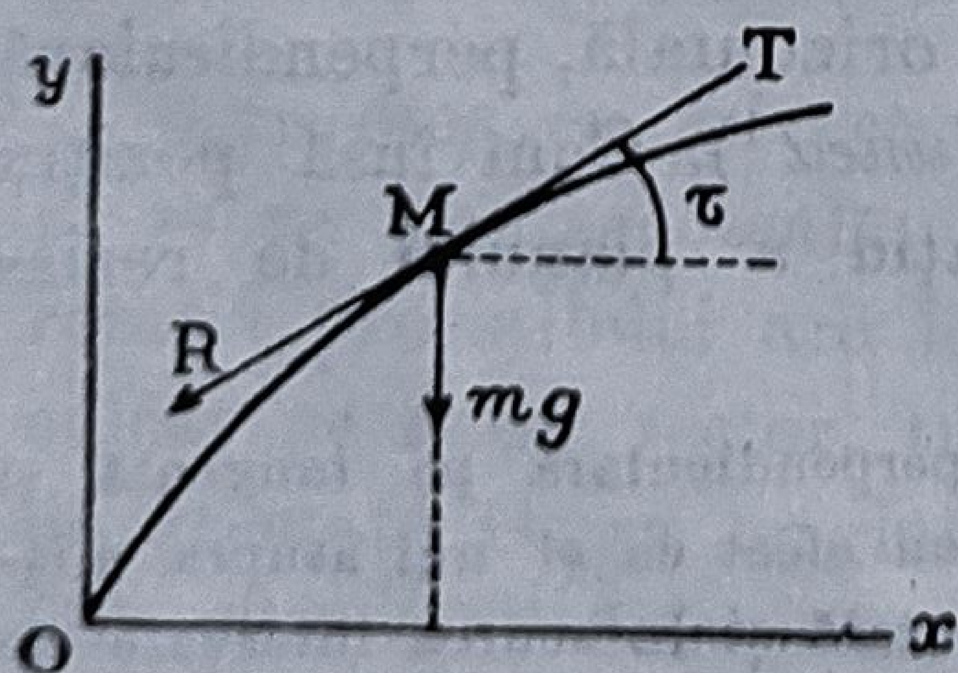


Fig. 231

tudinea y. In asemenea condiţii, integraţiunea sistemului, după regulele obişnuite de calcul, dă loc la mari dificultăţi.

Pentru evitarea acestora, s'au propus diferite metode de rezolvare, lipsite ce este drept de rigurozitate matematică, dar conducând totuşi la rezultate suficient de satisfăcătoare pentru trebuinţele practicei artileristice. Dintre aceste metode, aceea care se poate aplica în toate cazurile de trageri şi dă rezultatele cele mai precise este *metoda zisă a integraţiunii pe arcuri succesive.*

6. **Calculul traectoriilor prin metoda integraţiunii pe arcuri succesive.** In această metodă, curba balistică, cu începere din origina O, se divide în arcuri a căror amplitudine $\tau_1 - \tau_2$ nu trece de 3 grade şi se calculează succesiv prin cuadraturi elementele extremităţilor fiecăruia dintre aceste arcuri până când se ajunge prin încercări la un y nul, care corespunde punctului de cădere al proectilului.

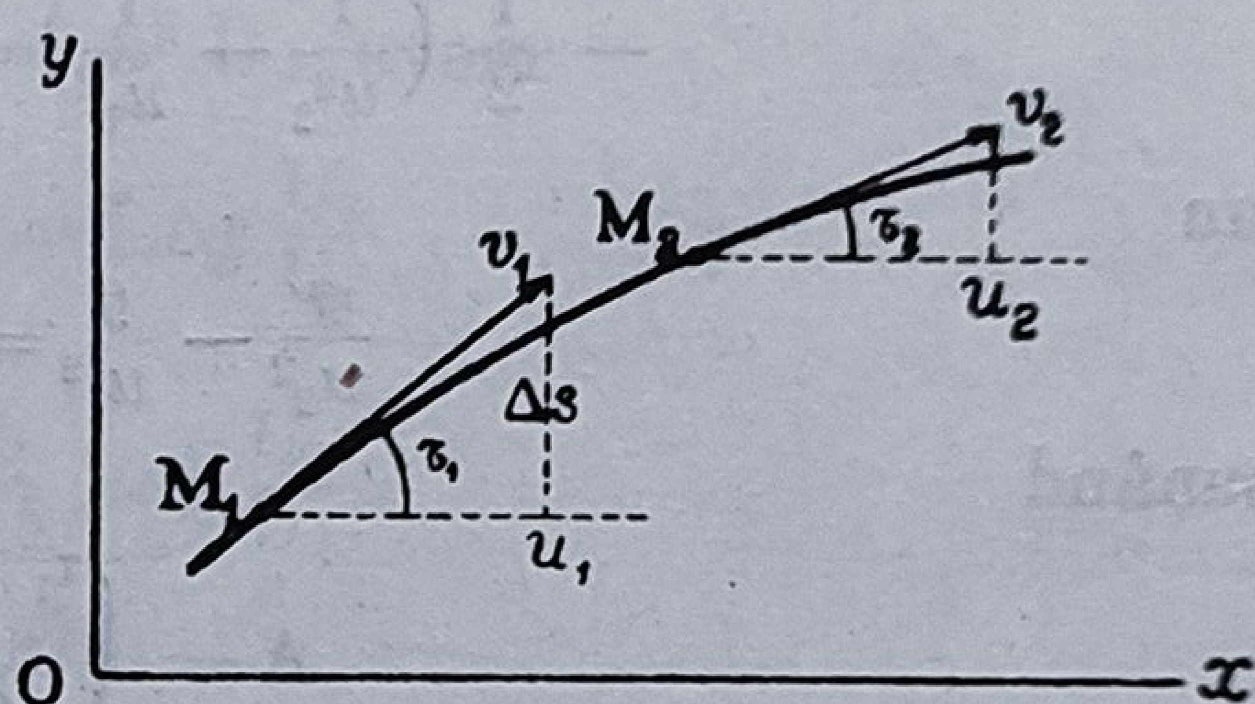


Fig. 232

Iată cum se aplică această metodă în Franţa, la poligonul dela *Gâvre.*

Se asimilează pe întinderea arcului de calculat funcţia $F(v)$ cu forma analitică βv^2. Scriind atunci

$$F(v) = \beta v^2$$

ecuaţia hodografului

$$d(v \cos \tau) = \frac{c}{g} v F(v) d\tau$$

devine, punând $v \cos \tau = u$, [1])

$$du = \frac{c}{g} \beta v^3 d\tau$$

sau încă

$$du = \frac{c}{g} \beta \frac{u^3}{\cos^3 \tau} d\tau .$$

[1]) După cum s'a văzut la pag. 80, viteza orizontală u descreşte necontenit.

Productul $c\beta$ nu este o constantă, căci c depinde de y iar β este numărul variabil care înmulţit cu v^2 reproduce valoarea numerică $F(v)$. In lungul unui arc $M_1 M_2$ se consideră totuşi acest product ca fiind constant şi egal în consecinţă cu o valoare mijlocie care se determină aşa după cum vom arăta mai departe. Punând deci $c\beta = b$, avem

$$\frac{du}{u^3} = \frac{b}{g} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}$$

de unde, considerând pe b constant şi integrând dela τ_1 la τ_2,

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_1^2}\right) = \frac{b}{g} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}$$

sau

$$\frac{g}{u_2^2} - \frac{g}{u_1^2} = 2\,b\,A$$

punând

$$A = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}.$$

Pentru valorile A există table numerice. Scriind pentru prescurtare

$$\frac{g}{u^2} = U$$

obţinem astfel egalitatea

$$U_2 = U_1 + 2\,b\,A$$

care ne dă pe v_2 dacă se cunoaşte v_1 din calculele anterioare.

Trebue să mai determinăm pe x_2, y_2 şi t_2 care corespund punctului M_2, adică creşterile Δx, Δy şi Δt. Pentru aceasta se determină mai întâi lungimea Δs a arcului $M_1 M_2$, care ne va servi, după cum se va vedea, la calculul celor trei creşteri.

Ori, plecând dela ecuaţia

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c\,F(v) \cos \tau = -bv^2 \cos \tau$$

pe care o putem scrie

$$\frac{d\,(v \cos \tau)}{dt} = \frac{du}{dt} = -b\,v \frac{u}{\cos \tau} \cos \tau$$

adică

$$\frac{du}{dt} = -bv\,u$$

sau

$$\frac{du}{u} = -bv\,dt = -b\,ds$$

avem, integrând dela u_1 la u_2,

$$\text{Log}\,\frac{u_1}{u_2} = b\,\Delta\,s$$

de unde

$$\Delta\,s = \frac{1}{b}\,\text{Log}\,\frac{u_1}{u_2}.$$

Insă, potrivit egalităţii $g = u^2\,U$, avem

$$2\,\text{Log}\,\frac{u_1}{u_2} = \text{Log}\,\frac{U_2}{U_1}$$

deci

$$\Delta\,s = \frac{1}{2b}\,\text{Log}\,\frac{U_2}{U_1}$$

sau, trecând la logaritmii zecimali,

$$\Delta s = \frac{1}{2\,b\,\log e}\cdot\log\frac{U_2}{U_1}.$$

Aceasta este formula care dă pe Δs. Pentru calculul lui Δx şi Δy, plecăm dela egalităţile

$$dx = ds\,.\,\cos\tau\,,\qquad dy = ds\,\sin\tau$$

care ne dau, însemnând prin λ şi μ valorile mijlocii ale lui $\cos\tau$ şi $\sin\tau$ în intervalul dela τ_1 la τ_2,

$$\Delta x = \lambda\,\Delta s\,,\qquad \Delta y = \mu\,\Delta s$$

cu

$$\lambda = \frac{1}{2}\,(\cos\tau_1 + \cos\tau_2)\,,\qquad \mu = \frac{1}{2}\,(\sin\tau_1 + \sin\pi_2).$$

Insfârşit, egalitatea

$$ds = v\,dt$$

ne dă, în aceiaşi ordine de aproximaţie,

$$\Delta s = \frac{1}{2}\,(v_1 + v_2)\,\Delta t$$

de unde

$$\Delta t = 2\,\frac{\Delta s}{v_1 + v_2}.$$

Aşa dar, plecând dela unghiul de tragere τ_o şi viteza iniţială v_o şi luând o amplitudine de cel mult 3 grade, elementele extremităţii arcului respectiv, adică elementele

$$v_2, \quad \Delta s, \quad \Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta t$$

se vor calcula prin formulele

$$U_2 = U_1 + 2b\,A$$

$$\Delta s = \frac{1}{2\,b \log e} \cdot \log \frac{U_2}{U_1}$$

$$\Delta x = \lambda\,\Delta s, \qquad \Delta y = \mu\,\Delta s$$

$$\Delta t = 2\,\frac{\Delta s}{v_1 + v_2}$$

unde

$$v_1 = v_0, \qquad \tau_1 = \tau_0, \qquad \tau_2 = \tau_0 - 3$$

$$A = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}$$

şi aşa mai departe.

Toate aceste calcule se bazează pe *valoarea atribuită factorului b*. Această valoare se ia egală cu aceea pe care o dă egalitatea.

$$b = c\,\beta = i\,\Delta(y)\,\frac{a^2}{p}\,f(v) \qquad \left[f(v) = \frac{F(v)}{v^2}\right]$$

în care facem

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Cum însă nu cunoaştem nici pe y_2 nici pe v_2, se procedează prin încercări în felul următor:

Se ia mai întâi $y_2 = y_1$ şi $v_2 = v_1$ deci

$$b' = i\,\Delta(y_1)\,\frac{a^2}{p}\,f(v_1)$$

şi cu această valoare executându-se calculele de mai sus, se obţin pentru y_2 şi v_2 două valori y_2' şi v'_2. Se ia apoi

$$y = \frac{y_1 + y_2'}{2}, \qquad v = \frac{v_1 + v_2'}{2}$$

şi prin urmare

$$b'' = i\,\Delta\left(\frac{y_1 + y_2'}{2}\right)\frac{a^2}{p}\,f\left(\frac{v_1 + v_2'}{2}\right)$$

şi cu această nouă valoare a lui b repetându-se aceleaşi calcule, se ajunge la două alte valori y_2'' şi v_2''. Dacă s'a gasit că $y_2'' = y_2'$ şi $v_2'' = v_2'$, atunci valoarea definitivă a lui b este b''. Dacă nu, atunci se continuă aceleaşi operaţii până se obţin asemenea egalităţi. In general, acest rezultat apare după vreo 3 sau 4 operaţii.

Densitatea aerului $\Delta(y)$ se calculează după cum am spus la pag. 424 prin formula

$$\Delta(y) = \Delta_0 \cdot e^{\frac{-y}{10.000}} \cdot$$

Insfârşit, cum în formula $U_2 = U_1 + 2\,b\,A$ intră valoarea lui g, se ţine socoteală de variaţia lui g cu altitudinea aşa după cum s'a arătat la pag. 421.

Notă. Această metodă de calcule comportă două feluri de erori. Una, datorită faptului că se presupune b constant în lungul unui arc şi aceasta are influenţă asupra determinării vitezei v_2 şi deci şi asupra celorlalte elemente; a doua, că se determină creşterile Δx, Δy şi Δt ca şi cum arcul Δs ar fi un element rectilin.

In practică însă, eroarea rezultantă este slabă dacă log b nu variază cu mai mult de 0,02 când se trece dela un arc la următorul şi dacă amplitudinea arcului este de cel mult 3 grade.

Precizia este bună dacă diferenţa de viteze $v_2 - v_1$ nu trece de:

20 la 30 m.	pentru	$v < 500$ m.
80 m.	„	$500 < v < 800$ m.
150 m.	„	$v > 800$ m.

II. MIŞCAREA PROECTILULUI IN JURUL CENTRULUI SĂU DE GREUTATE.

Fie într'un moment oarecare, GT tangenta traectoriei centrului de greutate al unui proectil şi O punctul situat pe această tangentă la o distanţă egală cu unitatea de punctul G. Prin punctul O să ducem un plan P perpendicular pe tangentă şi să ne închipuim că acest plan rămâne solidar tangentei pe tot timpul cât se mişcă proectilul în aer.

In planul P să considerăm două axe dreptunghiulare Ou şi Ov, dintre care Ou orizontal şi îndreptat spre dreapta planului vertical al traectoriei pe care este perpendicular, iar Ov coprins în acest plan vertical şi îndreptat în sus. Fie M punctul unde axul GA al proectilului, prelungit, întâlneşte planul P.

In capitolul de faţă ne vom ocupa cu *studiul mişcării punctului* M *în raport de axele* Ou *şi* Ov. Cunoaşterea acestei mişcări lămureşte, după cum se înţelege, mişcarea însăşi a axului proectilului în jurul tangentei şi deci mişcarea proectilului în jurul centrului său de greutate.

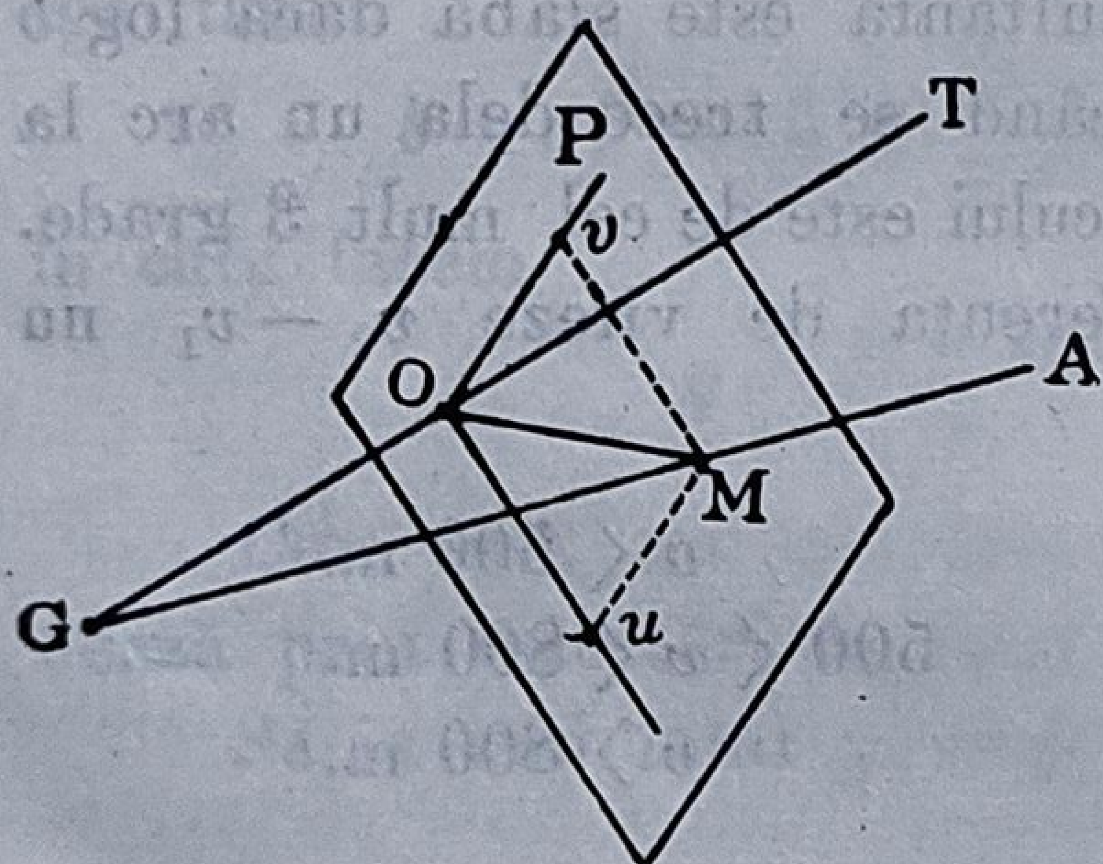


Fig. 233

Vom trece apoi la chestiunea *Stabilităţii* proectilelor pe traectorie şi la aceea a *Derivaţiunii*, care sunt strâns legate de problema mişcării axului proectilului, punând totdeodată în evidenţă concluziunile de ordin practic ce rezultă din toate aceste studii atât pentru buna ţinută a proectilelor pe traectorii, de care depinde precizia tragerilor, cât şi pentru construcţia proectilelor.

I. ECUAŢIILE GENERALE ALE MIŞCĂRII.

1. **Axe cordonate.** Vom raporta mişcarea proectilului în jurul centrului său de greutate G la trei axe cordonate dreptunghiulare Gx, Gy, Gz trecând prin acest punct şi definite astfel:

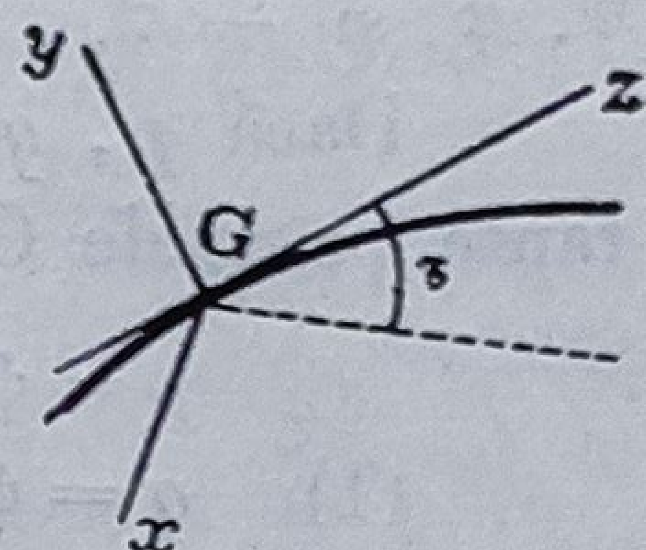


Fig. 234

Gz, îndreptat pe tangenta traectoriei lui G, în sensul mişcării;

Gx, perpendicular pe planul vertical al acestei traectorii şi deci orizontal, îndreptat spre dreapta;

Gy, perpendicular pe cele două precedente, coprins în planul traectoriei lui G şi îndreptat în sus.

Poziţia proectilului faţă de aceste axe va fi definită, potrivit teoriei generale a mişcării unui solid în jurul unui punct fix (pag. 339) prin poziţia respectivă a unui alt sistem de trei axe dreptunghiulare GX, GY, GZ, invariabil legate proectilului, dintre care, GZ, coincizând cu linia însăşi a axului proectilului iar celelalte două coprinse în planul secţiunei sale drepte care trece prin G.

Elementele care determină poziţia acestui sistem faţă de sistemul Gx, Gy, Gz sunt după cum ştim, cele trei unghiuri ale lui *Euler*: ψ, θ şi φ.

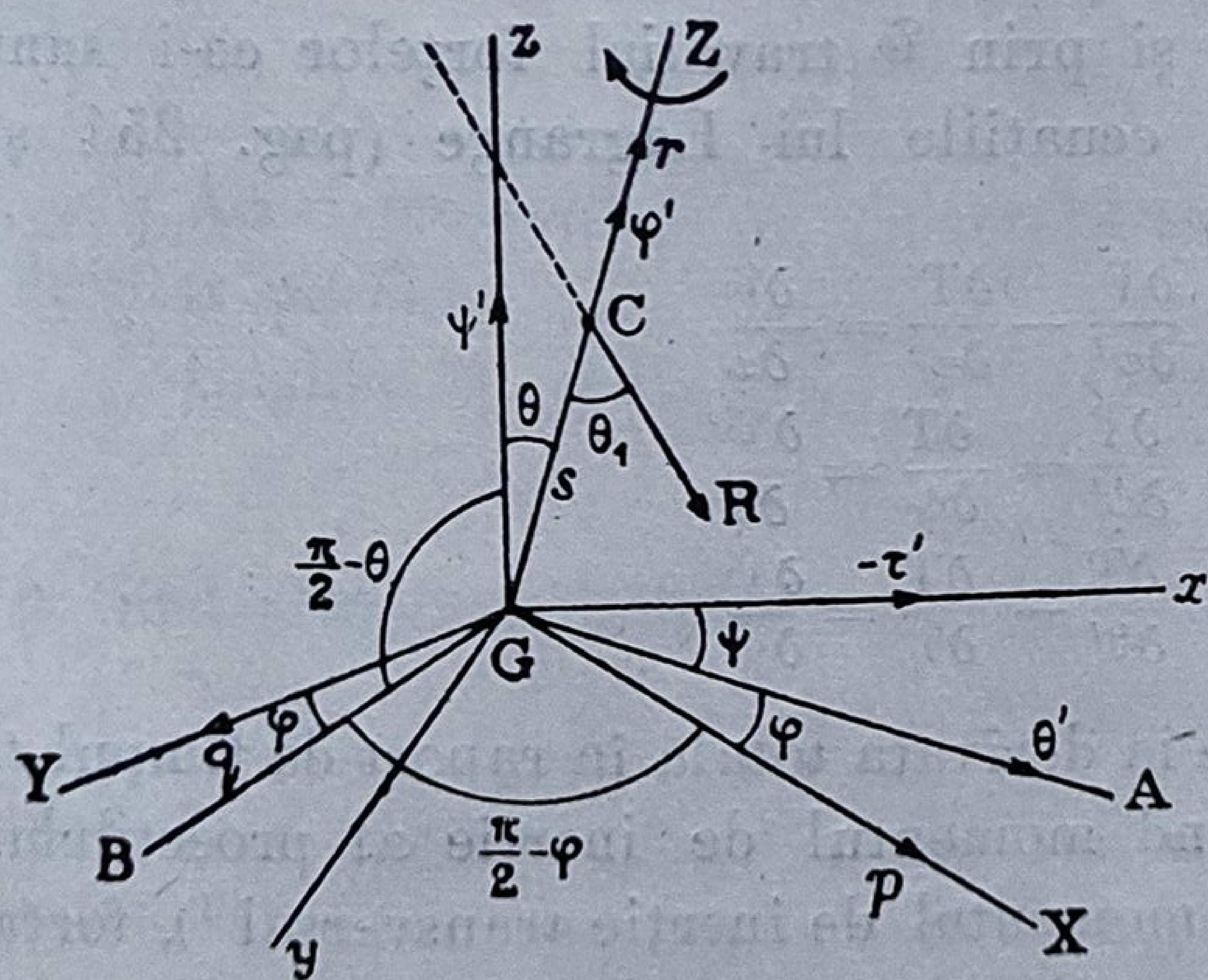


Fig. 235

Mai ştim de asemenea că se trece dela o poziţie a corpului la alta infinit vecină, prin cele trei rotaţii elementare:

$\delta\psi$, în jurul lui Gz
$\delta\theta$, „ „ „ GA
$\delta\varphi$, „ „ „ GZ

la care trebue să mai adăogăm rotaţia $-\delta\tau$ în jurul lui Gx,

care rezultă din înclinarea tangentei Gz pe orizont, $\delta\tau$ fiind totdeauna negativ.

Mişcarea elementară a proectilului în jurul centrului său de greutate va fi deci o rotaţie rezultând din cele patru rotaţii precedente, reprezentate respectiv pe figură prin vectoarele ψ', θ', φ' şi $-\tau'$.

Dacă p, q, r, sunt componentele vectorului rotaţiei rezultante pe axele GX, GY, GZ, ştim (pag. 345) că:

$$(1)\quad \begin{aligned} p &= \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi - \tau' \cos(X, x) \\ q &= \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi - \tau' \cos(Y, x) \\ r &= \psi' \cos\theta \qquad + \varphi' \qquad - \tau' \cos(Z, x). \end{aligned}$$

Avem de altfel următoarele relaţii trigonometrice cunoscute din Geometria analitică:

$$(2)\quad \begin{aligned} \cos(X, x) &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta \\ \cos(Y, x) &= -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta \\ \cos(Z, x) &= \sin\theta \sin\psi. \end{aligned}$$

2. **Ecuaţiile lui Lagrange**. In loc de ecuaţiile lui *Euler* (pag. 344) este mai avantajos de a ne servi de acelea ale lui *Lagrange*, care dau loc la calcule mai simple conducând însă bine înţeles la aceleaşi rezultate.

Luând ca parametri pe φ, ψ şi θ şi însemnând prin T forţa vie a proectilului şi prin $\mathfrak{T}$ travaliul forţelor ce-i sunt direct aplicate, ştim că ecuaţiile lui Lagrange (pag. 254 şi 256) sunt:

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \varphi}$$

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \psi}$$

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \theta}$$

unde D_t însemnează că se ia derivata totală în raport de timpul t.

1°. **Forţa vie.** C fiind momentul de inerţie al proectilului în jurul axului său şi A momentul de inerţie transversal [1]), forţa vie T are ca expresie (pag. 346).

---

[1]) Raportul $\frac{A}{C}$ variază pentru proectile dela 5 la 10.

$$(3) \qquad 2\,T = A\,(p^2 + q^2) + Cr^2$$

unde $p^2 + q^2$ şi r^2 au următoarele valori care rezultă din relaţiile (1) şi (2) de mai sus:

$$4) \quad p^2+q^2=\theta'^2+\psi'^2\sin^2\theta-2\tau'(\theta'\cos\psi-\psi'\sin\theta\cos\theta\sin\psi)+\tau'^2(\cos^2\psi+\sin^2\psi\cos^2\theta)$$

$$5) \quad r^2=\psi'^2\cos^2\theta+2\psi'\varphi'\cos\theta+\varphi'^2+\tau'^2\sin^2\theta\sin^2\psi-2\tau'\sin\theta\sin\psi(\varphi'+\psi'\cos\theta).$$

2⁰ **Travaliul elementar al forţelor direct aplicate.** Forţele care lucrează asupra proectilului sunt rezistenţa R a aerului, coprinsă în planul de rezistenţă zGZ şi aplicată în centrul de rezistenţă C, şi rezultanta F a frecărilor laterale care, după cum ştim, este perpendiculară pe planul zGZ şi aplicată într'un punct al planului de rezistenţă situat faţă de ax de aceiaşi parte ca tangenta. Presupunând că proectilul se învârteşte în jurul axului său dela stânga la dreapta, rezultanta F are, după cum s'a explicat în capitolul precedent, aceiaşi direcţie şi acelaşi sens ca dreapta GA din planul xGy.

Travaliul rezistenţei R. Rezistenţa R face cu axul GZ al proectilului un unghiu θ_1, vecin de unghiul θ pe care-l formează între ele axul GZ şi tangenta Gz a traectoriei centrului de greutate.

Fie $GC = s$. Momentul lui R în raport de G este

$$s\,R\sin\theta_1 .$$

Acest moment fiind perpendicular pe planul zGZ, este îndreptat pe GA.

Unghiul θ_1 fiind mai mare decât θ, să punem

$$\theta_1 - \theta = \mu\theta$$

μ fiind pozitiv însă foarte mic şi variând odată cu θ. Ca urmare

$$sR\sin\theta_1 = sR\sin(1+\mu)\,\theta$$

şi, cum θ este mic, putem scrie

$$sR\sin\theta_1 = sR\,(1+\mu)\,\theta = a\theta$$

punând pentru prescurtare

$$s\,(1+\mu)\,R = a\,.$$

Travaliul rezistenţei R în deplasarea elementară a proectilului, este egal cu suma travaliurilor pe care le dă R în cele trei rotaţii componente $\delta\theta$, $\delta\varphi$ şi $\delta\psi$. Ori, după cum ştim (pag. 25) travaliul unei forţe într'o rotaţie elementară este egal cu momentul forţei în raport de axul de rotaţie înmulţit cu unghiul rotaţiei. Cum momentele lui R în raport de cele două axe Gz (rotaţie $\delta\psi$) şi GZ (rotaţie $\delta\varphi$) sunt nule şi, cum momentul în raport de GA (rotaţie $\delta\theta$) este egal cu momentul în raport de G adică egal cu $a\theta$, rezultă că travaliul rezistenţei R în deplasarea elementară a proectilului are ca expresie

$$(6) \qquad a\,\theta\,\delta\theta\,.$$

Travaliul frecărilor. Rezultanta F a frecărilor laterale este, după cum am spus, paralelă cu GA, rotaţia proectilului fiind presupusă ca având loc în sensul direct, adică dela stânga la dreapta pentru un observator culcat pe GZ cu picioarele în G.

Momentul rezultantei F în raport de punctul G este deci coprins în planul de rezistenţă zGZ. Fie M punctul de aplicaţie al acestei rezultante şi BG axul perpendicular pe GZ din planul de rezistenţă. Să reprezentăm prin GN momentul lui F în raport de G. Admiţând cu profesorul *Esclangon* [1]) că rezultanta F este proporţională cu viteza unghiulară de rotaţie ω a proectilului şi cu o constantă fizică k depinzând de natura suprafeţii proectilului, putem reprezenta cele două proecţii ale momentului GN pe GB şi GZ prin expresiunile

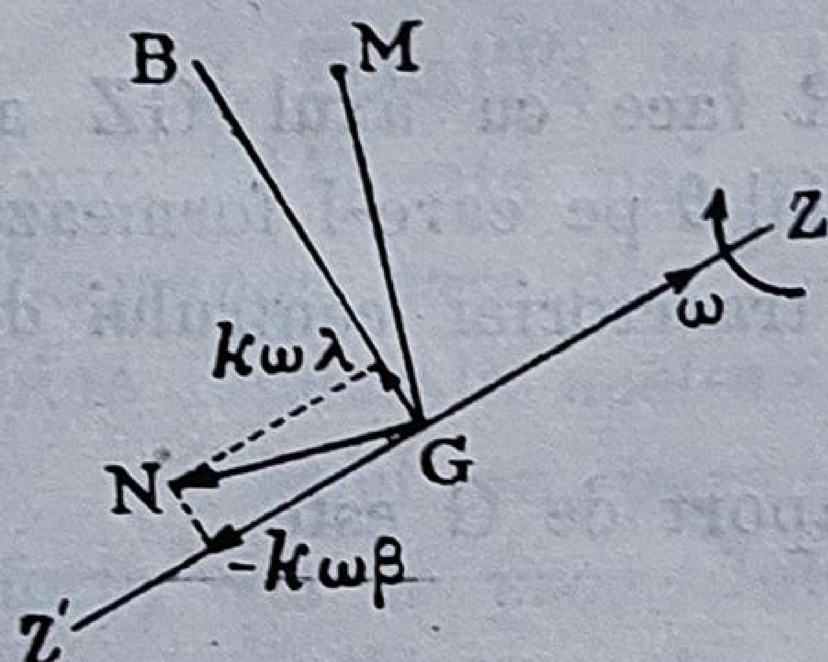


Fig. 236.

$$k\,\omega\,\lambda \qquad \text{şi} \qquad -\,k\,\omega\,\beta$$

λ şi β fiind doi factori pozitivi şi funcţii de θ. Ori, când θ este nul, ştim că rezultanta frecărilor laterale este un cuplu al căruia moment este îndreptat pe GZ', neavând astfel componentă pe GB. Factorul λ se anulează deci odată cu θ; ca urmare, vom

---

[1]) Mémorial de l'Artillerie Française, tome VI, 3-e fascicule de 1927, pag. 709 şi 717.

putea pune $\lambda = \alpha\,\theta$, α fiind o constantă pozitivă. Pe de altă parte, cum θ râmâne totdeauna mic, momentul GN se depărtează puţin de GZ′ aşa încât vom putea considera pe $-k\,\omega\,\beta$ ca invariabil şi deci pe β ca fiind o constantă.

Cele două proecţii pe GB şi pe GZ ale momentului GN vor fi astfel

$$k\,\omega\,\alpha\,\theta \qquad \text{şi} \quad -k\,\omega\,\beta$$

k, α şi β fiind trei constante.

Pentru formarea expresiei travaliului forţei F în deplasarea elementară a proectilului, ne trebuesc componentele momentului GN pe cele trei axe Gz, GZ şi GA. Ele se află proectând pe $k\,\omega\,\alpha\,\theta$ şi $-k\,\omega\,\beta$ pe fiecare din aceste axe. Obţinem, după cum se vede pe figură,

$k\,\omega\,\alpha\,\theta\,\sin\theta - k\,\omega\,\beta\,\cos\theta$ pe Gz

$-k\,\omega\,\beta$ „ GZ

o „ GA.

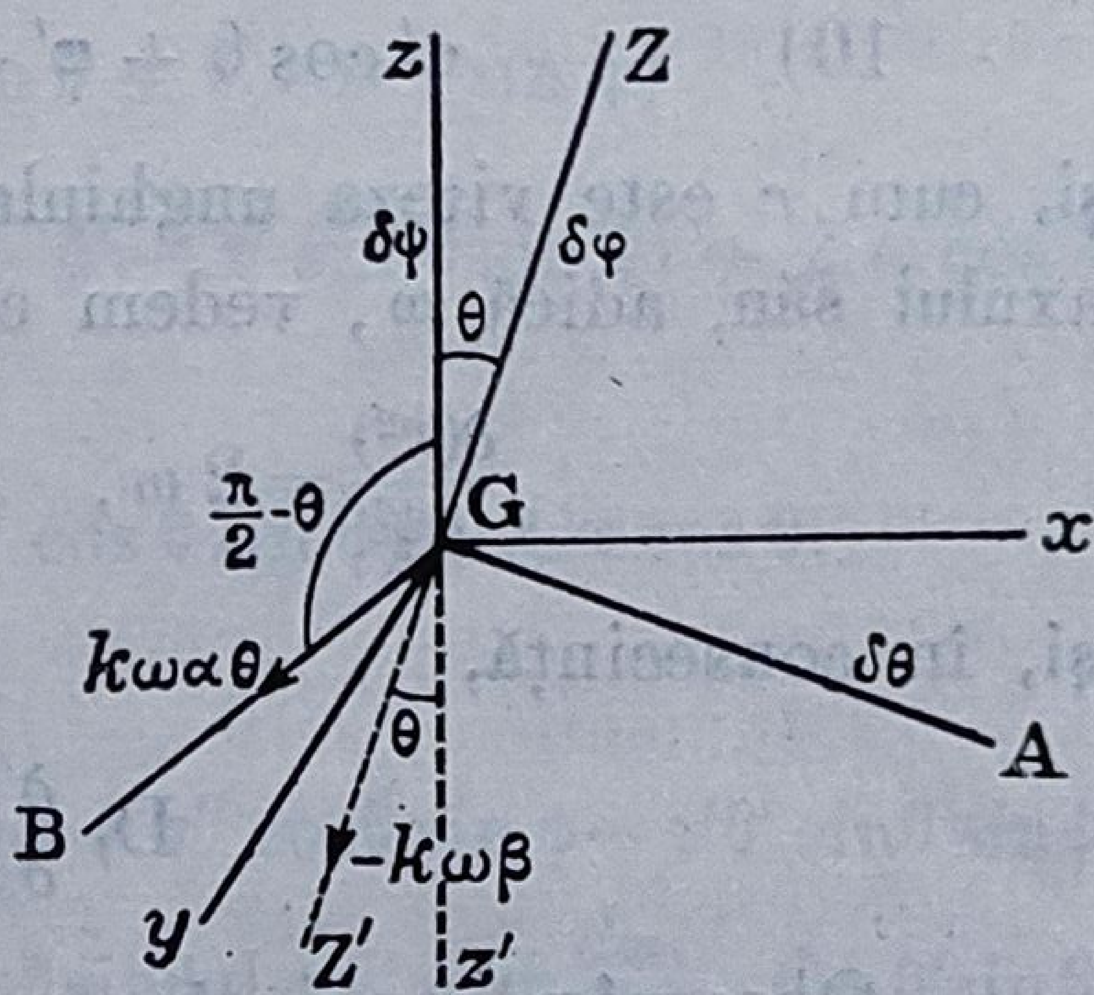


Fig. 237

Cum unghiul θ este mic, componenta de pe Gz poate fi luată ca egală cu

$$k\,\omega\,\alpha\,\theta^2 - k\,\omega\,\beta$$

înlocuind pe $\sin\theta$ prin θ şi pe $\cos\theta$ prin 1.

Expresia travaliului elementar va fi în consecinţă

$$(7) \qquad (k\,\omega\,\alpha\,\theta^2 - k\,\omega\,\beta)\,\delta\psi - k\,\omega\,\beta\,\delta\varphi\,.$$

Travaliul total. Făcând suma celor două expresiuni (6) şi (7) obţinem ca travaliu total $\delta\mathfrak{T}$ al celor două forţe R şi F care lucrează asupra proectilului:

$$(8) \qquad \delta\mathfrak{T} = a\,\theta\,\delta\theta + (k\,\omega\,\alpha\,\theta^2 - k\,\omega\,\beta)\,\delta\psi - k\,\omega\,\beta\,\delta\varphi\,.$$

3⁰ **Ecuaţiile generale ale mişcării.** Reluând ecuaţiile lui Lagrange:

$$(9) \qquad \begin{cases} D_t\,\dfrac{\partial T}{\partial\varphi'} - \dfrac{\partial T}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\varphi} \\[2ex] D_t\,\dfrac{\partial T}{\partial\psi'} - \dfrac{\partial T}{\partial\psi} = \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\psi} \\[2ex] D_t\,\dfrac{\partial T}{\partial\theta'} - \dfrac{\partial T}{\partial\theta} = \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\theta} \end{cases}$$

să înlocuim în ele diverşii termeni prin valorile lor respective, potrivit egalităţilor (3), (4), (5) şi (8).

Ecuaţia întâia. Avem, succesiv,

$$2\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = A\frac{\partial(p^2+q^2)}{\partial \varphi'} + C\frac{\partial(r^2)}{\partial \varphi'}$$

$$\frac{\partial(p^2+q^2)}{\partial \varphi'} = o\,, \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial \varphi'} = 2\,(\psi' \cos\theta + \varphi' - \tau' \sin\theta \sin\psi)\,.$$

Insă

$$10) \qquad \psi' \cos\theta + \varphi' - \tau' \sin\theta \sin\psi = r$$

şi, cum r este viteza unghiulară de rotaţie a proectilului în jurul axului său, adică ω, vedem că

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial \psi'} = 2\,\omega\,, \qquad \text{deci } \frac{\partial T}{\partial \psi'} = C\omega$$

şi, în consecinţă,

$$D_t\frac{\partial T}{\partial \varphi} = C\frac{d\omega}{dt}.$$

Observând apoi că

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = o \qquad \text{iar } \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \psi} = -k\omega\beta$$

prima din ecuaţiile lui Lagrange ne dă

$$(11) \qquad C\frac{d\omega}{dt} = -k\,\omega\,\beta$$

sau

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{C}\,\beta\,dt$$

de unde, integrând dela o la t,

$$\text{Log}\,\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{k}{C}\,\beta\,t$$

adică

$$\omega = \omega_0\, e^{-\frac{k}{C}\beta t} = \frac{\omega_0}{e^{\frac{k}{C}\beta t}}\,.$$

Viteza de rotaţie ω descreşte deci cu timpul t, însă foarte încet, din cauza marei valori a lui ω_0 şi a micei valori a lui k.

Pe un arc de traectorie, variaţia lui t fiind mică, ω poate fi considerat ca constant.

Dacă n'ar exista frecări laterale, k fiind atunci nul, ω ar rămâne tot timpul constant şi egal cu ω_0.

Ecuaţia a doua. Să considerăm acum ecuaţia a doua a lui Lagrange:

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \psi}.$$

Avem

$$\frac{\partial (p^2 + q^2)}{\partial \psi'} = 2 \sin\theta\,(\psi' \sin\theta + \tau' \cos\theta \sin\psi)$$

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial \psi'} = 2 \cos\theta\,(\psi' \cos\theta + \varphi' - \tau' \sin\theta \sin\psi) = 2\,\omega \cos\theta$$

deci

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = A \sin\theta\,(\psi' \sin\theta + \tau' \cos\theta \sin\psi) + C\omega \cos\theta$$

şi, derivând în raport de timp,

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A\,[\sin\theta\,(\psi'' \sin\theta + \psi'\theta' \cos\theta + \tau'' \cos\theta \sin\psi - \tau'\theta' \sin\theta \sin\psi + \tau'\psi' \cos\theta \cos\psi) + \theta' \cos\theta\,(\psi' \sin\theta + \tau' \cos\theta \sin\psi)] + C \cos\theta \frac{d\omega}{dt} - C\omega\theta' \sin\theta$$

sau

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A\,[\sin\theta\,(\psi'' \sin\theta + \tau'' \cos\theta \sin\psi + \tau'\psi' \cos\theta \cos\psi + 2\theta'\psi' \sin\theta \cos\theta + \tau'\theta' \sin\psi\,(1 - 2\sin^2\theta)] + C \cos\theta \frac{d\omega}{dt} - C\,\omega\,\theta' \sin\theta$$

în care vom înlocui pe $C \frac{d\omega}{dt}$ prin $-k\,\omega\,\beta$ potrivit egalităţii (11).

De asemenea

$$\frac{\partial (p^2 + q^2)}{\partial \psi} = 2\tau'\,(\theta' \sin\psi + \psi' \sin\theta \cos\theta \cos\psi) - 2\tau'^2 \theta \sin^2\theta \sin\psi \cos\psi$$

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial \psi} = -2\,\tau' \sin\theta \cos\psi\,(\varphi' + \psi' \cos\theta - \tau' \sin\theta \sin\psi) = 2\,\tau'\omega \sin\theta \cos\psi$$

deci

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = A\,[\tau'(\theta' \sin\psi + \psi' \sin\theta \cos\theta \cos\psi) - \tau'^2 \sin^2\theta \sin\psi \cos\psi] - C\tau'\omega \sin\theta \cos\psi.$$

Pentru valori mici ale lui θ, putem înlocui pe $\sin\theta$ prin θ şi pe $\cos\theta$ prin 1. Avem atunci

$$D_t \frac{\partial T}{\partial \psi'} = A[\psi''\theta^2 + 2\theta\theta'\psi' + \theta\tau''\sin\psi + \tau'(\theta\sin\psi + \psi'\theta\cos\psi - 2\theta^2\theta'\sin\psi] - K\omega\beta - C\omega\theta\theta'$$

și $\frac{\partial T}{\partial \psi} = A\,[\tau'(\theta'\sin\psi + \psi'\,\theta\cos\psi) - \tau'^2\,\theta^2\sin\psi\cos\psi] - C\,\tau'\,\omega\,\theta\cos\psi.$

Cum, în acest caz,

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \psi} = k\,\omega\,\alpha\,\theta^2 - k\,\omega\,\beta$$

ecuația a doua a lui Lagrange ne dă, după reduceri de termeni și simplificare cu factorul θ,

$$(13) \quad A\,(\theta\,\psi'' - 2\,\theta'\,\psi') - C\,\omega\,\theta' = k\,\omega\,\alpha\,\theta - A\,\tau''\sin\psi + \tau'\,(2\,A\,\theta\,\theta'\sin\psi - C\,\omega\cos\psi) - A\,\theta\,\tau'^2\sin\psi\cos\psi.$$

Ecuația a treia. In mod analog, ecuația a treia ne dă,

$$(14) \quad A(\theta'' - \theta\psi'^2) + C\omega\theta\psi' = \alpha\theta + A\tau''\cos\psi - \tau'(2A\theta^2\psi'\sin\psi + C\omega\sin\psi) - A\,\theta\tau'^2\sin^2\psi.$$

Notă. In formă prescurtată, să însemnăm prin

$$E_\varphi = 0; \qquad E_\psi = 0, \qquad E_\theta = 0$$

cele trei rezultate precedente (11), (13) și (14) la care ne-a condus aplicația ecuațiilor lui Lagrange.

Dacă în loc de aceste ecuații am fi aplicat pe acelea ale lui Euler:

$$A\,\frac{dp}{dt} + (C - A)\,rq = L$$

$$A\,\frac{dq}{dt} - (C - A)\,rp = M$$

$$C\,\frac{dr}{dt} = N$$

am fi obținut ecuațiile:

$$E_\psi \sin\varphi + E_\theta \cos\varphi = 0$$

$$E_\psi \cos\varphi - E_\theta \sin\varphi = 0$$

$$E_\varphi = 0.$$

Cele două dintâi sunt deci mult mai complicate, dând loc pentru stabilirea lor la calcule de două ori mai lungi; ele se reduc însă prin combinațiunea lor tot la

$$E_\psi = 0 \quad \text{și} \quad E_\theta = 0.$$

II. INTEGRAŢIUNE PE ARCURI SUCCESIVE.

1. **Schimbare de variabile.** Pe tangenta Gz a traectoriei centrului de greutate să considerăm punctul O situat faţă de G la unitatea de distanţă şi prin acest punct să ducem un plan P perpendicular pe Gz. Fie M punctul unde axul GZ al proectilului întâlneşte planul P şi u, v, w cordonatele acestui punct în raport de sistemul de axe Gx, Gy, Gz.

Avem, pe figură,

$$OM = OG \operatorname{tg} \theta \qquad \text{sau} \qquad OM = \theta$$

dat fiind că OG = 1 iar θ este mic. Apoi, N fiind proecţia lui M pe planul xGy:

$$u = GN \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = OM \sin\psi$$

$$v = -GN \cos\psi = -OM \cos\psi$$

deci

$$u = \theta \sin\psi, \quad v = -\theta \cos\psi, \quad w = 1$$

u şi v fiind de altfel şi cordonatele punctului M în raport de axele Ou şi Ov din planul P, paralele cu Gx şi Gy.

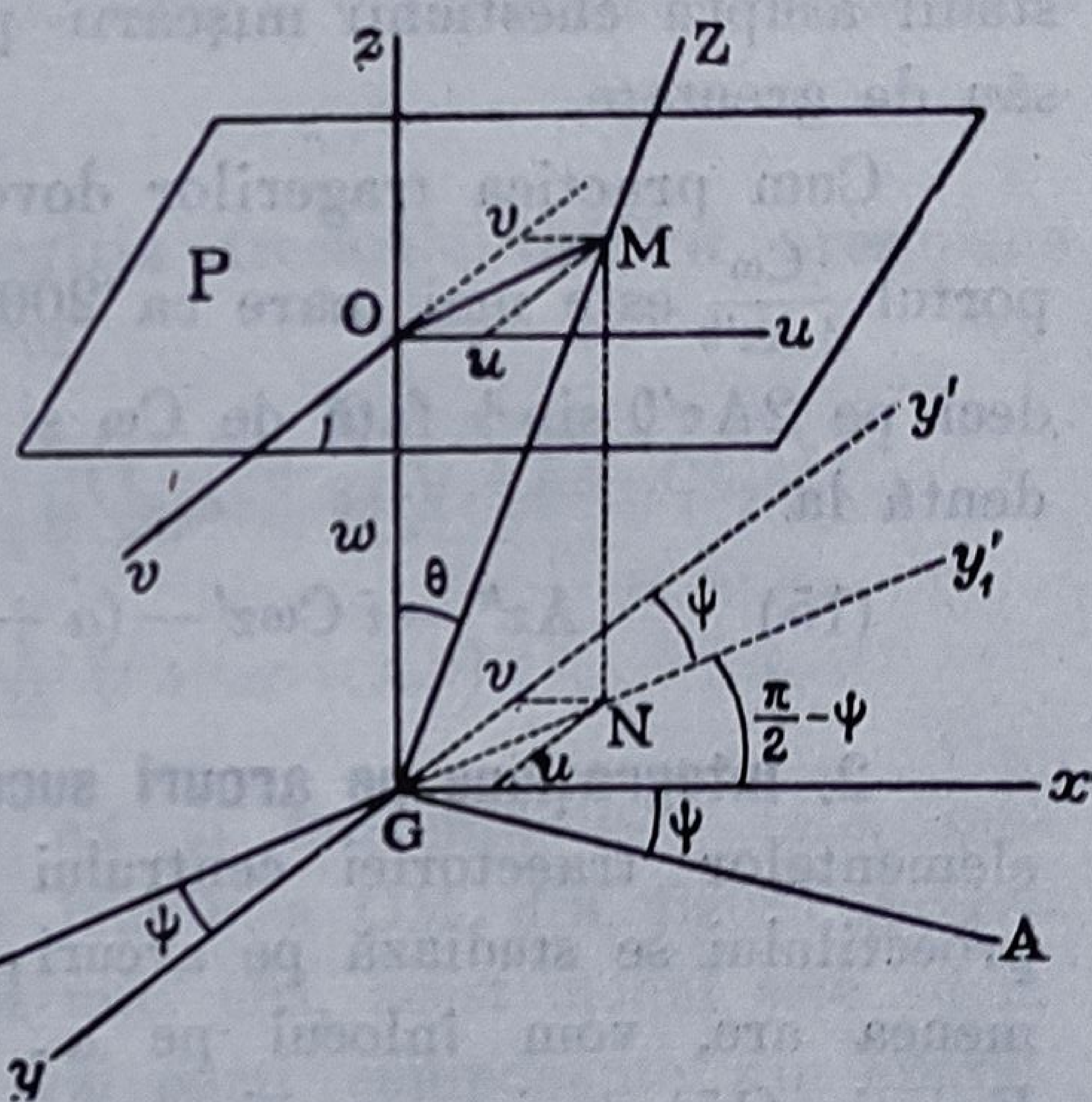


Fig. 238

Să formăm suma $u + iv$ pe care să o însemnăm prin z, litera i fiind imaginara $\sqrt{-1}$.

Avem

$$z = u + iv = \theta(\sin\psi - i\cos\psi) = -i\theta(\cos\psi + i\sin\psi) = -i\theta e^{i\psi}$$

şi, derivând de două ori,

$$z' = -i\left(\theta i \psi' e^{i\psi} + \theta' e^{i\psi}\right) = \left(\theta\psi' - i\theta'\right) e^{i\psi}$$

$$z'' = \left(\theta\psi'' + \theta'\psi' - i\theta''\right) e^{i\psi} + \left(\theta\psi' - i\theta'\right) i\psi' e^{i\psi} =$$

$$\left[\theta\psi'' + 2\theta'\psi' - i(\theta'' - \theta\psi'^2)\right] e^{i\psi}.$$

Inmulţind acum ecuaţia (14) cu i şi apoi scăzând-o din ecuaţia (13) obţinem:

$$A[\theta\psi'' + 2\theta'\psi' - i(\theta'' - \theta\psi'^2)] - i(C\omega + 2A\tau'\theta\sin\psi)(\theta\psi' - i\theta')$$

$$+ (a + ik\omega\alpha)i\theta = (\cos\psi - i\sin\psi)(-C\omega\tau' - iA\tau'' - A\tau'^2\theta)$$

adică înlocuind pe $\cos\psi - i\sin\psi$ prin $e^{-i\psi}$ şi înmulţind după aceea toată ecuaţia cu $e^{\psi i}$,

$$Az'' - i(C\omega + 2A\tau'\theta\sin\psi)z' - (a + ik\omega\alpha)z$$

$$= -(C\omega + A\tau'\theta\sin\psi)\tau' - iA\tau''.$$

Această ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea este identică cu aceia indicată de ***M. de Sparre*** în numeroasele sale studii asupra chestiunii mişcării proectilului în jurul centrului său de greutate.

Cum practica tragerilor dovedeşte că în toate cazurile raportul $\frac{C\omega}{2A\tau'\theta}$ este mai mare ca 200, putem neglija pe $2A\tau'\theta$ şi deci pe $2A\tau'\theta\sin\psi$ faţă de $C\omega$ şi reduce astfel ecuaţia precedentă la

$$(15) \qquad Az'' - iC\omega z' - (a + ik\omega\alpha)z = -C\omega\tau' - iA\tau''.$$

2. Integraţiune pe arcuri succesive. Ca şi pentru calculul elementelor traectoriei centrului de greutate, mişcarea axului proectilului se studiază pe arcuri succesive. In lungul unui asemenea arc, vom înlocui pe a, τ' şi τ'' prin valori mijlocii. Ecuaţia (15) devine atunci o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi care se poate integra uşor.

Ea admite în adevăr soluţia particulară

$$z_1 = \frac{C\omega\tau' + iA\tau''}{a + ik\omega\alpha}$$

iar ecuaţia fără al doilea membru

$$Az'' - iC\omega z' - (a + ik\omega\alpha)z = 0$$

admite ca ecuaţie caracteristică

$$Ar^2 - iC\omega r - a + (a + ik\omega\alpha) = 0$$

din care deducem

$$r = i\frac{C\omega}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{-C^2\omega^2 + 4A(a + ik\omega\alpha)}\,.$$

Insemnând prin r_1 şi r_2 cele două rădăcini, soluţia generală a ecuaţiei (15) este prin urmare

$$z = \frac{C\omega\tau' + i\,A\tau''}{a + i\,k\omega\alpha} + A_1\,e^{r_1 t} + B_1\,e^{r_2 t}$$

A_1 şi B_1 fiind două constante care se determină, pentru fiecare arc, potrivit condiţiilor mişcării în punctul de unde începe arcul.

III. CAZUL CÂND FRECĂRILE SUNT NEGLIJABILE.

Vom presupune mai întâi că frecările sunt neglijabile; vom studia apoi modificările pe care le ocazionează introducerea în calcule a acestor frecări.

1. Soluţia mişcării. A neglija frecările este a presupune pe k egal cu zero. Avem atunci

$$z = \left(\frac{C\omega\,\tau'}{a} + i\frac{A\,\tau''}{a}\right) + A_1\,e^{\left(i\frac{C\omega}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{4\,Aa - C^2\omega^2}\right)t}$$

$$+ B_1 e^{\left(i\frac{C\omega}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{4\,Aa - C^2\omega^2}\right)t}.$$

Cum unghiul θ dintre ax şi tangentă este mic, modulul lui z care este egal cu lungimea OM din figura precedentă trebue să rămână şi el mic. Ori, acest modul este suma geometrică a modulilor celor trei părţi componente din expresiunea lui z. Modulul exponenţialei $e^{i\frac{C\omega\,t}{2A}}$ fiind egal cu unitatea[1]), modulii celor două din urmă părţi sunt egali cu

$$|A_1|\,e^{\frac{t}{2A}\sqrt{4\,A\,a - C^2\,\omega^2}} \quad \text{şi} \quad |B_1|\,e^{-\frac{t}{2A}\sqrt{4\,A\,a - C^2\,\omega^2}}.$$

Diferenţa $4\,A\,a - C^2\,\omega^2$ fiind o cantitate finită, primul dintre aceşti moduli poate deveni foarte mare cu timpul. Pentru

[1]) Modulul exponenţialei e^{xi} este egal cu unitatea, oricare ar fi x.

24468—29

ca să nu se întâmple astfel, trebue ca această diferență să fie negativă, căci atunci exponențiala fiind imaginară modulul se reduce la $|A_1|$ cantitate independentă de t, cel de al doilea modul reducându-se și el la $|B_1|$.

Ca unghiul θ să poată rămâne mic, este deci *necesar*, așa după cum a stabilit *M. de Sparre,* ca să avem

$$4\,A\,a - C^2\,\omega^2 < 0 \quad \text{adică} \quad \frac{C^2\,\omega^2}{4\,A\,a} > 1.$$

Dacă această condiție este îndeplinită, atunci, cum

$$r = i\frac{C\omega}{2A} \pm \frac{i}{2A}\sqrt{C^2\,\omega^2 - 4\,A\,a}$$

sau

$$r = i\frac{C\,\omega}{2\,A} \pm i\frac{C\,\omega}{2\,A}\sqrt{1 - \frac{4\,A\,a}{C^2\,\omega^2}}$$

vom putea scrie

$$r_1 = i\frac{C\,\omega}{2\,A}(1+\varepsilon), \qquad r_2 = i\frac{C\,\omega}{2\,A}(1-\varepsilon)$$

punând pentru prescurtare

$$(16) \qquad \varepsilon^2 = 1 - \frac{4\,A\,a}{C^2\,\omega^2}.$$

Soluția mișcării va fi în consecință

$$(17) \quad z = \left(\frac{C\omega\tau'}{a} + i\frac{A\tau''}{a}\right) + A_1 e^{i\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)t} + B_1 e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)t}$$

poziția axului rezultând astfel din compunerea unei părți ne-periodice

$$z_1 = \frac{C\omega\,\tau'}{a} + i\frac{A\tau''}{a}$$

cu o parte periodică

$$z_2 = A_1 e^{i\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)t} + B_1 e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)t}.$$

2. Determinarea constantelor de integrațiune A_1 și B_1 pentru primul arc de traectorie. Vom presupune că la origina mișcării, axul proectilului coincide cu tangenta traectoriei centrului său de greutate și, că în momentul imediat următor când tangenta

a început să se încline pe orizont, axul rămâne coprins în planul vertical al traectoriei, adică în planul yGz. Presupunem deci că la origina mişcării avem:

$$\theta_0 = o, \qquad \psi_0 = o, \qquad \psi'_0 = o, \qquad z_0 = -i\theta_0 e^{i\psi_0} = o.$$

In aceste condiţiuni, ecuaţia (13) a mişcării în care facem şi pe k egal cu zero, ne dă

$$-C\omega\,\theta'_0 = -C\omega\tau'_0$$

deci $\theta'_0 = \tau'_0$ şi prin urmare

$$z'_0 = (\theta_0\psi'_0 - i\,\theta'_0)\,e^{i\psi_0} = -i\,\theta'_0 = -i\,\tau'_0.$$

Ori, ecuaţia (17) în care elementele a, τ' şi τ'' vor fi privite ca constante în lungul arcului considerat, ne dă prin derivare

$$(18) \quad z' = A_1\, i\,\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)\,e^{i\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)t} + B_1\, i\,\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\,e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)t}.$$

Exprimând acum că ecuaţiile (17) şi (18) sunt satisfăcute de condiţiile iniţiale de mai sus, obţinem, neglijând pe $\frac{A}{a}\tau''$ faţă de $\frac{C\omega}{a}\tau'$ şi luând $\tau' = \tau'_0$, cele două egalităţi

$$z_0 = o = \frac{C\omega}{a}\,\tau'_0 + A_1 + B_1$$

de unde

$$A_1 + B_1 = -\frac{C\omega}{a}\,\tau'_0$$

şi

$$z'_0 = -i\,\tau'_0 = A_1\, i\,\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon) + B_1 i\,\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)$$

din care rezultă

$$-\tau'_0 = \frac{C\omega}{2A}(A_1 + B_1) + \varepsilon\,\frac{C\omega}{2A}(A_1 - B_1)$$

sau, înlocuind pe $A_1 + B_1$ prin valoarea precedentă,

$$-\tau'_0\left(1 - \frac{C^2\omega^2}{2Aa}\right) = \varepsilon\,\frac{C\omega}{2A}(A_1 - B_1).$$

Insă, potrivit egalităţii (16), avem

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{4Aa}{C^2\omega^2}$$

deci

$$\frac{C^2\omega^2}{2\,Aa} = \frac{2}{1-\varepsilon^2} \qquad \text{şi} \quad 1 - \frac{C^2\omega^2}{2\,Aa} = -\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

precum de asemenea

$$\frac{C\omega}{a} = \frac{C^2\omega^2}{2\,Aa}\cdot\frac{2\,A}{C\,\omega} = \frac{2}{1-\varepsilon^2}\cdot\frac{2\,A}{C\,\omega}.$$

Astfel, în definitiv,

$$A_1 + B_1 = -\frac{C\omega}{a}\,\tau'_0 = -\frac{2\,A}{C\omega}\,\tau'_0\,\frac{2}{1-\varepsilon^2}$$

$$A_1 - B_1 = -\tau'_0\left(1 - \frac{C^2\omega^2}{2Aa}\right)\frac{2A}{C\omega\,\varepsilon} = \frac{2A}{C\omega}\,\tau'_0\,\frac{1+\varepsilon_0{}^2}{\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)}$$

egalităţi, din care rezultă,

$$A_1 = \frac{A}{C\omega}\,\tau'_0\,\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\,(1+\varepsilon)}$$

$$B_1 = -\frac{A}{C\,\omega}\,\tau'_0\,\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon\,(1-\varepsilon)}.$$

După cum se vede, valorile constantelor A_1 şi B_1 sunt mici, ω fiind mare iar τ'_0 mic.

3. **Studiul părţii periodice a mişcării axului.** Partea periodică a mişcării axului este, după cum am spus mai sus,

$$z_2 = A_1\,e^{i\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)\,t} + B_1\,e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\,t}.$$

Să dăm lui t o creştere Δt; z_2 devine $z_2 + \Delta z_2$ şi avem

$$z_2 + \Delta z_2 = A_1\,e^{i\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)\,t}\,.\,e^{i\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)\,\Delta t} + B_1\,e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)t}\,.$$

$$e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\,\Delta t}.$$

Ori, dacă luăm pe Δt astfel încât

$$\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)\,\Delta t = \frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\,\Delta t + 2\,k\pi \tag{19}$$

$z_2 + \Delta z_2$ devine:

$$z_2 + \Delta z_2 = e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\Delta t}\left[A_1 e^{i\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon)t} \cdot e^{2k\pi i} + B_1 e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)t}\right]$$

şi, cum

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1$$

vedem că paranteza este egală cu z_2 aşa că avem

$$z_2 + \Delta z_2 = z_2 \cdot e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\Delta t}.$$

Modulul exponenţialei fiind egal cu unitatea, modulul lui $z_2 + \Delta z_2$ este deci egal cu acela al lui z_2. Astfel, după o creştere a timpului t cu valoarea Δt dată de egalitatea (19) adică

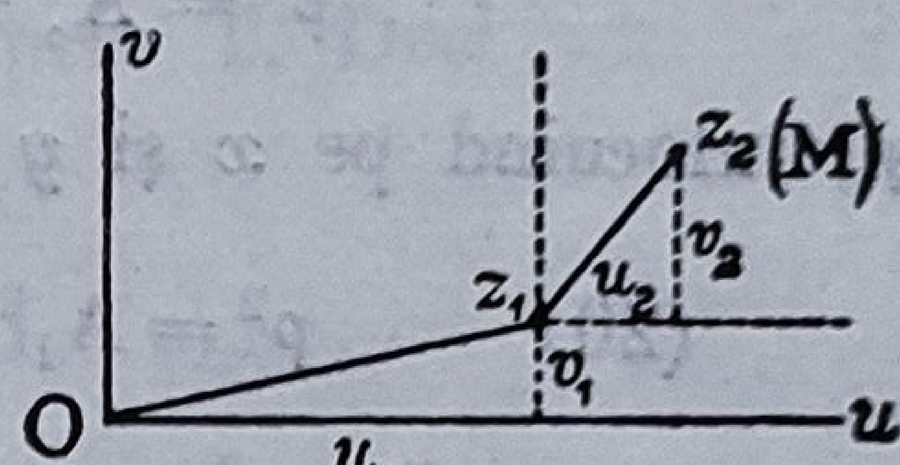


Fig. 239

$$\Delta t = \frac{2K\pi}{\varepsilon\frac{C\omega}{A}}$$

modulul lui z_2, adică distanţa punctului z_2 la punctul z_1 corespunzător părţei neperiodice a mişcării axului, redevine acelaşi. Modulul lui z_2 se reproduce deci periodic după ori-ce creştere a timpului cu valoarea

$$T = \frac{2\pi}{\varepsilon\frac{C\omega}{A}}.$$

Pe de altă parte, argumentul lui $z_2 + \Delta z_2$ fiind suma argumentelor celor doi factori componenţi este egal, după o perioadă T, cu argumentul lui z_2 mărit cu argumentul factorului $e^{i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)T}$ care este $\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)T$ adică $\frac{\pi(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Există deci o dublă periodicitate în timp şi în spaţiu. Astfel, după ori-ce creştere a timpului t cu valoarea T, modulul lui z_2 redevine acelaşi iar argumentul său creşte cu cantitatea $\frac{\pi(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Pentru a ne da seama cum anume variază modulul lui z_2 pe timpul unei perioade T, să-i determinăm valoarea. In acest scop, punând pentru prescurtare,

$$\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\,t = x \quad \text{şi} \quad \frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\,t = y$$

putem scrie

$$z_2 = A_1\,e^{xi} + B_1\,e^{yi} = (A_1 \cos x + B_1 \cos y) + i\,(A_1 \sin x + B_1 \sin y).$$

Patratul modulului este deci

$$\rho^2 = (A_1 \cos x + B_1 \cos y)^2 + (A_1 \sin x + B_1 \sin y)^2$$

adică

$$\rho^2 = A_1^2 + B_1^2 + 2\,A_1\,B_1 \cos(x-y)$$

şi, înlocuind pe x şi y prin valorile lor,

$$\rho^2 = A_1{}^2 + B_1{}^2 + 2\,A_1\,B_1 \cos\frac{C\omega}{A}\,\varepsilon t\,. \tag{20}$$

Această valoare a lui ρ^2 se reproduce dacă mărim pe $\frac{C\omega}{A}\,\varepsilon t$ cu 2π, adică pe t cu

$$T = \frac{2\pi}{\varepsilon\,\frac{C\,\omega}{A}}\,.$$

Regăsim astfel periodicitatea lui ρ despre care am vorbit mai sus.

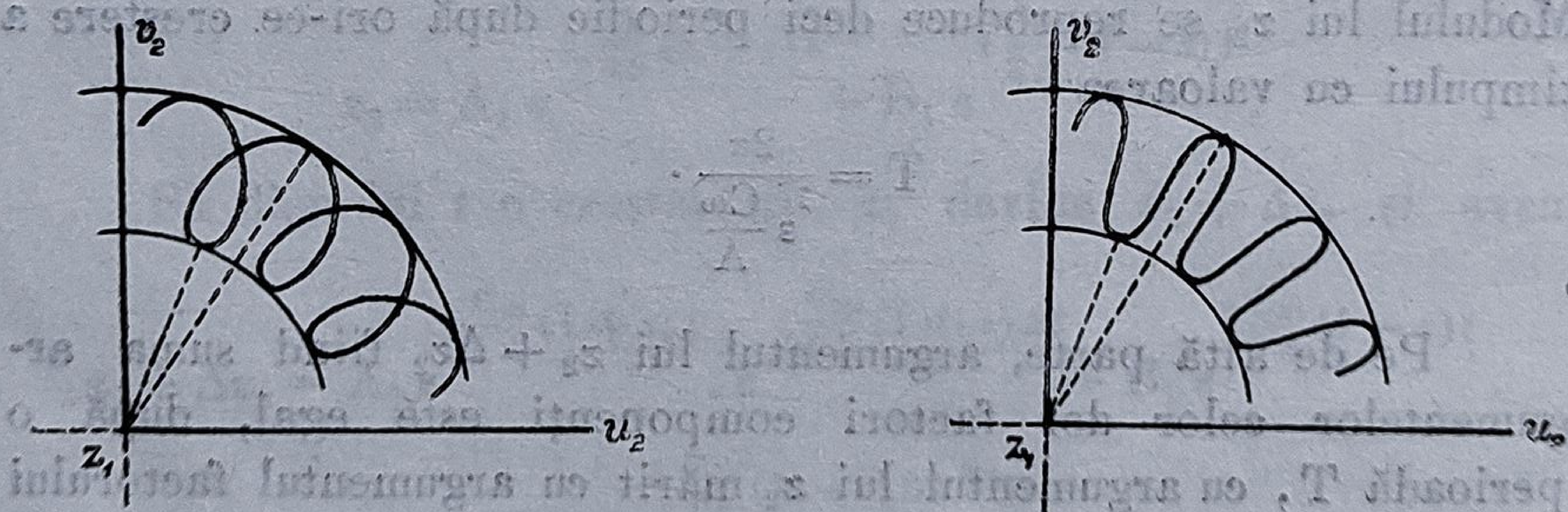


Fig. 240

De altfel, potrivit expresiei (20) valorile lui ρ variază între limitele

$$|A_1 + B_1| \qquad \text{şi} \qquad |A_1 - B_1|$$

una dintre ele corespunzând la maximul iar cealaltă la minimul

lui ρ. Reamintim că pe un arc de traectorie valorile lui A_1 şi B_1 sunt constante, însă ele variază dela arc la arc.

Prin punctul z_1 să ducem axele $z_1 u_2$ şi $z_1 v_2$ paralele cu Ou şi Ov. Din cele de mai sus rezultă, că în raport cu aceste axe antrenate în deplasarea lui z_1, curba descrisă de punctul z_2, adică de punctul M al axului proectilului (fig. 237), în jurul lui z_1, are, pentru un arc de traectorie, una sau alta din cele două forme aci indicate.

Viteza de precesiune. Să determinăm viteza unghiulară de rotaţie a punctului z_2, în jurul lui z_1, adică *viteza de precesiune*.

Valoarea mijlocie n a acestei viteze este egală cu creşterea argumentului lui z în timpul T, divizată prin T. Deci

$$n = \frac{\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\,T}{T} = \frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)\,.$$

Insă din egalitatea (16)

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{4Aa}{C^2\omega^2}$$

deducem

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{4Aa}{C^2\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4Aa}{C^2\omega^2} + \ldots$$

şi, cum $\frac{4Aa}{C^2\omega^2}$ este mic, putem lua în mod aproximativ,

$$\varepsilon = 1 - \frac{2Aa}{C^2\omega^2}$$

aşa încât avem

$$n = \frac{C\omega}{2A}\cdot\frac{2Aa}{C^2\omega^2} = \frac{a}{C\omega}\,.$$

Viteza de precesiune are deci acelaşi sens ca rotaţia proectilului în jurul axului său. Cum de obicei ghinturile ţevilor de tunuri se răsucesc dela stânga la dreapta pentru observatorul care le priveşte dela culată, rotaţia proectilului în jurul axului său este văzută dela dreapta la stânga pentru observatorul culcat pe acest ax cu picioarele în G şi capul în M. Deci ω este negativ; n fiind şi el atunci negativ, observatorul culcat pe paralela dusă tangentei din punctul z_1, cu picioarele în z_1, va vedea rotaţia lui z_2 în jurul lui z_1 ca având loc în sensul dela v_2 spre u_2,

adică în planul $v_2 z_1 u_2$ așa cum merg acele unui ceasornic. Acesta este sensul mișcării precesionare.

Poziția punctului z_1 și deci a axului Gz_1 fiind variabilă, acest ax în jurul căruia se învârtește axul proectilului poate fi privit ca un ax instantaneu de rotație. ***D-l Esclangon*** l-a denumit *ax instantaneu de precesiune*.

Dacă înlocuim pe a prin expresia sa cunoscută

$$a = s(1+\mu)\,\mathrm{R} = s\,(1+\mu)\,\frac{p}{g}\,c\,\mathrm{F}\,(v)$$

obținem

$$n = \frac{s\,(1+\mu)}{\mathrm{C}\,\omega}\,\frac{p}{g}\,c\,\mathrm{F}\,(v)\,.$$

Pentru proectile identice, trase în aceleași condiții însă cu viteze de rotație ω diferite, vedem că *viteza de precesiune este cu atât mai mică cu cât viteza de rotație a proectilului este mai mare.*

In cursul mișcării pe traectorie, *viteza de precesiune se micșorează odată cu* F(v) și deci odată cu v, trecând astfel printr'un minim, însă aceasta nu în punctul de viteză minimă de pe traectorie ci puțin mai înainte, căci trebue ținut seama și de variația coeficientului balistic c care depinde după cum știm de $\Delta(y)$ și este mai mic în apropierea vârfului decât la origina traectoriei.

Pentru a compara între ele vitezele de precesiune ale proectilelor de calibre diferite, vom aduce o modificare de formă expresiei lui n după cum urmează.

Fie v_0 viteza inițială a proectilului, η înclinarea ghinturilor țevii și a_1 calibrul ei. Avem egalitatea [1]):

$$\omega = \pm\,\frac{2\,v_0\,\mathrm{tg}\,\eta}{a_1}$$

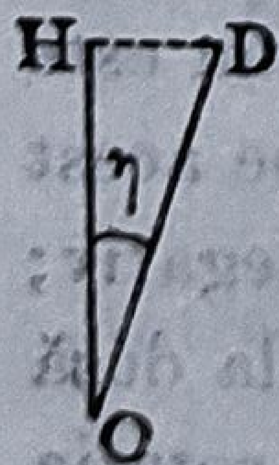


Fig. 241.

[1]) Dacă OH este pasul ghinturilor presupuse helicoidale și OD desfășurata ghintului dintre O și H, avem $\mathrm{HD} = \pi a_1$ și $\mathrm{OH} = \pi a_1 \,\mathrm{cotg}\,\eta$. Ori, timpul t pe care îl pune proectilul ca să ajungă din O în H în linie dreaptă este egal cu timpul care corespunde unei învârtiri circulare complecte, deci

$$\mathrm{OH} = v_0 t = \pi a_1 \,\mathrm{cotg}\,\eta \quad \text{și} \quad \omega t = 2\pi \quad \text{de unde} \quad \omega = \frac{2\,v_0\,\mathrm{tg}\,\eta}{a_1}.$$

luându-se înaintea membrului al doilea semnul + sau — după cum ω este pozitiv sau negativ.

Pe de altă parte, însemnând prin ρ_1 raza de giraţie a proectilului în jurul axului său, putem pune $C = \frac{p}{g}\rho_1^2$. Inlocuirea lui ω şi C prin aceste valori ne dă

$$n = \pm \frac{s\, a_1 (1+\mu)}{2\, \rho_1^2\, v_0\, tg\, \eta}\, c\, F(v).$$

Cum cantitatea $\frac{s\, a_1 (1+\mu)}{\rho_1^2}$ este sensibil constantă pentru proectilele asemenea [1]), această formulă arată, că pentru acele proectile, la egalitate de înclinare a ghinturilor şi de valori de viteze v_0 şi v, *viteza de precesiune variază proporţional cu coeficientul balistic al proectilului, sau invers proporţional cu calibrul său* [2]). Astfel, viteza de precesiune a unui proectil de 400 m.m. calibru ar fi de 50 de ori mai mică decât aceea a unui glonţ de puşcă de 8 m.m. în condiţiuni de egalitate a elementelor η, v_0 şi v.

Pentru proectilele de câmp, în condiţiunile lor obişnuite de tragere, valorile lui n variază între 3 şi 4 (circa $^1/_2$ învârtire pe secundă). Pentru proectilele de mare calibru, valorile lui n sunt mai mici, astfel, pentru proectilul de 400 m.m. valoarea lui n este vecină de unu (circa 1/6 învârtire pe secundă).

---

[1]) Pentru proectilele uzuale, valoarea acestei cantităţi nu diferă mult de 8 la 10 (***Esclangon***).

[2]) Coeficientul balistic fiind

$$c = i\,\Delta\, \frac{a_1^2}{p} = \frac{i\,\Delta}{\left(\frac{p}{a_1^2}\right)}$$

vedem, că lăsând la o parte pe $i\,\Delta$, acest coeficient variază invers proporţional cu $\left(\frac{p}{a_1^2}\right)$ raport care caracterizează greutatea proectilului pe unitatea de secţiune şi este deci proporţional cu a_1.

4. Studiul părţii ne-periodice. Ştim că această parte este

$$z_1 = \frac{C\,\omega}{a}\,\tau' + i\,\frac{A}{a}\,\tau''$$

cordonatele punctului z_1 fiind

$$u_1 = \frac{C\,\omega}{a}\,\tau' \quad \text{şi} \quad v_1 = \frac{A}{a}\,\tau''.$$

Putem demonstra că raportul $\frac{v_1}{u_1}$ este totdeauna foarte mic, cu alte cuvinte că punctul z_1 nu se depărtează decât prea puţin de axul Ou. Avem, în adevăr,

$$\text{(21)} \qquad \frac{v_1}{u_1} = \frac{A}{C\omega} \cdot \frac{\tau''}{\tau'}$$

însă (pag. 79)

$$v\,\frac{d\tau}{dt} = -\,g\cos\tau \qquad \text{de unde} \qquad \tau' = -\,\frac{g\cos\tau}{v}$$

şi derivând

$$\tau'' = \frac{g}{v^2}\,(v\,\tau'\,\sin\tau + v'\,\cos\tau)$$

sau, înlocuind pe $\cos\tau$ prin $-\frac{\tau'\,v}{g}$ şi pe v' prin $-\,c\,F(v) - g\sin\tau$[1])

$$\text{(22)} \qquad \frac{\tau''}{\tau'} = \frac{g}{v}\left[\,2\sin\tau + \frac{c}{g}\,F(v)\,\right]$$

deci

$$\text{(23)} \qquad \frac{v_1}{u_1} = \frac{A}{C\omega}\cdot\frac{g}{v}\left[\,2\sin\tau + \frac{c}{g}\,F(v)\,\right].$$

Egalitatea aceasta arată că raportul $\frac{v_1}{u_1}$ este în adevăr foarte mic de oare-ce atât factorul $\frac{A}{C\omega}$ cât şi celălalt factor sunt mici. Rezultă atunci că *axul instantaneu de precesiune se de-*

---

[1]) Egalitatea $\frac{dv}{dt} = -\,c\,F(v) - g\sin\tau$ se obţine proectând acceleraţia centrului de greutate pe tangenta traectoriei sale, presupunând rezistenţa aerului tangenţială.

părtează numai foarte puțin de planul perpendicular pe planul traectoriei dus prin tangenta la traectorie.

Pe de altă parte, ω și τ' fiind totdeauna negativi, u_1 este totdeauna pozitiv, deci *axul instantaneu de precesiune se găsește în ori-ce moment la dreapta planului de tragere.*

La începutul mișcării, raportul $\frac{\tau''}{\tau'}$ fiind pozitiv potrivit egalității (22) iar ω negativ, egalitatea (21) arată că u_1 și v_1 sunt atunci de semne contrarii, adică v_1 este negativ.

Semnul lui v_1 se schimbă apoi odată cu trecerea lui v_1 prin valoarea zero, care are loc potrivit egalității (23) în punctul de pe traectorie unde

$$2 \sin \tau + \frac{c}{g} \mathrm{F}(v) = 0 .$$

Acest punct se găsește situat între vârful traectoriei și punctul de viteză minimă, căci pentru acesta știm că

$$\sin \tau + \frac{c}{g} \mathrm{F}(v) = 0 .$$

La infinit, adică atunci când $\tau = -\frac{\pi}{2}$, avem $\tau' = 0$ și ca urmare $\tau'' = 0$, deci $u_1 = 0$ și $v_1 = 0$. Axul instantaneu de precesiune coincide atunci cu tangenta.

Depărtarea axului instantaneu de precesiune de planul de tragere. Cum v_1 este totdeauna foarte mic, variațiile acestei depărtări sunt sensibil egale cu variațiile lui u_1 în timpul mișcării.

Ori, ținând seama că

$$n = \frac{a}{\mathrm{C}\omega} \quad \text{și} \quad \tau' = -\frac{g \cos \tau}{v}$$

putem scrie

$$(24) \qquad u_1 = \frac{\mathrm{C}\omega}{a} \tau' = -\frac{1}{n} \frac{g \cos \tau}{v}$$

și egalitatea aceasta stabilește mai întâi că u_1 *este totdeauna mic.* Spre exemplu, în vârful traectoriei unde $\tau = 0$, dacă $n = 4$ și $v = 300$ avem $u_1 = \frac{1}{120}$ (luând $g = 10$) ceea ce corespunde la

un unghiu de circa 30 de minute. Pentru proectilele de calibru mare, ştim că n are valori mai mici şi se pot obţine 4 la 5 grade; astfel, în cazul $n = 1$ şi $v = 150$, avem $u_1 = \frac{1}{15}$ valoare care corespunde la circa 4 grade de unghiu.

Să luăm acum derivata lui u_1. Scriind

$$u_1 = \frac{\tau'}{n}$$

obţinem prin derivare

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{n\tau'' - n'\tau'}{n^2}$$

însă

$$n = \frac{a}{C\omega} = \frac{s(1+\mu)}{C\omega} \frac{p}{g} c \,.\, F(v)$$

deci

$$n' = \frac{s(1+\mu)}{C\omega} \frac{p}{g} c \,.\, v' F'(v) = \frac{n}{F(v)} \,.\, v' F'(v)$$

şi substituirea acestei valori în expresia derivatei $\frac{du_1}{dt}$ ne dă:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\tau'' F(v) - \tau' v' F'(v)}{n F(v)}.$$

Ţinând acum seama de cele două egalităţi cunoscute

$$\tau'' = \tau' \frac{g}{v} \left[2 \sin \tau + \frac{c}{g} F(v)\right]$$

şi

$$v' = -c F(v) - g \sin \tau$$

derivata devine

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\tau'}{n} \,.\, \frac{1}{v} \left[2 g \sin \tau + c F(v) + v \frac{F'(v)}{F(v)} \{c F(v) + g \sin \tau\}\right]$$

sau, punând $v \frac{F'(v)}{F(v)} = m$,

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{u_1}{v} \left[(m+2) g \sin \tau + (m+1) c F(v)\right].$$

Cum u_1 este totdeauna pozitiv, semnul derivatei depinde de acela al termenului închis între paranteze. Ori, la începutul mişcării acest termen este pozitiv; $\frac{du_1}{dt}$ fiind atunci pozitiv, u_1

crește și această creștere se urmează până în punctul de pe traectorie unde

$$(m+2)\, g \sin \tau + (m+1)\, c\, \mathrm{F}(v) = \mathrm{o}$$

sau

$$\left(\frac{m+2}{m+1}\right) \sin \tau + \frac{c}{g} \mathrm{F}(v) = \mathrm{o}.$$

Cum, ori-care ar fi valoarea lui m, avem

$$2 > \frac{m+2}{m+1} > 1$$

se vede că acel punct este coprins între vârf și punctul de viteză minimă; valoarea lui u_1 este atunci maximă, apoi u_1 descrește și după cum arată egalitatea (24) valoarea lui tinde către zero când τ tinde către $-\frac{\pi}{2}$, adică la infinit.

5. **Rezumat.** Rezultatele precedente pot fi rezumate în felul următor:

1). *In cursul mișcării în aer, axul proectilului se învârtește în jurul unui ax trecând prin centrul de greutate și denumit ax instantaneu de precesiune, cu o viteză unghiulară* $n = \frac{a}{C\omega}$.

2). *Depărtarea unghiulară dintre axul proectilului și axul de precesiune are variații periodice duble* (în timp și în spațiu).

3). *Axul de precesiune rămâne necontenit la dreapta planului de tragere, pentru tunurile ghintuite la dreapta; el nu se depărtează decât foarte puțin de planul perpendicular pe planul de tragere dus prin tangentă și tinde la limită către tangenta traectoriei.*

4). *Depărtarea unghiulară dintre axul de precesiune și planul de tragere este totdeauna mică; această depărtare este maximă pentru un punct situat între vârful traectoriei și punctul de viteză minimă.*

6. **Notă.** In mod geometric, studiul mișcării axului proectilului în raport de tangentă se poate face în felul următor:

Proectilul se comportă în aer ca un giroscop mare și greu. Dacă tangenta GT ar rămâne fixă în spațiu, am putea atunci

să determinăm *în mod expeditiv* mişcarea axului său prin aplicaţiunea principiului giroscopic despre care am vorbit la capitolul mişcării unui solid în jurul unui punct fix şi pe care l-am aplicat mişcării sfârlezei giroscopice (pag. 375).

Reamintim că principiul giroscopic constă în a admite că momentul cinetic, adică momentul cantităţilor de mişcare, coincide cu axul proectilului când proectilul se învârteşte cu o foarte mare viteză în jurul acestui ax.

Fie, după cum arată figura, GT tangenta traectoriei, GZ direcţia axului şi R rezistenţa aerului aplicată în punctul C şi conţinută după cum ştim în planul TGZ.

Cum ω este negativ (ghinturi răsucite dela stânga la dreapta, privite din spatele proectilului) momentul cinetic $C\omega$ este aşezat pe porţiunea negativă a axului GZ; fie GK vectorul său reprezentativ. Dela teoremele generale ale Dinamicei ştim că viteza punctului K este egală cu momentul forţelor care lucrează asupra proectilului în raport de punctul G, considerat ca fix. Cum momentul greutăţii în raport de G, este nul, rămâne ca moment numai acela al rezistenţei R care are ca expresie $R s \theta_1$ adică $R s (1+\mu)\theta$ sau $a\theta$, acest moment fiind perpendicular pe planul TGZ şi îndreptat în sus de planul figurei, pentru ca direcţia dela C la R să fie văzută dela stânga la dreapta.

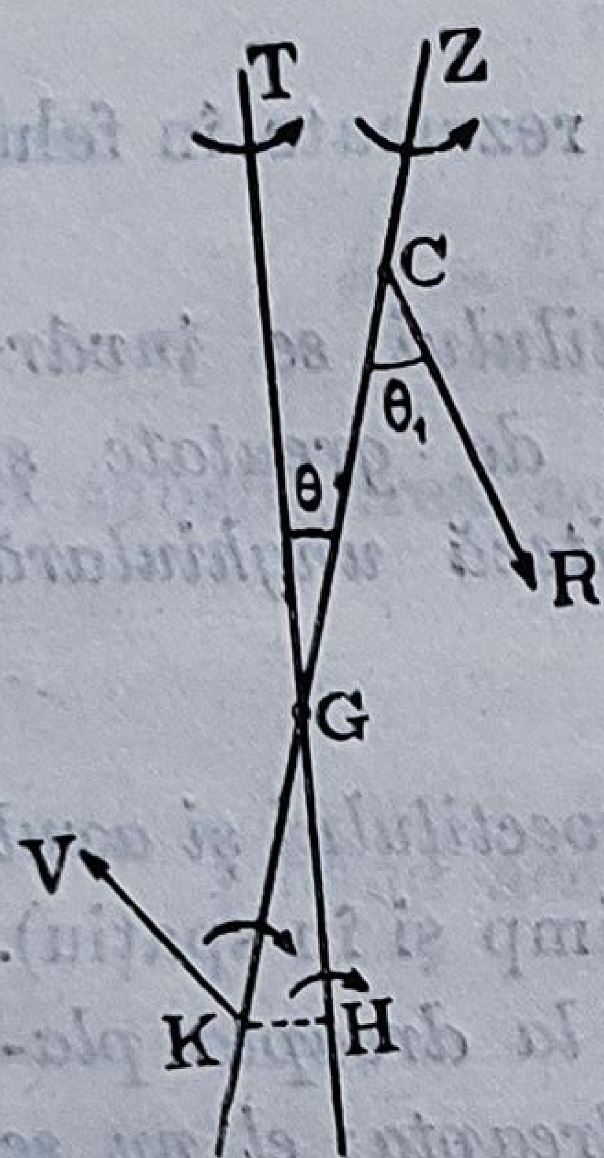


Fig. 242.

Fie acum KV viteza punctului K, egală şi paralelă cu momentul $a\theta$ al rezistenţei R. Această viteză tinde să învârtească punctul K dela stânga la dreapta în jurul prelungirei GK a tangentei şi deci punctul C dela dreapta la stânga în jurul tangentei GT. *Viteza de precesiune*, adică viteza unghiulară de rotaţie a axului GZ în jurul tangentei, *are deci acelaşi sens ca rotaţia proprie a proectilului în jurul axului său.* Dacă însemnăm prin n valoarea acestei viteze, avem pe figură

$$KV = KH \cdot n = GK \cdot \theta \cdot n = C\omega \cdot \theta \cdot n$$

şi aplicaţia teoremei de Dinamică ne dă

$$C\omega \,.\, \theta \,.\, n = a : \theta$$

de unde

$$n = \frac{a}{C\omega}.$$

Dacă tangenta GT ar fi fixă în spaţiu, după cum s'a presupus, axul proectilului s'ar învârti deci necontenit în jurul tangentei, ca sfârleaza în jurul verticalei, cu viteza de precesiune $\frac{a}{C\omega}$. Cum însă tangenta se înclină pe orizont cu viteza unghiulară

$$\tau' = -\frac{g \cos\tau}{v}$$

trebue să combinăm mişcarea de rotaţie a axului în jurul tangentei cu această mişcare de înclinare.

Ca şi în figura 238, să considerăm pe direcţia GT punctul O, situat la distanţa de 1 de G, şi prin acest punct să ducem un plan perpendicular pe tangentă. Fie în acest plan: Ov, perpendiculara ridicată pe OT, conţinută în planul vertical al traectoriei şi îndreptată în sus; Ou, orizontala perpendiculară pe planul TOv şi îndreptată spre dreapta. Axul proectilului întâlneşte planul uOv într'un punct M. Să determinăm în mod geometric mişcarea acestui punct, în raport de axele Ou şi Ov considerat ca fixe, ţinând socoteală de înclinarea tangentei GT pe orizont.

Fig. 243 Fig. 244

Mişcarea punctului M în planul uOv fiind o mişcare relativă, viteza ei este rezultanta vitezei de rotaţie a lui M în

jurul tangentei și a unei viteze egală și direct opusă vitezei de antrenare a acestui punct, când el participă la mișcarea de rotație a planului $u\,Ov$ în jurul orizontalei Gu', mișcare determinată de înclinarea tangentei.

Viteza de rotație în jurul tangentei este un vector MV perpendicular pe OM, conținut în planul $u\,Ov$ și îndreptat în jos, de oare-ce rotația în jurul lui GT se face dela dreapta la stânga; avem

$$MV = OM \,.\, n$$

n fiind viteza de precesiune $\frac{a}{C\omega}$.

Viteza de antrenare a punctului M în rotația planului $u\,Ov$ în jurul orizontalei Gu' este și ea conținută în acest plan fiind paralelă cu Ov; fie ME vectorul ei reprezentativ. Valoarea acestei viteze fiind sensibil egală cu aceea a punctului O, putem scrie

$$ME = GO \,.\, \tau' = \tau'$$

căci GO este egal cu 1. Compunerea vectorului MV cu vectorul ME′ egal și direct opus lui ME ne dă un vector MV′ care reprezintă viteza relativă a lui M în planul $u\,Ov$.

Din punctul M să ducem acum perpendiculara MO′ pe MV′. Cele două triunghiuri O MO′ și V MV′ fiind asemenea, ca având unghiurile egale, ne dau

$$\frac{OO'}{VV'} = \frac{O'M}{MV'} = \frac{OM}{MV}$$

de unde rezultă, observând că $VV' = ME = \tau'$,

$$OO' = VV' \,.\, \frac{OM}{MV} = \frac{\tau'}{n} = \frac{C\omega}{a}\,\tau'$$

$$MV' = O'M \,.\, \frac{MV}{OM} = O'M \,.\, n \,.$$

Aceste două egalități arată că, în fiecare moment, *viteza punctului* M *este aceiași ca viteza pe care ar avea-o acest punct dacă s'ar învârti în jurul punctului* O′ *de pe axul* Ou *cu viteza de precesiune* $n = \frac{a}{C\omega}$.

De altfel, $OO' = u_1$ adică egal cu z_1 când se neglijează ordonata v_1.

IV. DETERMINAREA MIŞCĂRII AXULUI PROECTILULUI PE TOATĂ INTINDEREA TRAECTORIEI.

Pe întinderea ori căruia dintre arcurile în care divideam traectoria centrului de greutate al proectilului, după principiul ştiut (pag. 433) poziţia axului proectilului este determinată de valoarea $z = u + iv$ care are ca expresie

$$z = \frac{C\omega \tau' + i A\tau''}{a} + A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_2 t} \tag{25}$$

unde

$$r_1 = i\frac{C\omega}{2A}(1+\varepsilon) \qquad , \quad r_2 = i\frac{C\omega}{2A}(1-\varepsilon)$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{4Aa}{C^2\omega^2}$$

în care expresie, τ', τ'' şi a reprezintă valorile mijlocii ale acestor elemente din lungul arcului considerat iar A_1 şi B_1 valorile ce rezultă pentru aceste constante din cunoaşterea condiţiilor iniţiale care corespund originei fie căruia dintre arcuri.

Astfel, pentru primul arc de traectorie τ_0 la τ_1, calculând pe v_1 apoi înlocuind pe τ prin $\frac{\tau_0 + \tau_1}{2}$ şi pe v prin $\frac{v_0 + v_1}{2}$ în formulele cunoscute

$$\tau' = -\frac{g\cos\tau}{v}, \qquad \tau'' = \tau'\left(\frac{g}{v}\right)\left[2\sin\tau + \frac{c}{g}F(v)\right]$$

$$a = s(1+\mu)\frac{p}{g}cF(v)$$

obţinem valorile mijlocii ale elementelor τ', τ'' şi a, apoi, dacă spre exemplu condiţiile iniţiale ale mişcării sunt acelea specificate la pag. 451, adică

$$\theta_0 = 0 \qquad \text{şi} \qquad \psi_0 = \psi_0' = 0$$

se determină valorile constantelor A_1 şi B_1 aşa după cum s'a arătat la aceea pagină.

In expresia elementului a intră valorile cantităţilor s şi μ. Pe acestea nu le cunoaştem însă aşa cum ar trebui. Ele se pot

determina experimental în tuneluri aerodinamice pe forme omotetice proectilelor avute în vedere. Nu s'au făcut însă până azi experienţe decât cu viteze de cel mult 30 la 40 metri, aşa că pentru vitezele superioare suntem nevoiţi de a păstra pentru s şi μ aceleaşi valori, considerându-le astfel ca constante pe toată întinderea traectoriei. *Şi vedem prin aceasta un exemplu când experienţa s'a lăsat întrecută de teorie, în loc de a o însoţi şi a o ajuta.*

Odată determinate valorile lui z din care rezultă u şi v, pentru primul arc de traectorie, se trece la arcul al doilea τ_1 la τ_2 în felul următor:

La sfârşitul primului arc se calculează atât valoarea z_1 cât şi valoarea z_1', care vor servi amândouă drept condiţii iniţiale pentru arcul următor. Pentru determinarea lui z'_1 se derivează relaţia (25) considerându-se τ', τ'' şi a ca constante.

Valorile lui z pentru arcul al doilea urmând a fi calculate prin formula

$$z_2 = \left(\frac{C\omega\tau' + iA\tau''}{a}\right)_2 + A_2 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} \tag{26}$$

valorile mijlocii ale elementelor τ', τ'' şi a, care trebuesc introduse în această formulă, se vor determina tot astfel cum s'a arătat pentru primul arc, noua valoare a lui a permiţând apoi de a calcula pe r_1 şi r_2. Rămâne să determinăm constantele A_2 şi B_2.

Pentru aceasta, vom egala valorile z_1 şi z'_1 dela sfârşitul arcului întâi, cu valorile date de relaţia (26) şi de derivata ei pentru z_2 şi z'_2 când facem pe t egal cu zero, adică socotind timpul pe arcul al doilea cu începere dela origina τ_1 a acestui arc.

Obţinem astfel egalităţile

$$z_1 = \left(\frac{C\omega\tau' + iA\tau''}{a}\right)_2 + A_2 + B_2$$

şi

$$z'_1 = A_2 r_1 + B_2 r_2$$

din care rezultă valorile noilor constante A_2 şi B_2. Şi aşa mai departe pentru toate arcurile următoare.

Ca o primă aproximaţie, putem începe prin a calcula mişcarea axului instantaneu de precesiune. Aceasta rezultă din determinarea valorilor

$$z_1 = \frac{C\omega\tau' + iA\tau''}{a}$$

adică

$$u_1 = \frac{C\omega\tau'}{a} \qquad \text{şi} \quad v_1 = \frac{A\tau''}{a}$$

z_1 fiind aici extremitatea axului în chestiune.

Cât despre *figura geometrică* a curbei descrise de extremitatea z a axului proectilului în planul axelor cordonate Ou şi Ov, rezultă din cele arătate până aici, că *această figură este constituită dintr'o serie de spire învârtite în jurul extremităţii* z_1 *a axului instantaneu de precesiune, ordonata* v_1 *a punctului* z_1 *fiind foarte mică iar abscisa* u_1, *pozitivă pentru tunurile ghintuite la dreapta, crescând necontenit până în apropierea punctului de viteză minimă al traectoriei, după care* u_1 *descreşte şi tinde la limită către zero.*

Dacă la începutul mişcării, axul proectilului coincide cu direcţia tangentei, spirele încep bine înţeles din origina O.

V. STABILITATEA PROECTILELOR PE TRAECTORIE.

Se zice că un proectil are stabilitate pe traectorie când unghiul θ dintre axul proectilului şi tangentă rămâne mic în tot cursul mişcării. Artileria nu utilizează de altfel decât proectile care satisfac acestei condiţii, căci dacă unghiul θ nu ar rămâne mic, proectilul nu s'ar mai putea prezenta cu vârful înainte în punctul de cădere, precizia tragerii ar suferi iar bătăile s'ar micşora fiindcă la valori mari ale unghiului θ corespund şi rezistenţe mari din partea aerului.

După cum a stabilit **M. de Sparre**, pentru ca unghiul θ să rămână mic, *este necesar* ca să avem în tot cursul mişcării (pag. 450)

$$(27) \qquad \frac{C^2\,\omega^2}{4\,A\,a} > 1$$

inegalitate [1]), care mai poate fi scrisă înlocuind pe a prin expresia sa $s(1+\mu)\,\frac{p}{g}\,c\,F(v)$:

$$(28)\qquad \frac{g}{4\,p}\;\frac{C^2\,\omega^2}{A\,s\,(1+\mu)\,c\,F(v)} > 1$$

sau încă, dacă înlocuim şi pe c şi ω prin expresiile lor cunoscute şi anume (pag. 423 şi 456)

$$c = i\,\Delta\,\frac{a_1^2}{p} \qquad \text{şi} \qquad \omega = \frac{2\,v_0\,\mathrm{tg}\,\eta}{a_1}$$

unde a_1 reprezintă calibrul proectilului iar η înclinarea ghinturilor:

$$(29)\qquad \frac{C^2\,g\,v_0^2\,\mathrm{tg}^2\,\eta}{A\,s\,(1+\mu)\,a_1^4\,i\,\Delta\,F(v)} > 1.$$

Această inegalitate trebue să aibă loc, după cum am spus, în tot cursul mişcării proectilului pe traectorie. Avem însă de observat, că dacă inegalitatea are loc la începutul mişcării, ea are loc şi mai departe căci în lungul traectoriei productul $\Delta\,F(v)$ rămâne tot timpul mai mic decât $\Delta_0\,F(v_0)$. *Inegalitatea precedentă, în care înlocuim pe $\Delta\,F(v)$ prin $\Delta_0\,F(v_0)$ ne procură deci o valoare minimă pentru η şi deci pentru viteza de rotaţie ω a proectilului necesară stabilităţii la origină.*

Acestei stabilităţi i s'a dat numele de *stabilitate esenţială*. Ea asigură proectilului o mişcare cu vârful înainte pe primele elemente ale traectoriei.

Mai putem observa, că pentru un acelaşi tun şi proectil, adică pentru aceleaşi valori C, A, şi η, dacă modificăm viteza iniţială v_0, cum avem aproximativ $F(v) = \beta v^2$, β fiind o constantă, raportul $\frac{v_0^2}{F(v_0)}$ nu variază mult, aşa că potrivit inegalităţii de mai sus: *dacă nu există instabilitate la origină pentru o viteză dată, nu va exista nici pentru o altă viteză iniţială.*

M. de Sparre a căutat a preciza valoarea optimă a lui ω,

---

[1]) Această inegalitate se aplică şi problemei stabilităţii sfârlezii.

în cazul când condițiile inițiale ale mișcării sunt acelea pe care le-am specificat la pag. 451, adică

$$\theta_0 = 0, \qquad \psi_0 = \psi'_0 = 0.$$

Să reluăm egalitatea

$$z = \frac{C\omega\,\tau' + i\,A\,\tau''}{a} + A_1\, e^{r_1 t} + B_1\, e^{r_2 t}$$

unde r_1 și r_2 conțin în factor pe i. Dacă neglijăm, după cum am mai făcut, pe $\frac{A}{a}\,\tau''$ față de $\frac{C\omega}{a}\,\tau'$, modulul lui z este mai mic decât suma celor trei moduli

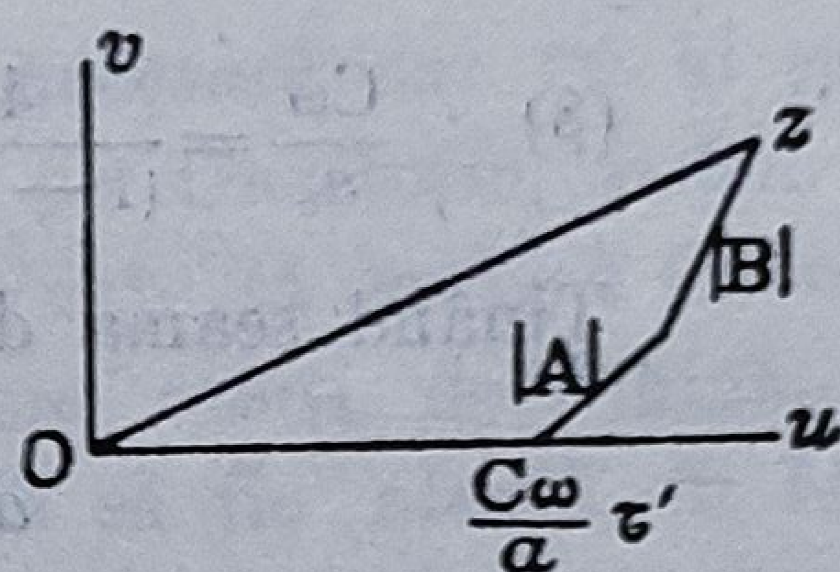


Fig. 245

$$\frac{C\omega}{a}\,\tau', \qquad \left| A_1 \right| \quad \text{și} \quad \left| B_1 \right|$$

$\frac{C\omega}{a}\,\tau'$ fiind o cantitate pozitivă pentru tunurile ghintuite la dreapta (ω și τ' amândoi negativi). Fie d această sumă, adică

$$d = \frac{C\omega}{a}\,\tau'_0 + \left| A_1 \right| + \left| B_1 \right|.$$

Să considerăm primul arc de traectorie. In condițiile inițiale de mai sus, putem înlocui valorile mijlocii τ' și a prin τ'_0 și a_0, iar pe de altă parte modulii $|A_1|$ și $|B_1|$ știm că au ca expresii:

$$\left| A_1 \right| = \frac{A}{C\omega}\,\tau'_0\,\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \quad \text{și} \quad \left| B_1 \right| = \frac{A}{C\omega}\,\tau'_0\,\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(1-\varepsilon)}.$$

Făcând aceste înlocuiri, avem ca valoare a lui d pe arcul considerat:

$$d = \tau'_0 \left[\frac{C\,\omega}{a_0} + \frac{A}{C\,\omega\,\varepsilon} \left\{ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon}{1-1} \right\} \right]$$

adică

$$d = \tau'_0 \left[\frac{C\omega}{a_0} + \frac{2\,A}{C\,\omega\,\varepsilon} \cdot \frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \right].$$

Această valoare depinde de ω, căci ε este funcție de ω:

$$(\alpha) \qquad \varepsilon^2 = 1 - \frac{4\,A\,a_0}{C^2\,\omega^2}.$$

Ori, modulul lui z măsoară amplitudinea unghiului θ pe care-l formează axul proectilului cu tangenta traectoriei. Deci, valoarea lui ω care asigură lui θ cele mai mici amplitudini pe prima porţiune de traectorie este aceea care face pe d minim.

Să căutăm acest minimum, luând însă ca variabilă independentă pe ε; valoarea lui ω va rezulta apoi din aceea găsită pentru ε,

Din relaţia (α) deducem:

$$(\beta) \quad \frac{C\omega}{a_0} = \frac{4\,A}{(1-\varepsilon^2)\,C\omega} \quad \text{şi} \quad (\gamma) \quad \frac{1}{C\,\omega} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{A\,a_0}}.$$

Ţinând seama de egalitatea (β) expresia lui d devine

$$d = \tau'_0\,\frac{2\,A}{C\,\omega}\cdot\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon\,(1-\varepsilon)}$$

iar înlocuind acum pe $\frac{1}{C\,\omega}$ prin expresia sa (γ) obţinem

$$d = \tau'_0\sqrt{\frac{A}{a_0}}\,\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon}}.$$

Minimul lui d depinde după cum se vede de minimul funcţiei de ε:

$$f(\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon}}$$

a cărei primă derivată fiind

$$f'(\varepsilon) = \frac{(2\,\varepsilon-1)\sqrt{1+\varepsilon}}{\varepsilon^2\,(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

ne dă, prin egalarea ei cu zero şi având în vedere că ε nu poate fi negativ,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

şi prin urmare

$$(30) \qquad \frac{C^2\omega^2}{4Aa_0} = \frac{4}{3}$$

relaţie din care rezultă valoarea lui ω, care asigură unghiului θ pe primul arc de traectorie o amplitudine minimă.

Acest rezultat datorit lui M. de Sparre corespunde cazului

când condiţiile iniţiale ale mişcării sunt, după cum am spus: $\theta_0 = o$, $\psi_0 = \psi'_0 = o$ din care rezultă $\theta'_0 = \tau'_0$. Totuşi, experienţa probează că valoarea respectivă a lui ω convine pentru toate cazurile normale de tragere.

Potrivit celor mai sus arătate, valoarea lui ω care rezultă din egalitatea (30) asigură nu numai la început dar în tot cursul mişcării condiţia

$$\frac{C^2\omega^2}{4Aa} > 1 .$$

Această condiţie fiind însă numai necesară dar nu şi suficientă pentru stabilitatea proectilului pe traectorie, vedem că valoarea definitivă de adoptat pentru ω care să convină întregei traectorii rămâne tot ne-precizată. Putem totuşi determina un interval în care această valoare urmează să fie aleasă, în felul următor:

Fie ω_1 valoarea care rezultă din egalitatea (30). Să comparăm proectilul în cauză cu un proectil omotetic de aceiaşi putere balistică şi recunoscut la trageri ca având o bună stabilitate pe traectorie. Fie δ depărtarea maximă a axului instantaneu de precesiune de planul de tragere pentru acest proectil, egală de altfel cu $\frac{C\omega}{a}\tau'$, a şi τ' referindu-se la punctul de pe traectorie care corespunde lui δ. Considerând punctul similar pentru proectilul celălalt, cu valorile respective ale elementelor C, a şi τ', egalitatea

$$\frac{C\omega}{a}\tau' = \delta$$ [1]

ne va da o valoare ω_2 care este viteza de rotaţie pe care ar trebui să o aibe proectilul în cauză pentru ca depărtarea maximă a axului instantaneu de precesiune de planul de tragere, pentru acest proectil, să fie egală cu δ. Intervalul în chestiune este atunci intervalul dintre ω_1 şi ω_2, în care, după o discuţiune, sau

---

[1]) Sau $\frac{C\omega g^2}{s(1+\mu)\,pcvF(v)} = \delta$, dacă înlocuim pe τ' şi pe a prin expresiile lor: $\tau' = -\frac{g\cos\tau}{v}$ şi $a = s(1+\mu)\frac{p}{g}cF(v)$, τ' fiind unghiul corespunzător depărtării maxime şi v viteza respectivă.

prin comparaţie cu alte proectile analoage, se va alege pentru ω valoarea cea mai convenabilă.

Observaţiuni. Inegalitatea (28) arată că pentru un tun dat, dacă se utilizează proectile din ce în ce mai lungi, cum raportul $\frac{C^2}{A}$ descreşte atunci neîncetat, primul membru al inegalităţii descreşte şi el, şi, când încetează de a fi superior unităţii se intră în domeniul instabilităţii. Mărirea greutăţii proectilului grăbeşte şi ea atingerea acestui domeniu.

Pentru stabilitatea proectilelor foarte lungi este deci necesar ca viteza de rotaţie ω să fie foarte mare, însă, o asemenea viteză, bună la origină, este nefastă în cursul mişcării, căci depărtarea maximă a axului instantaneu de precesiune de planul de tragere, care este proporţională cu ω, devine atunci prea mare. Se pot însă concilia aceste două condiţii contradictorii creându-se frecări artificiale pe suprafaţa proectilului, care să aibe ca efect de a micşora treptat valoarea iniţială a lui ω.

In cazul proectilelor alungite prin adăogarea unei coafe goale, reportul $\frac{C^2}{A}$ variază puţin, însă s creşte, căci, prin adăogarea coafei, centrul de greutate se deplasează în lungul axului mult mai puţin decât centrul de rezistenţă. Greutatea p a proectilului rămânând sensibil aceiaşi, rezultă în cele din urmă potrivit inegalităţii (28) că *pentru stabilitatea lor esenţială, proectilele coafate au nevoe de o viteză de rotaţie ω mai mică decât proectilele pline de aceiaşi lungime.*

M. de Sparre, în numeroasele sale lucrări, s'a ocupat şi de influenţa diverselor defecte ale proectilului asupra stabilităţii. Astfel, dânsul a putut demonstra că *neregularităţile mişcării datorite fie unei diferenţe dintre direcţia vitezei iniţiale şi axul proectilului, fie unei uşoare excentricităţi a proectilului, au o slabă influenţă. Din potrivă, neregularităţile datorite unei diferenţe dintre axul de figură al proectilului şi axul principal de inerţie vecin, sau diferenţei dintre axul de figură şi vectorul rotaţiei proectilului, au o influenţă mai mare.*

De asemenea constatări, urmează a se ţine seama când se fixează toleranţele de fabricaţiune ale proectilelor.

VI. EFECTUL FRECĂRILOR LATERALE.

In ceea ce precedă, am neglijat frecările laterale F ale aerului pe suprafaţa proectilului, făcând în consecinţă pe k egal cu zero. Să ţinem acum seama şi de aceste frecări, presupunând pe k diferit de zero.

Reluând ecuaţia (15):

$$Az'' - i\,C\omega\, z' - (a + i\,k\omega\,\alpha)\,z = -\,C\omega\,\tau' - i\,A\,\tau''$$

am văzut că soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$z = \frac{C\omega\,\tau' + i\,A\tau''}{a + i\,k\omega\,\alpha} + A_1\,e^{r_1 t} + B_1\,e^{r_2 t}$$

r_1 şi r_2 fiind rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$Ar^2 - i\,C\omega\,r - (a + i\,k\omega\,\alpha) = 0$$

adică

$$r = i\,\frac{C\omega}{2A} \pm \frac{i}{2A}\sqrt{C^2\,\omega^2 - 4\,A\,(a + i\,k\omega\,\alpha)}\,.$$

Ori, cantitatea de sub radical poate fi pusă sub forma

$$(C^2\,\omega^2 - 4\,A\,a)\left(1 - i\,\frac{4\,A\,k\,\omega\alpha}{C^2\,\omega^2 - 4\,A\,a}\right)$$

şi, dacă presupunem frecările mici, atunci $k\alpha$ fiind mic putem scrie [1])

$$\sqrt{1 - i\,\frac{4\,Ak\,\omega\alpha}{C^2\,\omega^2 - 4A\,a}} = 1 - i\,\frac{2\,Ak\,\omega a}{C^2\,\omega^2 - 4\,A\,a}$$

aşa încât expresiunea lui r devine

$$r = i\,\frac{C\,\omega}{2\,A} \pm \frac{i}{2\,A}\sqrt{C^2\,\omega^2 - 4\,A\,a}\left(1 - i\,\frac{2\,A\,k\,\omega\,a}{C^2\,\omega^2 - 4\,A\,a}\right)$$

sau

$$r = i\left[\frac{C\,\omega}{2\,A} \pm \frac{C\,\omega}{2\,A}\sqrt{1 - \frac{4\,A\,a}{C^2\,\omega^2}}\,\right] \pm \frac{k\,\alpha}{C\sqrt{1 - \frac{4\,A\,a}{C^2\,\omega^2}}}\,.$$

---

[1]) Potrivit formulei $(1 - x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\,x + \ldots\ldots$

Punând însfârşit ca şi până acuma

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{4 A a}{C^2 \omega^2}, \qquad \varepsilon = 1 - \frac{2 A a}{C^2 \omega^2}$$

avem

$$r = i \frac{C \omega}{2 A} (1 \pm \varepsilon) \pm \frac{k \alpha}{C \varepsilon}$$

semnele $+$ corespunzându-se reciproc şi de asemenea semnele $-$.

Soluţia generală este în consecinţă

$$z = z_1 + z_2$$

unde

$$z = \frac{C \omega \tau' + i A \tau''}{a + i k \omega \alpha}$$

şi

$$z_2 = A_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 + \varepsilon) t} \cdot e^{\frac{k \alpha}{C \varepsilon} t} + B_1 e^{i \frac{C \omega}{2 A} (1 - \varepsilon) t} \cdot e^{-\frac{k \alpha}{C \varepsilon} t}.$$

Scriind pe z_1 sub forma

$$z_1 = \frac{\frac{C \omega}{a} \tau' + i \frac{A}{a} \tau''}{1 + i \frac{k \omega \alpha}{a}}$$

observăm că punctul z_1 (fig. 239) ale căruia cordonate erau

$$u_1 = \frac{C \omega}{a} \tau' \qquad \text{şi} \quad v_1 = \frac{A}{a} \tau''$$

iar modulul egal cu $\sqrt{u_1^2 + v_1^2}$, are acum, când ţinem seamă de frecări, un modul egal cu

$$\frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \omega^2 \alpha^2}{a^2}}}$$

adică un modul mai mic şi cu atât mai mic cu cât ω şi k sunt mai mari. Aşa dar, *frecările laterale apropie axul instantaneu de precesiune de tangentă şi aceasta cu atât mai mult cu cât viteza de rotaţie a proectilului în jurul axului său este mai mare şi frecările mai mari.*

Dar, pentru ca apropierea axului instantaneu de precesiune de tangenta traectoriei să corespundă în acelaşi timp şi unei apropieri a axului proectilului de această tangentă, mai

este necesar ca modulul lui z_2 să rămână mic ca în cazul când n'ar exista frecări. Cum patratul acestui modul este

$$\rho^2 = A_1{}^2 e^{\frac{2k\alpha}{C\varepsilon}t} + B_1{}^2 e^{-\frac{2k\alpha}{C\varepsilon}t} + 2A_1 B_1 \cos\frac{C\omega}{A}\varepsilon t$$

vedem că valoarea sa depinde de valorile constantelor A_1 şi B_1 precum şi de acelea ale exponenţialelor

$$e^{\frac{2k\alpha}{C\varepsilon}t} \qquad \text{şi} \qquad e^{-\frac{2k\alpha}{C\varepsilon}t}.$$

Ori, în condiţiunile normale de tragere, valorile constantelor de integraţiune A_1 şi B_1 sunt totdeauna mici, după cum s'a văzut prin exemplul dela paragraful 2 al capitolului III, iar pe de altă parte valoarea primei exponenţiale care creşte odată cu t rămâne totuşi mică, atât din cauză că durata totală a parcurgerii traectoriei până la punctul de cădere este relativ mică, cât mai ales pentru că coeficientul exponenţial $\frac{k\alpha}{C\varepsilon}$ este mic. Cea de a doua exponenţială descreşte cu timpul şi această descreştere este evident favorabilă micşorării lui ρ.

Aşa dar valoarea lui ρ rămâne mică. *Frecările apropiind axul instantaneu de precesiune de tangenta traectoriei şi ne-influenţând asupra ordinei de mărime a modulului lui z_2, produc deci un efect de stabilizare, apropiind axul proectilului de tangentă.* Aceasta însă cu condiţiunea ca frecările să fie mici ($k\alpha$ mic); când sunt din potrivă exagerate, ele devin hotărât vătămătoare.

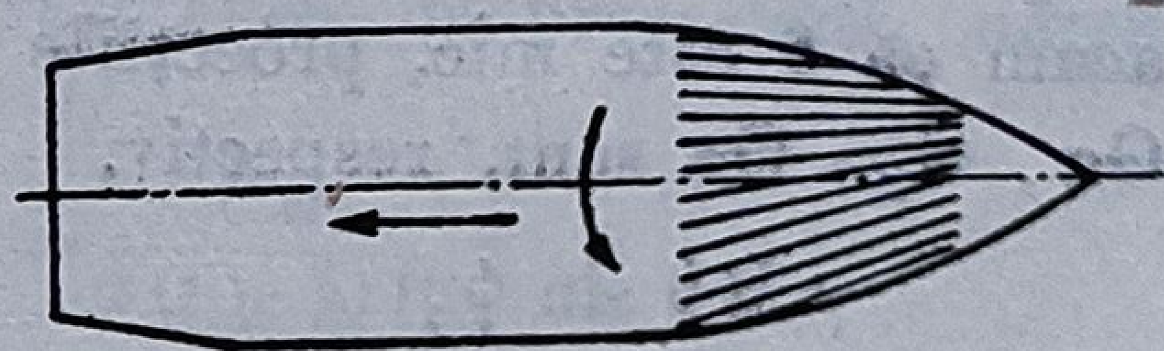


Fig. 246

Astfel, în Franţa, nu de multă vreme, s'au putut stabiliza nişte proectile creându-se frecări artificiale pe partea lor anterioară (fig. 246); exagerându-se apoi aceste frecări, proectilele au devenit mai puţin stabile chiar de cum erau la început.

Nu încape nici-o îndoială că *este avantajos de a face aspră partea anterioară a proectilelor şi din potrivă perfect netedă partea lor de dinapoi.*

VII. DERIVAŢIUNEA PROECTILELOR.

Să reluăm sistemul de referinţă $Gxyz$, în care Gz este tangenta traectoriei centrului de greutate al proectilului, dusă în sensul mişcării; Gx este orizontala perpendiculară în G pe planul vertical al traectoriei, îndreptată spre dreapta acestui plan, iar Gy este perpendiculara dusă planului format de cele două axe Gx şi Gz, îndreptată în sus şi conţinută bine înţeles în planul traectoriei.

Fig. 247

Neglijând frecările, fie R rezistenţa aerului; C punctul ei de aplicaţie, adică centrul de rezistenţă situat pe axul GZ al proectilului, şi $y_1 G y'_1$ intersecţia planului de rezistenţă zGZ cu planul xGy.

Proectând forţa R pe direcţiile Gz şi Gy'_1, obţinem

$$-R\cos(\theta_1-\theta) \qquad \text{şi} \qquad R\sin(\theta_1-\theta)$$

aceasta din urmă dându-ne apoi în proecţiune pe Gx şi Gy:

$$R\sin(\theta_1-\theta)\sin\psi \qquad \text{şi} \qquad -R\sin(\theta_1-\theta)\cos\psi\,.$$

Aşa dar, punând $\theta_1-\theta=\mu\theta$ şi presupunând ca şi până acum că θ este mic, proecţiile rezistenţei R pe cele trei axe Gx, Gy, Gz sunt, respectiv,

$$\mu R\theta\sin\psi\,, \qquad -\mu R\theta\cos\psi\,, \qquad -R\,.$$

Dintre aceste trei forţe şi referindu-ne la ceea ce am spus la pag. 431, forţa $-R$ reprezintă rezistenţa tangenţială R_t iar celelalte două sunt componentele forţei R_n pe axele Gx şi Gy, această forţă R_n fiind de altfel îndreptată pe Gy'_1 şi având ca expresie, după cum am spus mai sus, $R\sin(\theta_1-\theta)$ sau $\mu R\theta$.

Componenta $\mu R\theta\sin\psi$ a lui R_n, fiind perpendiculară pe planul traectoriei, depărtează centrul de greutate perpendicular acestui plan, producând ceea ce artileriştii numesc *Derivaţiunea*

proectilului. Cealaltă componentă $-\mu R \theta \cos \psi$, fiind coprinsă în planul traectoriei, tinde a deplasa centrul de greutate în acest plan.

Introducând variabilele u și v, definite prin egalitățile cunoscute,

$$u = \theta \sin \psi, \qquad v = -\theta \cos \psi$$

cele două componente ale lui R_n devin

$$\mu R u, \qquad \mu R v.$$

Ori, după cum știm, pentru tunurile ghintuite la dreapta axul GZ al proectilului rămâne tot timpul la dreapta planului traectoriei, planul de rezistență zGZ oscilând în jurul tangentei și trecând la scurte intervale de timp când deasupra când dedesubtul orizontalei Ou [1]). Rezultă atunci că componenta $\mu R v$ de pe axul Ov, care este de altfel mică de oarece v este mic, este alternativ când pozitivă când negativă și are prin urmare un efect ca și nul asupra deplasării centrului de greutate în planul traectoriei.

Rămâne componenta $\mu R u$, care produce derivațiunea. Ecuația respectivă a mișcării este

$$\frac{p}{g} \frac{d^2 D}{d t^2} = \mu R u$$

însemnând prin D derivațiunea.

Putem simplifica studiul derivațiunii, presupunând axul proectilului confundat cu axul instantaneu de precesiune, adică luând

$$u = u_1 = \frac{C \omega}{a} \tau' = \frac{C \omega}{s(1+\mu) R} \tau'.$$

Ecuația mișcării devine atunci

$$\frac{p}{g} \frac{d^2 D}{dt^2} = \mu R u_1 = \frac{\mu C \omega}{s(1+\mu)} \tau'$$

---

[1]) Am văzut, în adevăr, că ordonata v_1 referitoare la axul instantaneu de precesiune este foarte mică, așa că ordonata $v = v_1 + v_2$ referitoare la axul proectilului este ca și egală cu v_2, adică egală cu ordonata punctului z_2 (fig. 239).

sau

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 D}{dt^2} = M \tau'$$

punând

$$M = \frac{g}{p} \quad \frac{\mu}{s(1+\mu)} C \omega$$

integraţiunea ecuaţiei (α) dându-ne valoarea principală a derivaţiunii.

Scriind această ecuaţie sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dD}{dt}\right) = M \frac{d\tau}{dt}$$

sau

$$d\left(\frac{dD}{dt}\right) = M\, d\tau$$

deducem

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dD}{dt}\right) = M$$

şi, inversând ordinea derivărilor,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dD}{d\tau}\right) = M$$

de unde

$$\frac{dD}{d\tau} = Mt$$

şi

$$D = M \int_{\tau_0}^{\tau_c} t\, d\tau$$

τ_0 şi τ_c fiind valorile lui τ la origină şi în punctul de cădere al proectilului.

Ori, integraţiunea pe arcuri succesive ne permite de a cunoaşte un mare număr de valori de ale timpului t corespunzătoare valorilor τ dela origină la punctul de cădere, aşa încât putem construi curba $t = f(\tau)$ şi evalua aria

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_c} t\, d\tau .$$

Derivaţiunea va fi atunci

$$D = M . S$$

cu

$$M = \frac{g}{p} \frac{\mu}{s(1+\mu)} C \omega .$$

Vedem astfel că *derivaţiunea este proporţională cu viteza de rotaţie* ω, *sau cu înclinarea* η *a ghinturilor, şi invers proporţională cu depărtarea* s *a centrului de rezistenţă de centrul de greutate*, deci mai mică pentru proectilele moderne lungueţe, unde centrul de rezistenţă se găseşte la o depărtare mai mare de centrul de greutate.

Pentru tunurile ghintuite la dreapta, axul instantaneu de precesiune fiind necontenit la dreapta planului de tragere, derivaţiunea are şi ea loc tot în această parte, adică spre partea încotro se răsucesc ghinturile.

De altfel, formula $D = M . S$ ne dă în acest caz o valoare pozitivă pentru D, de oarece pe de o parte integrala care reprezintă pe S este negativă căci $\tau_0 > \tau_c$ iar pe de altă parte ω este şi el negativ.

Elementele s şi μ care intră în expresia lui M se determină, după cum s'a mai spus, în tunelurile aerodinamice. Invers, dacă pentru o traectorie s'a măsurat pe teren derivaţia D şi s'a calculat suprafaţa S, raportul $\frac{D}{S}$ ne va da valoarea lui M şi deci valoarea raportului

$$\frac{\mu}{s\,(1+\mu)}.$$

Experienţe executate în Franţa[1]) au dovedit, că dacă se execută o tragere la 20^0 şi se măsoară pe teren derivaţiunea respectivă, evaluându-se şi aria S, toate celelalte derivaţiuni pot fi calculate prin formula $D = M . S$, luându-se pentru raportul $\frac{\mu}{s\,(1+\mu)}$ valoarea pe care o procură tragerea la unghiul de 20^0. Astfel, acest raport pare a fi independent de unghiul de tragere. Cele mai bune potriviri între derivaţiile calculate şi cele măsurate pe teren, au fost obţinute cu calibrele mici şi viteze peste $400\ ^m/_s$.

In practică se utilizează şi formule empirice pentru cal-

---

[1]) *Lt. Colonel Dufrénois*, **Conférences sur la Balistique Extérieure, 1926, pag. 226.**

culul derivaţiunei. Astfel, formula foarte simplă:

$$D = k T^2$$

unde k este o constantă pentru un acelaşi proectil, tras cu aceiaşi viteză iniţială în acelaşi tun, adică pentru toată întinderea unei table de tragere, iar T este durata traectului. Valoarea lui k rezultă din două sau trei experienţe de tragere, sub unghiuri diferite, luându-se mijlocia valorilor ce se obţin pentru raportul $\frac{D}{T^2}$.

ASUPRA FORMELOR CARE ASIGURA PROECTILELOR O REZISTENŢĂ CÂT MAI MICĂ DIN PARTEA AERULUI.

EXPERIENŢELE DELA POLIGONUL SUDIŢI.

La 26 Ianuarie 1931, am înaintat Ministerului de Război un raport cu următorul conţinut:

„Inainte de războiul european, nu s'a ocupat nimeni în mod deosebit cu forma cea mai raţională de dat proectilelor de artilerie pentru ca ele să bată cât mai departe; aceasta din cauză că toate formele ogivale permiteau de a se obţine bătăile socotite necesare pentru diversele cazuri de luptă.

Pe timpul războiului însă, necesitatea unor bătăi mult mai mari decât cele prevăzute din timp de pace devenind imperioasă, chestiunea formei exterioare de dat proectilelor pentru ca ele să întâmpine o rezistenţă cât mai mică din partea aerului şi prin urmare să bată cât mai departe, a devenit la ordinea zilei.

Studiile care s'au făcut au determinat pe artilerişti să admită pentru fundul proectilelor forma uşor tronconică pe care o poseda deja glonţul de infanterie francez, zis glonţul D., iar pentru ogivă, o formă mult mai ascuţită, fără bine înţeles a schimba prea mult raportul dintre cele două momente de inerţie ale proectilului, longitudinal şi transversal, de care depinde stabilitatea proectilului pe traectorie.

S'a mai recunoscut însfârşit că prin adaptări de coafe de ogive, de lungimi mergând până la 3 şi chiar 4 calibre, în loc de un calibru cum au de obicei ogivele, se îmbunătăţeau calităţile balistice ale proectilelor.

Dar, după câte ştiu, nimeni n'a studiat ce anume profil convine coafelor de ogive, pentru ca ele să permită maximum

de bătae. *Trebue păstrat tot profilul ogival sau se impune vre-un alt profil nou?*

Subsemnatul, pe timpul cât am fost profesor de Mecanică raţională la Universitatea din Cluj, fiind îndemnat prin însăşi natura acestei ocupaţii de a cerceta chestiunile technice care ar putea beneficia de resursele transcedentale ale Mecanicei, spre a fi rezolvate, am luat în studiu chestiunea determinărei profilului ogivelor, punându-mi următoarea problemă:

Ce profil trebue să-i se dea unei ogive pentru ca rezistenţa aerului asupra ei să fie minimă?

Aplicând ecuaţiile lui ***Euler*** din Hidrodinamică şi teorema lui ***Lagrange***, apoi admiţând pentru mişcarea moleculelor de aer din jurul proectilelor fie legea izotermică fie legea adiabatică, am ajuns la concluzia finală, că pentru ca un proectil să întâmpine minimum de rezistenţă din partea aerului şi deci să bată cât mai departe, este necesar ca ogiva sa (mai exact: partea sa anterioară) să fie *o suprafaţă de revoluţie născută de o anumită generatrice care să fie pe deoparte tangentă generatricei părţei cilindrice a proectilului, iar pe de altă parte tangentă axului longitudinal al proectilului la infinit.*

In mod practic, ogiva falşă poate fi limitată după cum s'a spus la 3 sau 4 calibre, dându-se proectilului o viteză de rotaţie în raport cu lungimea admisă.

Acesta fiind rezultatul general al studiului meu, am onoarea a vă propune să binevoiţi a-mi da posibilitatea să verific prin trageri rezultatele la care m'au condus studiile teoretice, în credinţa pe care o am că voi izbuti a mări toate bătăile proectilelor noastre cu cel puţin 20°/₀.

Alătur desenul unui proectil de 75 mm. cu modelul a două coafe de ogive dintre care cea mai lungă ar fi desigur cea mai avantajoasă, dacă viteza de rotaţie a proectilului se va dovedi a fi suficientă pentru adoptarea ei".

Acest raport a fost supus discuţiei Comitetului Technic al Artileriei, care l-a aprobat, deşi cu oarecare îndoială asupra obţinerii sporului de bătae ce anunţasem.

Ministerul a dispus atunci realizarea coafelor, însă, din diferite motive, experienţele de tragere n'au avut loc decât tocmai în ziua de 23 Aprilie 1940, adică după mai bine de 9 ani dela data aprobării ministeriale pentru realizarea şi experimentarea coafelor.

Tragerea s'a executat în poligonul dela Sudiţi cu un tun de 75 mm. F. F., în prezenţa mea şi sub conducerea şi controlul unei comisii technice militare, numită de Ministerul Inzestrării Armatei.

Aceste experienţe au confirmat în totul exactitatea prevederilor mele teoretice. Astfel s'a dovedit că:

a) Graţie profilului special al coafelor mele, bătăile au crescut simţitor, coafa cea lungă dând bătaia cea mai mare;

b) Sporul de bătae obţinut a trecut de 20%, fiind de 22%;

c) Stabilitatea proectilului pe traectorie a crescut considerabil, obţinându-se o împrăştiere în bătae şi mai ales în direcţie mult mai redusă decât în tragerile cu proectilul ne-coafat [1]).

Buletinul de tragere ce mi s'a înaintat de preşedintele comisiei technice militare, specifică în adevăr următoarele:

a) Cu coafa cea lungă bătaia maximă obţinută a fost de 9.804 metri faţă de 8.045 cât s'a obţinut cu proectilul ne-coafat;

b) Sporul de bătae fiind 1.755 metri reprezintă cu adevărat o creştere a bătăii cu 22%;

c) La tragerea sub unghiul de 33°50′ care a dat bătaia maximă de 8.045 cu proectilul ne-coafat, abaterile probabile în bătae şi în direcţie au fost respectiv de 72,4 şi 7,3 metri, pe când cu proectilul coafat, care la acelaşi unghiu de tragere de 33°50′ a dat ca bătae 9.575 metri, abaterile nu au fost decât de 48,65 şi 2,23 metri, cifre care la bătaia de 8.045 metri cu proectilul coafat trebue desigur să fie încă şi mai mici. Deci o împrăştiere în bătae şi mai ales în direcţie foarte strânsă.

Profilul coafelor mele este o curbă analitică cu dublă curbură, adică prezentând un punct de inflexiune, iar vârful

---

[1]) Experienţele executate la noi în ţară cu coafe cu generatrici drepte, n'au dat niciodată asemenea rezultate.

TABEL COMPARATIV

al datelor tragerilor executate în ziua de 23 Aprilie 1940 la Poligonul Sudiţi: tun de 75 mm. F. F.

cu: obuzul Md. 15 cu focos scurt Nr. 99/908 — p = 5,315 kg. V_0 = 550 m/m.

„ „ semilestat cu coafa scurtă „General Burileanu" — p = 5,511 „ V_0 = „

„ „ „ „ „ lungă „General Burileanu" — p = 5,700 „ V_0 = „

DETALII	φ = 33° 50'			φ = 41° 45'	Observaţii
	Obuze de 75 mm. Model 15				
	cu focos scurt Md. 99/908	semilestat cu coafa scurtă „Gl. Burileanu" şi focos Schneider Md. 16	semilestat cu coafa lungă „Gl. Burileanu" şi focos U_1	semilestat cu coafa lungă „Gl. Burileanu" şi focos U_1	
Bătaia măsurată	8.049	8.937	9.575	9.804 [3]	1) S'a tras seria de 12 lovituri. Precizia calculată din 11 lovituri. 2) S'a tras seria de 10 lovituri. Precizia calculată din 9 lovituri. 3) S'au tras numai 2 lovituri luate dela seria 3-a.
Bătaia corectată pentru condiţii normale	8.113	9.035	9.640	9.973	
Abaterea probabilă în bătae	72,4 [1]	57,48 [1]	48,65 [2]	—	
Abaterea probabilă în direcţie	7,9	4,36	2,23	—	

LUNGIMI ŞI GREUTĂŢI

1. Obuzul fără coafă 300 mm. = 4 calibre
2. Obuzul cu coafă 450 „ = 6 „
3. Ogiva obuzului 82 „ = 1 „ + 7 mm.
4. Lungimea coafei 232 „ = 3 „ + 7 „

---

5. Gr. obuzului f. coafă 5,315 kg.
6. „ coafei . . . . . 385 gr.
7. „ obuzului cu coafă 5,700 kg.

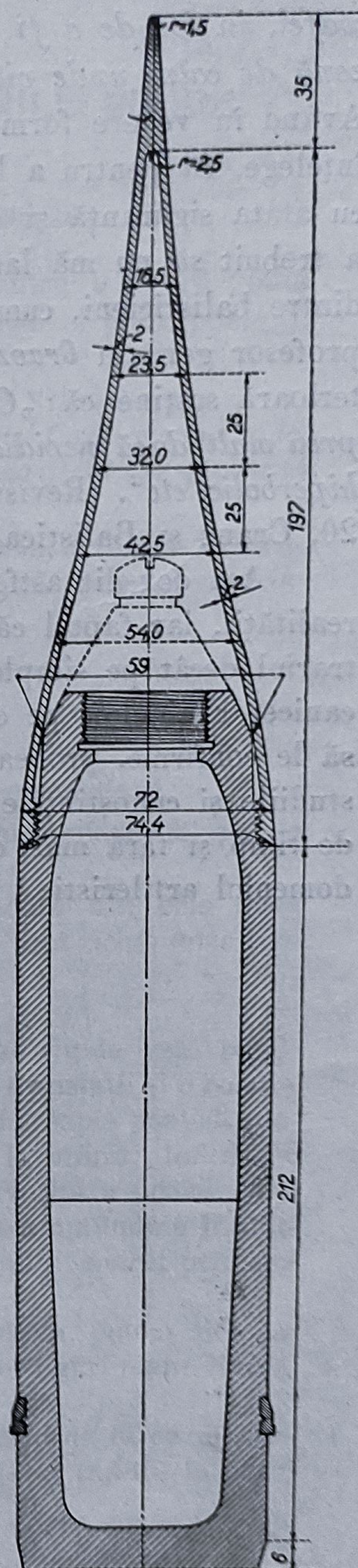


Fig. 248

coafei, in loc de a fi ascuțit, prezintă o mică suprafață zisă zonă de calm, unde viteza relativă a scurgerii aerului este nulă. Având în vedere forma aceasta deosebită a coafelor mele, se înțelege, că pentru a le propune Ministerului de Război și încă cu atâta siguranță și încredere în rezultatele ce aveau să dea, a trebuit să nu mă las deloc influențat de afirmațiunile unora dintre balisticieni, cum spre exemplu de afirmația cunoscutului profesor german ***Cranz,*** care în tratatul d-sale de Balistică Exterioară susține că: „*Concluziunile ultime sunt că nu interesează prea mult dacă meridianul vârfului este ogival sau parabolic, ori hiperbolic, etc*". (Revista Artileriei din Octombrie 1939, pagina 20, Cranz și Balistica sa Exterioară).

Am dovedit astfel că asemenea afirmații nu corespundeau realității, iar faptul că eu nu m'am bazat pentru a susține contrariul decât pe simple considerații teoretice din domeniul Mecanicei Fluidelor, pe care tragerile de poligon au venit în urmă să le confirme, probează odată mai mult cât de necesare sunt studiile și cunoștințele teoretice pentru rezolvarea fără perdere de timp și fără mari cheltuieli a atâtor chestiuni care interesează domeniul artileristic.

Nota A.

ECUAŢII DE ECHILIBRU LA FIGURILE RIGIDE

de D. POMPEIU
Profesor universitar şi membru al Academiei Române.

1. Un raţionament elementar arată că, pentru o figură plană rigidă, strămutarea cea mai generală, în propriul ei plan, poate fi obţinută printr'o translaţie urmată de o rotire.

Ca lemă preliminară poate servi propoziţia următoare:

Când, în strămutarea cea mai generală a unei figuri plane rigide, două puncte au ajuns în poziţia lor finală, întreagă figura se găseşte în poziţia ei finală.

2. Dacă acum, dela strămutarea *finită* trecem, la limită, la strămutarea *infinitezimală* (elementară) atunci enunţiul general se păstrează iar traducerea lui analitică devine

$$\begin{aligned} dx &= d\xi - (y-b)\,d\theta \\ dy &= d\eta + (x-a)\,d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

în care:

$[d\xi,\ d\eta]$ este translaţia elementară

iar $[-(y-b)\,d\theta\,,\ +(x-a)\,d\theta]$ rotaţia elementară.

De remarcat că traducerea analitică a enunţului ne sileşte la o exprimare mai corectă a acestui enunţiu:

În adevăr *translaţia* se înregistrează pe fiecare din cele două axe coordonate iar când zicem „o translaţie" de fapt zicem *suma geometică a două translaţii independente.*

Aşa dar ca încheere:

Mişcarea elementară (1) a unei figuri plane rigide este rezultatul a *trei* mişcari elementare independente: două translaţii şi o rotaţie.

3. Mai departe, să observăm că, după cum dreapta poate fi considerată ca un cerc de rază infinită (cu centrul la infinit) tot aşa o translaţie poate fi considerată (erà o expresie favorită a profesorului Koenigs, în cursul său la Sorbona) ca o rotire de amplitudine infinit-mică împrejurul unui centru situat la distanţă infinit-mare; prin urmare o *adevărată valoare de forma* $\infty \,.\, 0$.

4. Dar cu acest mod de a considera translaţia, putem zice că, strămutarea elementară, cea mai generală, a unei figuri plane rigide: rezultă din *trei rotiri.*

Iar această formulare ne îndeamnă să trecem de la cazul *particular* (când două, din cele trei rotiri au centrele la infinit) la cazul general a trei rotiri elementare obişnuite:

$$\begin{aligned} dx &= -(y-y_1)\,d\alpha_1 - (y-y_2)\,d\alpha_2 - (y-y_3)\,d\alpha_3 \\ dy &= +(x-x_1)\,d\alpha_1 + (x-x_2)\,d\alpha_2 + (x-x_3)\,d\alpha_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Eu zic că relațiile acestea (2) pot fi identificate cu (1). În adevăr, pentru aceasta trebue ca

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 + d\alpha_3 = d\theta$$
$$y_1\, d\alpha_1 + y_2\, d\alpha_2 + y_3\, d\alpha_3 = d\xi$$
$$- x_1\, d\alpha_1 - x_2\, d\alpha_2 - x_3\, d\alpha_3 = d\eta$$

ceia ce e totdeauna posibil, dacă

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ceia ce înseamnă că cele trei centre de rotire trebue să formeze un adevărat triunghiu (arie ne-nulă).

5. Iată dar, acum, un enunțiu care pentru mișcarea elementară a unei figuri plane rigidă — cuprinde enunțiul clasic ca un caz particular:

Mișcarea elementară, cea mai generală, a unei figuri plane rigidă, poate fi obținută prin trei rotiri elementare împrejurul a trei centre formând un triunghiu obișnuit (ne-turtit).

6. Să ne folosim acum, trecând la *Statică*, de acest rezultat din *Cinematică*, ca să obținem pentru o figură plană rigidă condiții de echilibru mai generale de cât condițiile clasice.

E destul să aplicăm *principiul lucrului virtual* pentru a obține rezultatul următor:

Pentru o figură rigidă plană, și forțele fiind în acelaș plan: dacă suma momentelor forțelor, calculată în trei puncte (ne în linie dreaptă) *e nulă, atunci avem echilibru.*

Iată o formă, a condițiilor de echilibru, care după explicările cinematice ce au precedat, trebue considerată ca mai generală de cât forma clasică, în care intră rezultanta generală.

7. O cale absolut analoagă se poate urma, pentru figurile rigide cu trei dimensiuni.

Se stabilește întâiu propoziția de cinematică, după care strămutarea elementară cea mai generală a unui solid — se poate obține ca rezultat a șase rotiri împrejurul a șase muchi (drepte, ca axe) ale unui tetraedru, nedeformat.

Apoi, principiul lucrului virtual, ne dă enunțiul general pentru echilibrul forțelor la un solid: *suma momentelor forțelor, calculată pe rând în raport cu fiecare din cele șase muchii, să fie nulă.*

8. Această formă a condițiilor de echilibru pentru un solid este bine cunoscută [**Appell**, *traité de mécanique rationnelle*, I, 3-ième edition, page 139].

Scopul acestei note nu poate fi altul de cât de a pune, *mai în vedere*, un rezultat de formă generală, în statica corpului solid, evidențiind în acelaș timp substratul lui cinematic.

Nota B

ENERGIA.

MIŞCARE CONSERVATIVĂ ŞI MIŞCARE NECONSERVATIVĂ A ENERGIEI.

de **C. POPOVICI**

Profesor universitar şi Directorul Observatorului Astronomic din Bucureşti.

1). Reamintim ecuaţiile generale ale mecanicei, în primul rând teorema *impulsului*, care se exprimă astfel:

$$(1) \qquad d\,(m\,v) = \mathrm{F}\,dt$$

în care m este massa unui punct supus forţelor de rezultantă F, iar v vectorul viteză [1]) al massei m în intervalul dt.

Dacă massa m e constantă, sau dacă variaţia ei o considerăm neglijabilă pentru intervalul de timp în care studiem mişcarea, atunci ecuaţia (1) devine

$$(2) \qquad m\,d\,v = \mathrm{F}\,dt$$

care e în fond ecuaţia lui *Newton* şi care proectată pe cele trei axe de coordonate carteziene ne dă cele trei ecuaţii generale ale mişcării punctului:

$$(2') \quad m\,\ddot{x} = \mathrm{X} \text{ (notaţia Newton)} \quad \text{sau} \quad m\,\frac{d^2 x}{dt^2} = \mathrm{X} \text{(notaţia Leibnitz)}$$

şi alte două similare, ce obţinem dacă înlocuim x şi X respectiv prin y şi Y, apoi prin z şi Z. Se vede că $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ şi $\ddot{z}$ sunt componentele acceleraţiei [2]) şi X, Y şi Z, componentele rezultantei forţelor aplicate massei m.

2). **Energie.** Ecuaţiile (2′) se pot scrie

$$(2'') \qquad m\,\frac{d^2 x}{dt^2}\,\frac{dx}{dt}\,dt = \frac{m}{2}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \mathrm{X}\,dx$$

de unde

$$(3) \qquad \frac{m}{2}\,d\,(v^2) = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz\,.$$

Acum dacă membrul al doilea este integrabil şi o putem constata dacă avem verificate identităţile

$$(4) \qquad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}$$

---

[1]) Cinematica, pag. 43.
[2]) Cinematica, pag. 53.

atunci există o funcţiune $U(x, y, z)$, astfel ca

$$dU = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \tag{5}$$

şi vom avea o integrală a mişcării dată de *Newton*

$$m\,\frac{v^2(x, y, z)}{2} - U(x, y, z) = h \tag{6}$$

unde h este o constantă

$$h = m\,\frac{v_0^2(x_0, y_0, z_0)}{2} - U(x_0, y_0, z_0)\,.$$

Integrala (6) a fost numită de *Leibnitz, integrala forţelor vii*, expresiunea *m v² energie cinetică* şi $-U$ *energie potenţială*, suma lor *energie totală*.

Dacă relaţiile (4) sunt satisfăcute, vedem că *energia totală rămâne constantă* şi mişcarea se zice *conservativă*. In cazul contrar mişcarea se zice *neconservativă* (de energie).

Se recunoaşte mişcarea conservativă prin faptul că este *reversibilă*, adică dacă dăm vitezei sens invers (păstrându-i mărimea), atunci mobilul, supus aceloraşi forţe, descrie îndărăt aceiaşi traectorie, cu aceleaşi viteze (schimbate de sens). O imagină: dacă am rula cinematograful mişcării în sens invers (ceia ce revine a schimba dt în $-dt$), obţinem o *mişcare reală*. Exemple: Oscilaţiile unui pendul în vid, mişcarea unui obuz în vid, mişcarea unei planete în vid în jurul unui soare stins, etc. Dacă energia totală nu se conservă, mişcarea este *ireversibilă*. Cinematograful unei mişcări reale care, rulat în sens invers, ne va da mişcarea unei bile de biliard mărindu-şi viteza sau un pendul mărindu-şi oscilaţiile, sau un corp aruncat în sus, căzând la orizont cu o viteză mai mare decât viteza iniţială, ne va releva (filma) mişcări *ireale* (minuni). In scurt timp ne vom da seamă că a fost schimbat sensul timpului.

In mişcarea neconservativă a sistemelor avem, evident, acelaşi fenomen de *ireversibilitate*. Menţionăm în plus că nu există centru de gravitate, adică un vector

$$\overline{R} = \frac{\Sigma\, m\,\overline{r}}{\Sigma\, m}$$

cu o extremitate în origină şi cu cealaltă extremitate având acceleraţia nulă.

ATRACŢIA LUMINOASĂ.

In 1923 într'un memoriu [1]), am întreprins studiul mişcării corpurilor cereşti, ţinând seamă că aceste corpuri sunt supuse nu numai gravităţii newtoniene, ci şi presiunii de lumină. In mişcarea newto-

---

[1]) *Bulletin Astronomique*, Mémoires. Paris 1923. Pag. 257—261.

niană, ca în orice mişcare datorită unei forțe centrale, funcţiune de distanţă, energia se conservă. Nu acelaşi lucru se întâmplă dacă se ţine seama şi de presiunea luminei. Această presiune este şi ea o forță centrală, inversă atracţiei şi care se exercită invers proporţional cu patratul distanţei; însă, pe când atracţia se exercită instantaneu, presiunea de lumină se propagă cu o viteză finită, care depinde de densitatea mediului şi care în vid este o constantă şi se notează cu c (300 mii km. pe secundă). Din această cauză forța rezultantă pe care o exercită un soare S, considerat deocamdată ca un punct fix atractiv şi luminos asupra unei planete P, capătă expresia

$$(1) \quad F = -\frac{A}{r^2} + \frac{R}{r^2} - \frac{R}{r^2}\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}$$

în care r este distanţa dela soare la planetă; A şi R respectiv atracţia newtoniană şi repulsia *Maxwel-Bartoli*[1]) exercitate la unitatea de distanţă [2]).

Expresia (1) se mai poate scrie, luând ca unitate massa presupusă constantă a planetei:

$$(1') \quad F = -\frac{k}{r^2}\left(1 + \varepsilon\frac{dr}{dt}\right)$$

unde

$$k = A - R, \quad \varepsilon = \frac{R}{c(A-R)}.$$

---

[1]) Adică repulsia luminei. *Maxwel* a prevăzut-o prin calcul în 1873 ca o consecinţă a teoriei sale electromagnetice a luminii, iar *Bartoli* în 1883 prin termodinamică; *Lebedeff*, *Nichols* şi *Hull*, în 1900—1901 au verificat-o experimental şi au măsurat-o. Lumina solară apasă pe pământ cam cu o jumătate kgr. pe kilometru pătrat.

[2]) Formula (1) se află astfel: Să presupunem în S un vas pe care se află o mitralieră care aruncă gloanţe şi o helice care provoacă valuri cu aceiaşi frecvenţă. Gloanţele pleacă şi valurile se propagă cu aceiaşi viteză c, în toate direcţiile. Dacă un obiectiv care stă la distanţa 1 primeşte R gloanţe şi R valuri pe secundă, el va primi $\frac{R}{r^2}$ gloanţe şi valuri pe secundă când ar sta la distanţa r. Dacă acum obiectivul (planeta) se mişcă cu viteza radială $v = \frac{dr}{dt}$ el va primi mai puţine gloanţe (sau valuri) dacă se îndepărtează $\left(\frac{dr}{dt} > o\right)$ şi mai multe dacă se apropie $\left(\frac{dr}{dt} < o\right)$ şi anume în proporţia $\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}$ din $\frac{R}{r^2}$ cât primea când sta pe loc $(v = o)$.

In cazul nostru gloanţele sunt fotonii de lumină, iar valurile undele brogliene cari îi asociază.

Vom arăta că rezultă consecințe noui cari privesc filosofia naturii și de o deosebită importanță cosmogonică.

1). Travaliul nu mai este integrabil ca în mișcarea newtoniană, deci:

2). *Mișcarea nu mai este reversibilă;* dacă dăm planetei o viteză de aceiași mărime însă de sens contrar, planeta nu mai descrie în sens invers traiectoria pe care a venit.

3). Expresiunea

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{k}{r}$$

care în mișcare newtoniană se numește *energie, variază în acelaşi sens.* Aceste trei rezultate se văd din faptul că ecuația (3) care ne dă variația energiei cinetice nu este integrabilă în cazul nostru. Intr'adevăr aplicând această ecuație deducem

$$(2) \qquad \frac{dE}{dt} = -k\varepsilon\left(\frac{r'}{r}\right)^2 < 0, \qquad r' = \frac{dr}{dt}.$$

Vedem că *energia se consumă*, fenomen analog cu o frecare [1]). Lucru curios, frecare în acțiunile la distanță.

4). *Teorema ariilor se păstrează,* forța fiind centrală. [2]).

5). Deși integrala forțelor vii nu mai există, totuși există o integrală, care nu mai este algebrică și care generalizează integrala forțelor vii, reducându-se la aceasta pentru $\varepsilon = 0$. Intr'adevăr avem din (2)

$$(3) \qquad \frac{dE}{dr} = -\frac{\varepsilon k}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

și din 4) $\qquad r^2\, d\theta = C\, dt.$

Expresiunea din 3) devine

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2k}{r} = 2E$$

așa că formula (3) se poate scrie

$$(4) \qquad \frac{dE}{dr} = -2\alpha\frac{C}{r^2}\sqrt{2E - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2k}{r}}, \qquad \alpha = \frac{\varepsilon k}{2C},$$

Punând

$$I = 2E + \frac{k^2}{C^2}, \qquad \rho = \frac{C}{r} - \frac{k}{C}$$

---

[1]) Deosebirea e că frecarea în sens comun e perderea de energie prin rezistență tangențială vitezei; în presiunea luminii pierderea este tangențială accelerației.

[2]) Cinematica p. 47.

avem

$$dI = 4\alpha\sqrt{I - \rho^2}\, d\rho$$

iar punând

$$I = \rho^2 (1 + u^2) \qquad \text{deci} \qquad dI = 2\rho(1 + u^2)\, d\rho + 2\rho^2 u\, du$$

se obține ecuația diferențială

$$(1 - 2\alpha u + u^2)\, d\rho = -\rho u\, du$$

din care rezultă, însemnăm cu G o constantă de integrație,

$$G = \rho\sqrt{1 - 2\alpha u + u^2}\, .\, e^{s_1}$$

unde $s_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\text{arc tg}\, \frac{u - \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} + n\pi\right)$.

Integrala forțelor vii este înlocuită prin

$$G = \sqrt{I - 2\alpha\rho\sqrt{I - \rho^2}}\, .\, e^{s_2} \tag{5}$$

unde $s_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[n\pi + \text{arc tg}\, \frac{r' - \alpha\left(\frac{C}{r} - \frac{k}{C}\right)}{\left(\frac{C}{r} - \frac{k}{C}\right)\sqrt{1-\alpha^2}}\right]$.

Pentru $\alpha = 0$ regăsim integrala forțelor vii din mișcarea kepleriană.

6) Elementele eliptice au *variații seculare*. Intr'adevăr din (5) deducem

$$r'^2 + \left(\frac{C}{r} - \frac{k}{C}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{C}{r} - \frac{k}{C}\right) r' = G^2 e^{s_3} \tag{6}$$

cu $s_3 = -2 s_2$.

Vedem că după n semitururi distanțele perihelii și afelii sunt date pentru $r' = 0$ prin

$$\frac{1}{r_n} = \frac{k}{C^2} \pm \frac{G}{C} e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}(n\pi + \text{arc sin}\, \alpha)}. \tag{7}$$

Punând

$$\frac{C^2}{k} = p, \qquad \pm G e^{-\alpha^2} = \frac{\eta_0}{p} \tag{8}$$

aceste distanțe devin

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{p} + \frac{\eta_0}{p} e^{-\frac{n\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}}. \tag{9}$$

Dacă numim după n semitururi η_n excentricitatea, p_n parametrul, a_n semiaxa elipsei unei planete P(o) osculatrice la mişcarea planetei P(α) considerată, avem

$$(10)\quad \eta_n = \eta_0\, e^{-n\pi\alpha}, \qquad p_n = p = a_n(1-\eta_n^2) = a(1-\eta_0^2)\,.$$

Vom regăsi aceste rezultate.

7. *Traectoria.* Formula lui Binet [1]) dă

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + 2\alpha\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$$

deci

$$(11)\qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\eta_0}{p}e^{-\alpha\theta}\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,(\theta-\theta_0)$$

şi regăsim variaţiile seculare. Pentru $\theta = \theta_0$ avem $r = p$. Dacă se dau condiţiile iniţiale r_0 şi v_0 deci şi C atunci vedem din (8) că p_0 şi η_0 depind de ε (deci intensitatea luminei).

8). *Periheliul are o mişcare.* Lucru important în *Teoria relativităţii,* deoarece ea se bazează şi pe mişcarea periheliului lui Mercur. Vom arăta că presiunea luminii provoacă o asemenea mişcare. Fie într'adevăr două planete: una P (α) care se va mişca sub acţiunea forţei (1') şi alta P(o) adică cu $\alpha = o$ deci fără presiune. Presupunem că cele două planete coincid pentru $r = p$, atunci P(o) va descrie traiectoria

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\eta_0}{p}\sin\theta\,.$$

Un observator observă P(α) crezând că observă P (o) şi aşteaptă trecerea la periheliu. El va fi surprins să constate că, această trecere (când discul soarelui apare maximum) nu se împlineşte pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ ci pentru θ care anulează pe $\frac{dr}{d\theta}$ de pe traiectorie şi care dă

$$\cos\sqrt{1-\alpha^2}\,\theta(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,.$$

Rezultă într'adevăr o mişcare a periheliului lui Mercur, însă care nu e suficientă pentru a înlătura teoria relativităţii.

9). *A treia lege a lui Kepler nu se mai aplică* pentrucă ecuaţiile mişcării nu mai rămân invariante dacă schimbăm unităţile de măsură pentru lungimi din λ_0 în λ şi cele de timp din T_0 în T astfel ca

$$\frac{\lambda^3}{T^2} = \frac{\lambda_0^3}{T_0^2}$$

---

[1]) Cinematica p. 81.

cum se întâmplă în mișcarea newtoniană. Va rezulta o corecție de ordinul α.

In 1937 profesorul Armellini, directorul observatorului din Roma face cinstea formulei (1) ce am dat-o în 1923, de a o propune să înlocuiască legea lui Newton [1]). Cu această ocazie reiau lucrările mele și în trei note [2]) publicate la Academia de științe din Paris mai adaog următoarele rezultate:

10). *Variația energiei într'un cuplu de stele este finită dela infinit în trecut până la infinit în viitor*, chiar dacă strălucirea stelelor ar fi fost și ar rămâne vecinică.

Intr'adevăr reluând formula care ne dă expresia energiei

$$2\,E = r'^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2\,k}{r}$$

se vede din (7) că variația energiei între două perihelii este termenul unei serii convergente. Acest adevăr se mai poate deduce și din ecuația traiectoriei. Pentru $t \to -\infty$ urmează să se ia variația energiei numai dela prima assimptotă.

11). *Diferența până la infinit în viitor între numărul de ani* (rotații) *ale planetei în cele două ipoteze*: că lumina s'ar produce instantaneu și apoi că s'ar propaga cu viteză finită, *este finită*.

12). *Nu există egalitate între acțiune și reacțiune* între un soare și o planetă, în sensul că nu există un punct fără accelerație care să dividă raza vectoare soare-planetă în raport constant.

Pentru a salva principiul egalității acțiunii cu reacțiunea, va trebui să admitem că fotonii au o massă, dar atunci viteza c a luminii în vid nu mai este constantă. In studiul nostru variația lui c e neglijabilă.

Vârsta sistemului solar.

Folosind faptul că presiunea de lumină tinde să transforme traiectoriile eliptice în cercuri păstrând ariile, putem avea o metodă pentru a găsi o majorantă a timpului de când ultima planetă *Mercur* s'a desprins din nebuloasa soare. *Mercur* descrie o orbită eliptică cu excentricitate pronunțată 0,21 în interiorul orbitei lui *Venus* care descrie un cerc. Ținând seamă de variațiile seculare (10) se poate găsi un timp când orbita lui *Mercur* s'ar fi străpuns cu orbita lui *Venus*. Or

---

[1]) Rendiconti Academia dei Lincei 1937—1938 mai multe note.

[2]) C. Rendus. Acad. Paris 1939 T. 208 p. 2052 și 1940 T. 210 p. 39 și 138.

așa ceva nu se poate să se fi întâmplat, căci atunci inelul din care s'a născut *Mercur* s'ar fi străpuns cu inelul din care s'a născut *Venus*, deci *Mercur* s'a născut mai târziu decât acel timp. Ținând apoi seamă de evoluția soarelui, că a fost mult mai cald, mai mare (până la *Mercur*) și mai luminos, etc., se poate reduce această majorantă în jurul a cinci miliarde de secole.

Nota C.

ASUPRA NOTAŢIEI VECTORIALE

de VICTOR VÂLCOVICI
Profesor de Mecanică la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti
şi Directorul Institutului de Aerodinamică.

Notaţia vectorială are avantagii. Se înţelege că ea nu poate avea pretenţia de a elimina notaţia cerută de proiecţiile pe cele trei axe. Insă în multe împrejurări notaţia vectorială poate da un sprijin real intuiţiei fenomenului, pe lângă o concentrare în scris adeseori binevenită.

Profitând de amabilitatea d-lui General Burileanu de a mă fi invitat să contribui cu o notă la finele Dinamicei, şi încredinţat că cetitorii cursului vor putea găsi o complinire utilă în cele ce urmează, îmi propun a ilustra această afirmaţie printr'un exemplu — aşa cum îl fac de multă vreme în lecţiunile mele de Mecanică.

1. Voiu însemna cu $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct M, proiecţiile sale pe axele de coordonate fiind x, y, z. In mod analog:

$\bar{v}=\dot{\bar{r}}$, vitesa de proiecţiuni $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, punctul de asupra literei însemnând derivata în raport cu timpul t;

$\bar{a}=\ddot{\bar{r}}$ acceleraţia de proiecţiuni $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$.

$\bar{\rho}=$ versorul vectorului $\bar{r}$ ($\bar{\rho}=$ vers $\bar{r}$) adică vectorul unitate având direcţia şi sensul vectorului $\bar{r}$.

Forţa centrală $\bar{F}$ se va putea exprima în felul următor:

$$\bar{F}=F\bar{\rho},$$

unde F înseamnă valoarea scalară a forţei. F va fi pozitiv când forţa va fi dirijată în acelaşi sens cu $\bar{\rho}$, şi negativ în caz contrariu.

Acestea fiind fixate, ecuaţia lui Newton pentru mişcarea unui punct de masă m asupra căruia lucrează forţa $\bar{F}$ se scrie:

$$m\,\ddot{\bar{r}}=F\bar{\rho}.$$

Multiplicând vectorial la stânga această ecuaţie cu $\bar{r}$ obţinem:

$$m\,\bar{r}\times\ddot{\bar{r}}=o$$

de unde deducem prin integrare (lăsând la o parte factorul constant scalar m);

$$\bar{r}\times\dot{\bar{r}}=\bar{C},$$

24468. — 32

unde $\overline{C}$ înseamnă un vector constant. Relaţia precedentă multiplicată scalar cu $\bar{r}$ ne dă :

$$o = \overline{C}\,\bar{r}$$

sau

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = o\,, \tag{1}$$

unde am însemnat cu C_1, C_2, C_3, proiecţiunile vectorului constant $\overline{C}$ pe cele trei axe de coordonate. Deducem că mişcarea mobilului se efectuează în planul a cărei ecuaţie este (1). Traiectoria însăşi va fi o curbă plană.

2. Să considerăm cazul special al forţei elastice:

$$\overline{F} = -k\,\bar{r}\,,$$

unde k înseamnă o constantă pozitivă de dimensia MT^{-2}. Ecuaţia lui Newton devine

$$m\ddot{\bar{r}} = -k\,\bar{r}$$

sau

$$\ddot{\bar{r}} + \nu^2\,\bar{r} = o\,, \quad \nu^2 = \frac{k}{m}, \quad [\nu] = T^{-1}. \tag{2}$$

Ecuaţia (2) poate fi tratată după modelul ecuaţiilor scalare. Fiind o ecuaţie diferenţială (derivate ordinare) de ordinul al doilea, omogenă, cu coeficienţi constanţi, soluţia ei generală va fi :

$$\bar{r} = \overline{C}_1\, e^{i\nu t} + \overline{C}_2\, e^{-i\nu t}\,, \qquad i = \sqrt{-1}\,,$$

$\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ fiind două constante vectoriale de integrare. Eliminând unitatea imaginară cu ajutorul formulelor lui Euler, relaţia precedentă devine :

$$\bar{r} = \overline{A}\cos\nu t + \overline{B}\sin\nu t\,, \tag{3}$$

unde $\overline{A}$ şi $\overline{B}$ sunt două constante vectoriale, reale, de integrare. Determinarea lor se face cu ajutorul condiţiilor iniţiale :

$$t = o\,, \qquad \bar{r} = \bar{r}_0\,, \qquad \bar{v} = \bar{v}_0\,.$$

Vom avea astfel

$$\overline{A} = \bar{r}_0 \quad, \quad \overline{B} = \frac{\bar{v}_0}{\nu} \tag{4}$$

dacă ţinem seama şi de ecuaţia vitezelor dedusă din (3) prin derivare :

$$\bar{v} = -\overline{A}\nu\sin\nu t + \overline{B}\cos\nu t\,. \tag{5}$$

Introducând valorile (4) în (3) și (5) obținem

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \nu t + \frac{\bar{v}_0}{\nu} \sin \nu t \,, \tag{6}$$

$$\bar{v} = - \nu \bar{r}_0 \sin \nu t + \bar{v}_0 \cos \nu t. \tag{7}$$

Ecuația carteziană a traiectoriei se află fără nici o dificultate dacă se proiectează relația (6) pe axele de coordonate și se elimină între proiecții timpul t. Insă am putea determina caracterele esențiale ale mișcării (deci și ale traiectoriei) fără a ne folosi de coordonate carteziene, ci numai cetind cu atenție formulele (6) și (7).

In adevăr, să lăsăm la o parte cazul când vectorii $\bar{r}_0$ și v_0 au aceiași direcție, caz care ne conduce la o mișcare rectilinie.

Presupunând deci că $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$ nu au aceiași direcție și deci că sunt și diferiți de zero amândoi, constatăm din formulele (6) și (7) :

1° că mișcarea este plană, de oarece $\bar{r}$ rămâne permanent în planul vectorilor $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$;

2° că traiectoria nu are puncte la infinit, $\bar{r}$ având tot timpul o valoare finită ;

3° că traiectoria este simetrică față de O pentru că $\bar{r}$ ia valori de semne contrarii și egale în valoare absolută în două momente care diferă între ele prin $\frac{\pi}{\nu}$;

4° că traiectoria este deci o elipsă având centrul în origine, ea având toate proprietățile precedente și ecuația ei carteziană fiind de gradul al doilea ca rezultând din eliminarea funcțiunilor trigonometrice $\cos \nu t$ și $\sin \nu t$ între expresiile proecțiilor lui $\bar{r}$ pe axe;

5° că vitesa nu se anulează niciodată și deci că mișcarea pe elipsă se face tot timpul în acelaș sens;

6° că mișcarea este periodică, perioada fiind egală cu $\frac{2\pi}{\nu}$.

3. Se înțelege că notația vectorială câștigă mult dacă cedează pasul, la momentul potrivit, notației carteziene — mai ales când e vorba de clasificat traiectoriile, dat fiind că geometria analitică a curbelor continuă a întrebuința, în general, notația carteziană. Totuși, sunt cazuri când notația vectorială întrebuințată până la capăt, dă formulelor o putere interpretativă pe care formulele carteziene nu o au. Ca exemplu voiu cita cazul punctului greu în vid :

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{g} \,,$$

unde am însemnat cu $\bar{g}$ vectorul care determină accelerația gravitații (vector constant dirijat pe verticală în jos). Ecuația precedentă se integrează imediat

$$\bar{v} = \bar{g}t + \bar{v}_0 \,, \tag{8}$$

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\bar{g}t^2 + \bar{v}_0 t \,, \tag{9}$$

unde am însemnat cu $\bar{v}_0$ vitesa inițială, presupunând că punctul pornește din origine la momentul $t = o$. Formulele (8) și (9) ne spun că atât vitesa $\bar{v}$ cât și vectorul de poziție $\bar{r}$ pot lua valori foarte mari (pentru t foarte mare). Așa dar, traiectoria va avea puncte la infinit. De altfel din (9) deducem că ea este o curbă algebrică de gradul al doilea, așa încât traiectoria va fi o conică cu puncte la infinit. Insă formula (8) ne arată că proiecția pe orizontală a vitesei rămâne constantă, pe când cea verticală poate lua valori oricât de mari, de unde deducem că traiectoria nu poate avea de cât asimptote verticale. Pe de altă parte, din (9) se vede că proiecția orizontală crește de asemeni fără limită, așa că asimptota verticală este îndepărtată la infinit: traiectoria este o parabolă.

Vom presupune că $\bar{v}_0$ face unghiul α cu orizontul. Dacă α este cuprins între zero și π, proiecția pe verticală a lui $\bar{r}$ ne dă chiar înălțimea h a mobilului în funcțiune de timp:

$$h = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2 .$$

Se vede că h începe prin a crește, atingându-și valoarea maximă h' pentru valoarea

$$t' = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

a timpului. Vom avea

$$h' = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} .$$

Aceasta este *săgeata traiectoriei*. Punctul A, cel mai urcat al parabolei, se va proiecta pe orizontală în punctul A′ situat la distanța

$$d' = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

de O. Vom presupune α cuprins între zero și $\frac{\pi}{2}$ ceea ce evident nu particularizează problema. Atunci expresia lui d' este pozitivă.

Să considerăm acum două momente pozitive t_1 și t_2 $(t_2 > t_1)$. Fie $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ valorile respective ale vectorului $\bar{r}$. Vom avea:

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \frac{1}{2}(t_2^2 - t_1^2)\bar{g} + (t_2 - t_1)\bar{v}_0 .$$

Ne propunem a cerceta dacă putem determina momentele t_1 și t_2 așa fel în cât vectorul $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ să fie orizontal. In acest caz produsul sca-

Iar $(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\, g$ va fi nul, în cât relația precedentă ne-ar da :

$$\frac{1}{2}(t_2^2 - t_1^2)\, g^2 + (t_2 - t_1)\, \bar{v}_0\, \bar{g} = 0$$

sau încă,

$$\frac{g^2}{2}(t_1 + t_2) = v_0\, g \sin \alpha$$

observând că produsul scalar $\bar{v}_0 \ \bar{g}$ este egal cu $-v_0\, g \sin \alpha$. Deducem

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = t'$$

de unde scoatem pentru t_2 valoarea :

$$t_2 = 2\, t' - t_1 .$$

Momentele t_2 și t_1 sunt simetric așezate față de momentul t'. Așa dar, *luând două momente t_1 și t_2 simetrice față de t', obținem vectorul $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ orizontal.*

Mijlocul vectorului $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ se proiectează pe orizontala originei O, într'un punct situat la distanța care se obține proiectând vectorul

$$\bar{r}_1 + \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{2}$$

pe acea orizontală. Vom avea astfel

$$v_0\, t_1 \cos \alpha + \frac{1}{2} v_0 (t_2 - t_1) \cos \alpha = v_0\, t' \cos \alpha$$

sau încă

$$\frac{v_0 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

adică d'. Așa dar, verticala vârfului A este chiar axa parabolei. De aici deducem imediat că bătaia OB, adică coarda orizontală trecând prin O, are valoarea:

$$2\, d' = \frac{v_0 \sin 2\, \alpha}{g} .$$

TABLA DE MATERII

PARTEA I-a

MIŞCAREA ŞI ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL

I. INTRODUCERE.

II. MIŞCAREA ŞI ECHILIBRUL UNUI PUNCT MATERIAL LIBER.

III. MIŞCAREA ŞI ECHILIBRUL UNUI PUNCT PE O SUPRAFAŢĂ SAU PE O CURBĂ.

Pagina

IV. Forţă de inerţie. Mişcare relativă.

V. Exemple de mişcări. Punct liber.

VI. Mişcarea planetelor. Gravitaţia universală.

VII. Exemple de mişcări pe suprafeţe şi pe curbe.

VIII. Exemple de echilibru şi mişcare relativă.

Pagina

IX. Rezumatul echilibrului și mișcării unui punct material.

PARTEA II-a

ECHILIBRUL SISTEMELOR MATERIALE

I. Teoria centrelor de greutate.

II. Echilibrul unui solid invariabil.

III. Echilibrul sistemelor de figură variabilă compuse din mai multe solide invariabile.

Pagina

IV. Echilibrul sistemelor materiale.

V. Echilibrul solidelor naturale.

PARTEA III-a
MIŞCAREA SISTEMELOR MATERIALE

I. Mişcarea sistemelor materiale libere.

II. Mişcarea sistemelor materiale cu legături.

Pagina

III. Aplicarea diferitelor metode la rezolvarea unei probleme de dinamică.

Probleme:

IV. Alte aplicaţiuni ale ecuaţiilor lui Lagrange.

Pagina

PARTEA IV-a

MIŞCAREA SOLIDELOR INVARIABILE

I. Teoria momentelor de inerţie.

II. Momentele de inerţie a câtorva volume omogene.

III. Mişcarea unui solid în jurul unui ax fix.

IV. Mişcarea unui solid în jurul unui punct fix.

Pagina

V. Mişcarea unui solid liber.

VI. Efectul percuţiilor asupra unui solid în mişcare.

VII. Mişcarea solidelor naturale.

PARTEA V-a

MIŞCAREA PROECTILULUI IN JURUL CENTRULUI SĂU DE GREUTATE

I. Noţiuni introductive.

Greutatea. Rezistenţa aerului. Frecările laterale. Mişcarea centrului de greutate.

Pagina

II. MIȘCAREA PROECTILULUI ÎN JURUL CENTRULUI SĂU DE GREUTATE.

